



SCIENTIFIC BULLETIN
PHYSICAL AND
MATHEMATICAL RESEARCH

ILMIY XABARNOMA
FIZIKA-MATEMATIKA
TADQIQOTLARI

2025
VOLUME 7
ISSUE 4

ЗАХИРИДДИН
МУҲАММАД БОБУР
НОМИДАГИ АНДИЖОН
ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ANDIJAN STATE
UNIVERSITY NAMED
AFTER ZAKHIRIDDIN
MUKHAMMAD BABUR

ИЛМИЙ ХАБАРНОМА
Физика-математика
тадқиқотлари

SCIENTIFIC BULLETIN
Physical and
Mathematical Research

2025/№4(7)

Андижон
2025йил

Муассис

Захириддин Мухаммад Бобур
номидаги Андижон давлат
университети

ИЛМИЙ ХАБАРНОМА. ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ТАДҚИҚОТЛАРИ

Журнал бир йилда 4 марта чоп этилади.

Андижон вилояти ахборот ва оммавий
коммуникациялар бошқармаси
томонидан 2019-йил 26 декабрда
0452 рақам билан рўйхатга олинган.

Нашр индекси: 344

Нашр учун масъул:
Н.И. Юнусалиев

Босишга рухсат этилди: 27.12.2019.
Қоғоз бичими: 60x81 1/8 Босма табоғи:
13,5

Офсет босма. Офсет қоғози.
Адади: 110 дона.

Баҳоси келишилган нархда.
Буюртма №: 165.

“Муҳаррир” нашриёти матбаа бўлимида
чоп этилди.
Тошкент шаҳри, Сўғалли ота кўчаси 7-уй

Таҳририят манзили:

170100, Андижон шаҳри, Университет
кўчаси, 129. Телефон: +998911602043.
Факс: (374) 223-88-30

E-mail: adu_xabarnoma@mail.ru

Расмий сайт: <https://asujournal.uz/>

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ РЕДКОЛЛЕГИИ

Зайнобидинов Сирожиддин –
доктор физико-математических
наук (DSc), профессор, академик
Академии наук Республики
Узбекистан.

ЗАМЕСТИТЕЛЬ ПРЕДСЕДАТЕЛЯ РЕДКОЛЛЕГИИ

Акбаралиев Бахтиёр Бакирович
– доктор технических наук (DSc),
профессор, ректор Андижанского
государственного университета
имени З. М. Бобура.

ФИЗИКА

**Утамурадова Шарифа
Бекмурадовна** – доктор физико-
математических наук (DSc),
профессор, директор Научно-
исследовательского института
физики полупроводников и
микроэлектроники при
Национальном университете
Узбекистана имени Мирзо
Улугбека.

**Маматкаримов Одилжон
Охундедаевич** – доктор физико-
математических наук (DSc),
профессор, ректор
Наманганского инженерно-
технологического института.

Олимов Хусниддин Косимович –
доктор физико-математических
наук (DSc), профессор, директор
Физико-технического института
НПО «Физика-Солнце» Академии
наук Республики Узбекистан.

Каримов Иброхим Набиевич –
доктор физико-математических
наук (DSc), профессор, профессор
кафедры физики Андижанского
государственного университета
имени З. М. Бобура.

**Тургунов Нозимжон
Абдуманнопович** – доктор
физико-математических наук
(DSc), профессор, заместитель
директора Научно-
исследовательского института
физики полупроводников и

микроэлектроники при
Национальном университете
Узбекистана имени Мирзо
Улугбека.

**Исмаилов Канатбай
Абдреймович** – доктор физико-
математических наук, профессор
Каракалпакского
государственного университета.

Каражанов Смагул – доктор
физико-математических наук
(DSc), старший научный
сотрудник отдела солнечной
энергетики Института
энергетических технологий,
Кьеллер, Норвегия.

**Рембеза Екатерина
Станиславовна** – доктор физико-
математических наук (DSc),
профессор Воронежского
государственного университета.

Вайткус Юозас Юозович – доктор
физико-математических наук
(DSc), профессор, академик
Академии наук Литвы.

Абдужабборов Ахмаджон –
доктор физико-математических
наук (DSc), профессор, главный
научный сотрудник Института
астрономии Академии наук
Республики Узбекистан.

Бобоев Акрамжон Йулдашбоевич
– доктор физико-математических
наук (DSc), декан физико-
технического факультета
Андижанского государственного
университета имени З. М. Бобура.

Курбанов Азизжон Обитжонович
– кандидат физико-
математических наук, доцент
Андижанского государственного
университета имени З. М. Бобура.

**Мадаминов Хуршиджон
Мухамедович** – кандидат физико-
математических наук, доцент
Андижанского государственного
университета имени З. М. Бобура.

ТЕХНИКА

**Мамадалимов Абдугафур
Тишабаевич** – доктор физико-
математических наук (DSc),
профессор, академик Академии

наук Республики Узбекистан.

Содилов Илхом Исмаилович –
доктор физико-математических
наук (DSc), профессор, директор
Института ядерной физики
Академии наук Республики
Узбекистан.

Ашуров Хотам Бахронович –
доктор технических наук (DSc),
профессор, директор Института
ионно-плазменных и лазерных
технологий имени У. А. Арифова
Академии наук Республики
Узбекистан.

Далиев Хожакбар Султанович –
доктор физико-математических
наук (DSc), профессор, директор
Ташкентского филиала
Национального
исследовательского
университета «МЭИ».

Алиев Раимжон Усмонович –
доктор технических наук (DSc),
профессор Андижанского
государственного университета
имени З. М. Бобура.

Юлдашев Носиржон Хайдарович
– доктор технических наук (DSc),
профессор Ферганского
политехнического института.

**Касимахунова Анора
Мамасодиловна** – доктор
технических наук (DSc),
профессор Ферганского
государственного университета.

Тагаев Марат Баймуратович –
доктор технических наук (DSc),
профессор Каракалпакского
государственного университета
имени Бердаха.

Мансуров Хатамжон Жураевич –
кандидат физико-
математических наук, доцент,
декан физического факультета
Андижанского государственного
университета имени З. М. Бобура.

МАТЕМАТИКА

**Арзикулов Фарходжон
Неъматович** – доктор физико-
математических наук, профессор
Андижанского государственного
университета имени З. М. Бобура.

Кайгородов Иван – доктор физико-математических наук, профессор Университета Бейра Интериор, Ковильян, Португалия.

Xabier Garcia Martinez – профессор кафедры математики Университета Виго, Виго, Испания.

Каримжанов Икболжон

Абдулазизович – PhD по физико-математическим наукам, доцент, проректор Андижанского государственного университета.

Ибайдуллаев Туланбой

Турсунбоевич – кандидат физико-математических наук, доцент, декан математического факультета Андижанского государственного университета имени З. М. Бобура.

Умрзаков Нодирбек

Мухаммадович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой алгебры Андижанского государственного университета имени З. М. Бобура.

ИНФОРМАТИКА

Расулов Акбарали Махаматович – доктор физико-математических наук (DSc), Ферганский филиал

Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразми.

Махкамов Мадаминжон

Комилович – кандидат физико-математических наук, доцент, проректор Андижанского государственного университета имени З. М. Бобура.

Худойберганов Мирзоали

Уразалиевич – доктор физико-математических наук (DSc), профессор, заведующий кафедрой Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Абдурахманов Жамолидин

Комолдинович – кандидат физико-математических наук, доцент Андижанского государственного университета.

РЕДАКТОР

Юнусалиев Нуритдин Юнусали
угли – PhD по физико-математическим наукам, Андижанский государственный университет.

<u>Физика</u>	
I.N. Karimov, M. Foziljonov Oksid qatlamidagi lokal zaryad joylashgan soha kengligi va kanal bo'ylab vaziyati o'zgarishining FinFet o'tish xarakteristikasi qiyaligiga ta'siri	7
Х.М. Мадаминов, А.А. Абдурахмонов, А.Ш. Икромов, Г.С. Холйигитова Примесный теплофотовольтаический эффект pSi-nSi _{1-x} Sn _x (0≤x≤0.04) структурах	13
M.G'. Dadamirzayev Tor zonali kvant o'raning o'tkazuvchan zona tubidagi erkin elektronlar energiyasiga magnit maydon ta'siri	18
S.Z. Zainabidinov, N.A. Turgunov, A.Y. Boboev, Sh.K. Akbarov, N.B. Khaitimmetov Temir va nikel bilan legirlangan qilingan kremniy namunalarida bo'laklarining hosil bo'lishi	22
U.M. Negmatov Yarimo'tkazgichli materialning birinchi Landau sathini vaqt bo'yicha o'zgarish dinamikasi	26
B.M. Ergashev Issiqlik ishlovi rejimlariga bog'liq holda p-tip kremniy monokristallarida kislorodli komplekslar, klasterlar va mikrokuchlanishlarning XRD tahlili	30
A.M. Kasimaxunova, M.A. Norbo'tayev, S.I. Norbo'tayeva Termojuft shoxchalarda tok zichligi o'zgarishining issiqlik jarayonlariga ta'sirini tadqiq etish	35
U.I. Erkaboev, U. M. Negmatov O'zgaruvchan kuchsiz magnit maydondagi kvant o'rali yarimo'tkazgichlarda birinchi landau sathining vaqt bo'yicha o'zgarishi	41
M.A. Norbo'tayev Yarimo'tkazgichli materiallardan tayyorlangan hajmiy termoelementlarni tayyorlash imkoniyatlarini tadqiq qilish	44
<u>Математика</u>	
Д. М. Меликузиева Об одном методе решения краевых задач для уравнения четвёртого порядка, содержащее третью производную по времени в полуограниченных областях	49
M. Azizov, K. Rasulova O'ng tomoni noma'lum tor tebranish tenglama uchun teskari masala	58
X. Ismoilov, M. Namozova, S. Axmadjonova Pnevmotransporti ventilyatori parrakli diski massasini engillatish, ventilyator ish samaradorligiga ta'siri	68

O.Kh. Abdullayev, O.S. Akhmedov, A.Kh. Abdullayev Estimation of the accuracy of a third-order taylor formula-based approximate method for the cauchy problem in dynamical systems	74
A. Abdulvokhidov, O. Samsaqov, R. Ma'rufjonov, M. Zokirjonov Dividing ten participants on social networks into a community using maximum likelihood	80
Х. Исмоилов, М. Эргашева О неподвижных точках операторов вольтерровского типа с периодическими коэффициентами	84
D.T. Mamatbayeva, T.A. Ominaxon, M.A. Muhammadjonova Uchburchak geometriyasida massalar metodi	88
Д.С. Олимова О единственности решения задачи дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами и с двумя плоскостями изменения типа	94
<i>Правила оформления статьи.....</i>	101

ОГЛАВЛЕНИЕ

OKSID QATLAMIDAGI LOKAL ZARYAD JOYLASHGAN SOHA KENGLIGI VA KANAL BO'YLAB VAZIYATI O'ZGARISHINING FINFET O'TISH XARAKTERISTIKASI QIYALIGIGA TA'SIRI

I. Karimov¹, M Foziljonov¹

¹Z. M. Bobur nomidagi Andijon davlat universiteti, O'zbekiston, 170100, Andijan sh, Universitet ko'chasi 129 uy

2025-yil 30-oktabrda qabul qilingan; 2025-yil 27-noyabrda nashrga qabul qilingan

Annotatsiya. Ko'rilayotgan maqolada izolyator ustida kremniy texnologiyasi asosidagi vertikal izolyatsiyalangan zatvorli maydoniy tranzistor oksid qatlamida qamralgan lokal zaryad kengligi va kanal bo'ylab vaziyatining tranzistorlarda kuzatilishi mumkin bo'lgan qisqa kanalli effektlardan biri bo'lgan SS (Subthreshold Swing) effektiga ta'siri ko'rilgan. Nanometer o'lchamlarda tranzistorning geometrik o'lchamlarining fluktuatsiyasi qisqa kanalli effektlarga ta'sir qilishi mumkin. Asosan ko'p zatvorli tranzistorlar qisqa kanal effektlarni kamayishini taminlash maqsadida yaratilgan shu jumladan izolyator ustida kremniy texnologiyasi asosidagi vertikal izolyatsiyalangan zatvorli maydoniy tranzistorlar ham, ammo o'lchamlari judayam kichiklashganda bu effektlarning paydo bo'lish ehtimolligi ortadi. Nanoo'lchamdagi bunday strukturalarni tayyorlash jarayoni geometrik parametrlarining kutilgan parametrlardan chetlashishini yuzaga keltiradi. Bu o'zgarishlar esa DIBL va SS kabi effektlarga ham ta'sir qiladi. Ushbu ishda izolyator ustida kremniy texnologiyasi asosidagi vertikal izolyatsiyalangan zatvorli maydoniy tranzistor oksid qatlamida qamralgan lokal zaryad kengligi va kanal bo'ylab vaziyatining SS ga ta'siri modellashtirilgan. 3D modellashtirish Advanced TCAD Sentaurus dasturida amalga oshirilgan.

Kalit so'zlar: *Advanced TCAD Sentaurus, DIBL, SS effekti, maydoniy tranzistor, lokal zaryad, ko'p zatvorli tranzistorlar, qisqa kanalli effektlar...*

Аннотая. В данной работе проведён анализ влияния ширины и пространственного распределения локального заряда, захваченного в оксидном слое вертикального полевого транзистора с изолированным затвором, реализованного по технологии кремний-на-изоляторе (SOI), на величину SS (Subthreshold Swing), относящуюся к одному из основных короткоканальных эффектов, проявляющихся в современных транзисторных структурах. В нанометровом масштабе флуктуации геометрических размеров транзисторных структур оказывают заметное влияние на проявление короткоканальных эффектов. Многозатворные транзисторы были разработаны преимущественно с целью подавления короткоканальных эффектов, включая вертикальные полевые транзисторы с изолированным затвором, реализованные на основе технологии кремний-на-изоляторе (SOI). Однако при экстремальном масштабировании устройств вероятность возникновения указанных эффектов существенно возрастает. Процессы формирования наномасштабных структур неизбежно приводят к отклонению их геометрических параметров от номинальных (проектных) значений, что дополнительно усиливает влияние размерных вариаций на электрические характеристики транзисторов. Указанные вариации также оказывают влияние на такие эффекты, как DIBL (Drain-Induced Barrier Lowering) и SS (Subthreshold Swing). В настоящей работе методом численного моделирования исследовано влияние ширины локального заряда, захваченного в оксидном слое, а также его пространственного распределения вдоль канала вертикального полевого транзистора с изолированным затвором, реализованного по технологии кремний-на-изоляторе (SOI), на параметр SS. Трёхмерное моделирование выполнено с использованием программного комплекса Advanced TCAD Sentaurus.

Ключевые слова: *Advanced TCAD Sentaurus; DIBL; эффект SS (Subthreshold Swing); полевой транзистор; локальный заряд; многозатворные транзисторы; короткоканальные эффекты.*

Abstract. This work investigates the impact of the width and spatial distribution of locally trapped charge in the oxide layer of a vertical gate-isolated field-effect transistor fabricated using silicon-on-insulator (SOI) technology on the subthreshold swing (SS), one of the key short-channel effects in nanoscale devices. At nanometer dimensions, geometric fluctuations significantly influence short-channel behavior, even in multigate transistor architectures designed to suppress these effects. Using three-dimensional numerical simulations performed with the Advanced TCAD Sentaurus tool, the influence of oxide-trapped charge characteristics along the channel on the SS parameter is systematically analyzed.

Keywords: *Advanced TCAD Sentaurus; DIBL; Subthreshold Swing (SS); field-effect transistor; local trapped charge; multigate transistors; short-channel effects.*

I. KIRISH.

Vertikal maydon tranzistorlar o'lchamlari nanometer masshtabga yetganida uning xarakteristikalarida degradatsiyon effektlar kuzatiladi. Bu effektlarni bartaraf qilish uchun esa avval ularni keltirib chiqargan sabablar, ularning ta'sir mexanizmlari o'rganilishi talab qilinadi. FinFET tranzistorlarida nanoo'lchamlarda uchraydigan asosiy degradatsion effektlarga tranzistor geometrik o'lchamlarining fluktuatsion o'zgarishlari, qisqa kanalli effektlar, zatvor osti oksid qatlamida nuqsonlarning qamralishini kiritishimiz mumkin. Texnologik tomondan bunday o'lchamdagi tranzistorlarni olish qimmat va murakkab ish bo'lganligi uchun dunyoning ko'plab laboratoriyalarida nanoo'lchamdagi maydon tranzistorlarda xosil bo'ladigan effektlar dastlab modellashirilib o'rganiladi. Bu ishda ham yuqorida aytib o'tilgan effektlarni modellashirib o'rganilgan. Modellashirish Advanced TCAD Sentaurus dasturida amalga oshirilgan. Nanoo'lchamdagi maydon tranzistorlarida uchraydigan juda muxim effektlardan biri bo'sag'adan pastdagi soxada qiyalik (SS) ning ortishini ko'rsatish mumkin. Odatda bunday qisqa kanal effektini baxolash uchun bo'sag'adan past soxadagi o'tish volt-ampere xarakteristikasining tikligiga teskari bo'lgan kattalikka aytiladi va u SS (Subthreshold swing) deb nomlanadi.

Narmal ishlaydigan uzun kanalli (1 μm va undan uzun) tranzistorlarda odatda istok va stok orasida potentsiallar farqi xosil qilinganda istokdan stokka oqib o'tadigan tok asosan zatvorga berilgan kuchlanish orqali boshqariladi. Kanal uzunligi nanometr masshtablarga kamaytirilsa zatvor osti oksid qatlamida qamralgan zaryadlar ta'siri sezila boshlaydi. Qamralgan zaryadlar istok-stok yon o'tish VAXiga ta'sir qiladi bu esa SS ning o'zgarishiga olib keladi. Odatda zatvor osti oksid qatlami SiO_2 ishlatiladi lekin SiO_2 o'rniga gafnium HfO_2 ishlatilishi tranzistorning SS effektini yaxshilashi mumkin [1]. Tranzistor xarakteristikalarini yaxshilash uchu, zatvor osti oksid qatlamini o'zgartirishdan tashqari, zatvorlar sonini xam oshirish mumkin. Biz modellashirilgan tranzistor uch zatvorli tranzistorlar deb ataladi [2]. Bundan tashqari kanal materialining turi, masalan kremniyli va

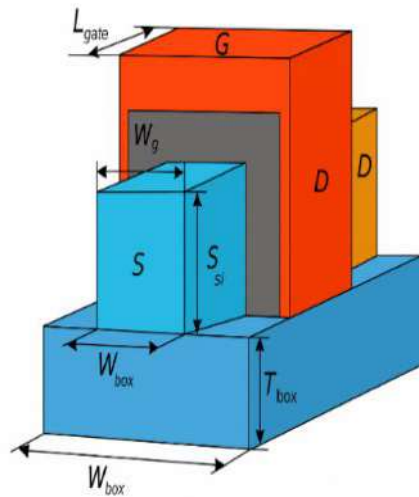
germaniyli tranzistorlarning qisqa kanal effektlariga tasiri o'rganilgan. Germaniyli kanalga ega bo'lgan tranzistorlar nisbatan kichikroq SS ni namoyon qilgan [3].

IUK asosidagi FinFET tranzistorlarning kanal kengligini (W_{Si}) 6 nm dan 15 nm ga ortishi SS ning 42% ga o'zgarishiga, zatvor uzunligining L_{gate} 12 nm dan 21 nm ga o'zgarishi SSning 14% ga o'zgarishiga olib keladi [4]. Kanal soxasining legirlanish darajasini $1 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ dan $1 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ gacha o'zgartirish orqali bo'sag'a kuchlanishini 30 % ga o'zgartirish mumkin bu esa o'z navbatida nisbatan kichikroq SS qiymatlarini olishni ta'minlaydi [5]. Shu sababli ko'rilayotgan ishda maydon tranzistorining zatvor osti oksid qatlamida yig'ilgan zaryadning stokdan istok tomon kengayib borishi (d) va stokdan istok tomon zaryadlangan soxaning vaziyatini o'zgarib borishi (L) ni SS ga ta'siri o'rganilgan.

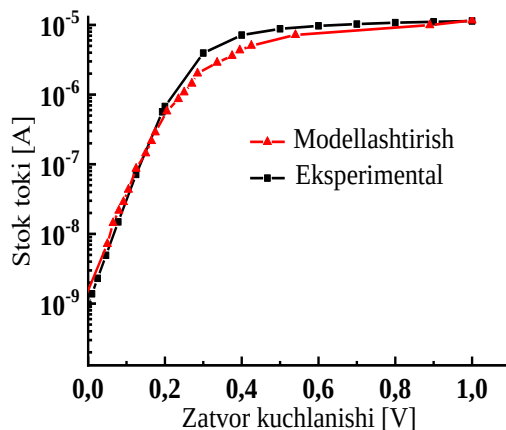
II. MATERIAL VA USULLAR

Modellashirilayotgan tranzistorning zatvor ostidagi oksid qatlamidagi nuqsonda to'plangan lokal zaryadning stokdan istok tomon kengayib borishi d va stokdan istok tomon zaryadlangan soxaning vaziyatini o'zgarib borishi (L) ni SS ga ta'sirini o'rganishda lokal zaryad kengligi $d=5 \text{ nm}$, 10 nm, 15 nm, 20 nm, 25 nmga teng qilib olingan. Stokdan istok tomon zaryadlangan soxaning vaziyatini o'zgarib borishi L ning qiymatlari esa mos ravishda 2,6 nm, 7,4 nm, 12,4 nm, 17,4 nm va 22,4 nmga teng deb olingan. Biz modellashirgan tranzistorda sirtiy nuqsonlar zichligi 10^{12} cm^{-2} qilib olingan va uni xajm miqdorida xisoblaydigan bo'lsak, modellashirishdagi tranzistorimizning oksid qatlami qalinligi $t_{\text{ox}}=2,5 \text{ nm}$ ekanligidan kelib chiqib xajmiy zaryad zichligi $4 \cdot 10^{18} \text{ C/cm}^3$ ga teng deb olingan.

1-rasmda modellashirilgan, izolyator-ustida-kremniy (IUK) texnologiyasi asosidagi FinFET 3D strukturasi, 2-rasmda esa tajriba natijalari va modellashirishda olingan natijalari taqqoslangan va model kalibrofka qilingan

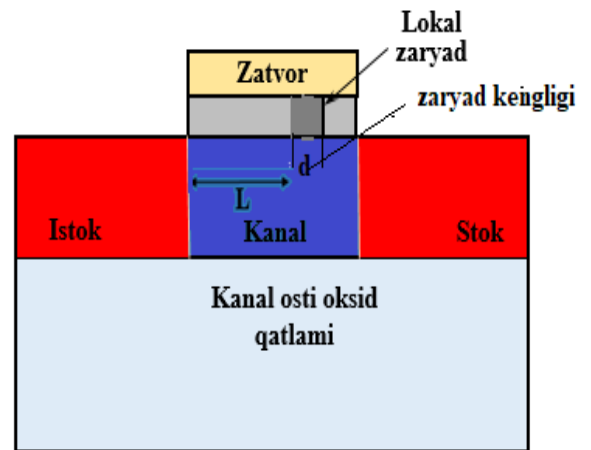


1-rasm. Vertikal maydoniy tranzistorning geometrik tuzilishi.



2-rasm. Modellashtirilayotgan vertikal maydon tranzistorning o'tish volt-ampere xarakteristikasi. $L_{gate} = 25$ nm va $V_{gate} = 750$ mV. Bo'lgan holat uchun (1) modellashtirishda, (2) tajribada olingan natija.

Kalibrovkalash jarayonida tok tashuvchilarning harakatchanligi uchun termodinamik, drift-diffusion, high-field saturation transport modellari hamda modellashtirilayotgan tranzistor nanometer masshtabda bo'lganligi uchun kvant effektlarni e'tiborga olib Quantum Potential korrektirovka qo'llanildi. 3-rasmda FinFET strukturasi kanal bo'ylab kesimi ko'rinishi zaryadlangan soxa kengligi d va istokgacha vaziyati L ko'rsatilgan. Tranzistor zatvor uzunligi L_{gate} 25 nm va zatvor osti oksid qatlami qalinligi 2.5 nm ni tashkil qiladi. Kanal qalinligi T_{Si} va orqa oksid qatlami qalinligi T_{box} mos ravishda 30 va 100 nm ga teng. Kanal kengligi 12 nm. p-Si taglik (baza) legirlanish darajasi $1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$.



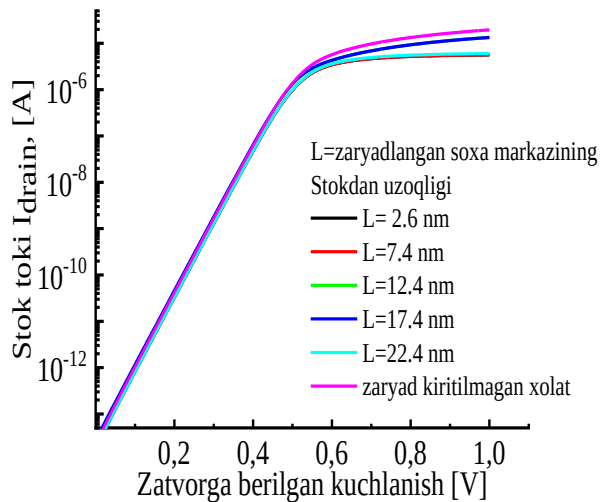
3-rasm. Izolyator-ustida-kremniy texnologiyasi asosidagi FinFET 3D strukturasi kanal bo'ylab kesimi ko'rinishi.

III. NATIJALAR

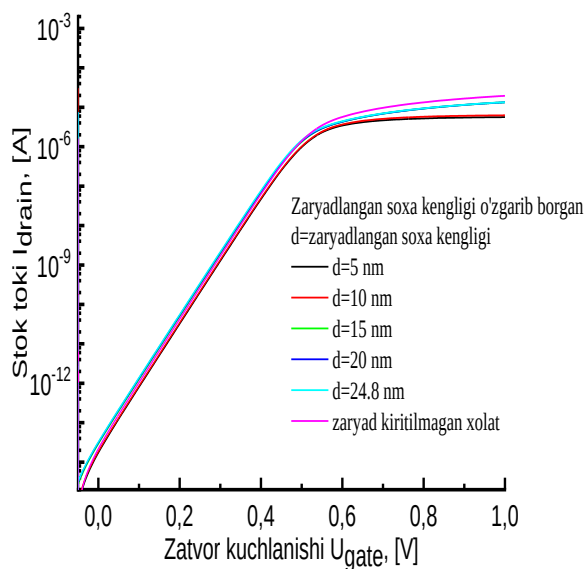
Oksid qatlamidagi lokal zaryadning istok tomon kengayib borishida olingan FinFET yon o'tish volt-ampere xarakteristikasi va zaryadlangan lokal sohaning istok-kanal chegarasigacha bo'lgan vaziyatini o'tish volt-ampere xarakteristikasiga ta'siri modellashtirish natijalari mos ravishda 4 va 5-rasmlarda keltirilgan. Qamralgan zaryadlarning kengligi va istok tomon siljib borish vaziyati istok-stok yon o'tish VAXiga ta'sir qiladi bu esa bizga SS ning qiymatlarini va uning oksid qatlamida qamralgan zaryad ta'sirida o'zgarishini aniqlashimizga imkon beradi. SS kattalik bo'sag'a kuchlanishidan past soxaning tikligiga teskari kattalik bo'lib, quyidagi formula orqali xisoblanadi.

$$SS = \frac{\Delta V_g}{\Delta \lg I_d} = \frac{V_{th} - (V_{th} - 0,2)}{\lg I_{th} - \lg I_{off}} = \frac{0,2}{\lg \left(\frac{I_{th}}{I_{off}} \right)} \left[\frac{\text{mB}}{\text{декада}} \right] \quad (1)$$

Bu yerda ΔV_g -bo'sag'a kuchlanish V_{th} tranzistor yopiq xolatiga to'g'ri keladigon zatvor kuchlanishi orasidagi farq. Bu maqolada tranzistor yopiq xolatiga mos zatvor kuchlanishi deb bo'sag'a kuchlanishidan 200 mV kichikroq kuchlanish olingan. $\Delta \lg I_d$ esa bo'sag'a kuchlanishiga to'g'ri keladigon bo'sag'a toki o'nlik logarifmi $\lg I_{th}$ tranzistor yopiq xolatdagi tok logarifmi $\lg I_{off}$ orasidagi farq.



4-rasm. Zaryadlangan lokal sohaning istok-kanal chegarasigacha bo'lgan vaziyatini o'tish VAX siga ta'siri.



5-rasm. Zaryadning kengligi d ning o'tish VAX ta'siri.

O'tish volt-ampere xarakteristikalarining turli soxalarida, masalan bo'sag'a kuchlanishining yuqori soxasida, bo'sag'a kuchlanish atrofida, yoki butun VAX soxasi bo'ylab SS ni xisoblash mumkun. Nanoo'lchamli IUK texnologiyasi asosidagi vertikal o'tishsiz uch zatvorli MOYa tranzistorlari uchun bo'sag'a toki tranzistorning geometrik o'lchamlaridan kelib chiqadi va quyidagi formula orqali aniqlanadi [6].

$$I_{th} = \frac{W_{eff}}{L_g} \cdot 2 \cdot 10^{-7} [A] \quad (2)$$

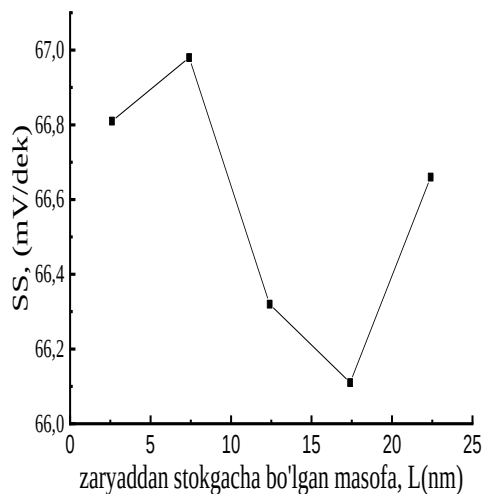
Bu yerda L_g -zatvor uzunligi, W_{eff} -tranzistor uzunligining effektiv kengligi bo'lib biz modellashtirgan tranzistorlarda quyidagicha aniqlanadi.

$$W_{eff} = 2 \cdot T_{si} + W_t \quad (3)$$

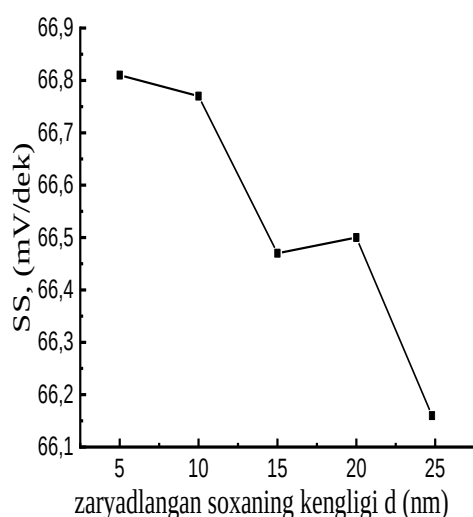
T_{si} -tranzistor kanal qatlamining qalinligi, W_t -tranzistor yuqori qismining kengligi.

Ushbu maqolada FinFFET tranzistorining geometrik o'lchamlari $T_{si}=30$ nm, $W_t=12$ nm, $L_g=25$ nm ga teng. (2) va (3) ifodalardan foydalanib FinFET tranzistori uchun bo'sag'a tokining qiymatini keltirib chiqaramiz. Biz modellashtirgan tranzistorda bo'sag'a toki $I_{th}=5,76 \cdot 10^{-7}$ A ga teng. MOYa tranzistor o'tish volt-ampere xarakteristikalarining sifati ochiq I_{on} va yopiq I_{ff} stok toklarining nisbati orqali aniqlanadi. FinFET tranzistorlarida yopiq stok toki bo'sag'a kuchlanishidan 200 mV ga kam bo'lgan zatvor kuchlanishga mos kelgan stok toki va ochiq stok toki sifatida esa bo'sag'a kuchlanishidan 200 mV ga kattaroq zatvor kuchlanishiga mos kelgan stok toki olinadi.

Ushbu maqolada 4 va 5-rasmda keltirilgan natijalardan foydalanib qamralgan zaryadlarning kengligi va istok tomon siljib borish vaziyatini bo'sag'adan past o'tish xarakteristikasi qiyaligi (SS) ga ta'siri o'rganildi. Tadqiqot natijalari 6- a va b rasmlarda keltirilgan. Ma'lumki bo'sag'adan past o'tish xarakteristikasi qiyaligi (SS) kanaldagi potensial taqsimoti bilan bog'liq. Shu sababli zatvor osti oksid qatlamida to'plangan zaryadning kengligi va istok tomon siljib borish vaziyati tufayli potensial taqsimotining o'zgarishi qisqa kanalli effektlarning o'zgarishiga jumladan SS ning xam o'zgarishiga olib keladi.



a)



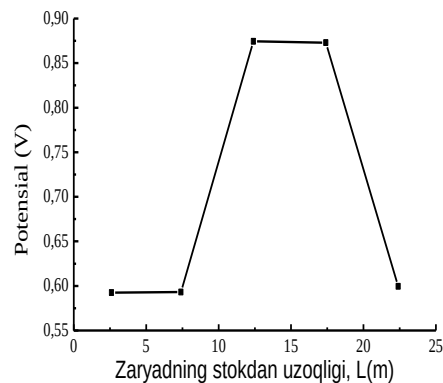
b)

6-rasm. a) Lokal zaryadning istok tomon siljib borish vaziyati L ni SS ga ta'siri. b) Lokal zaryad kengligi d ning SS ga ta'siri.

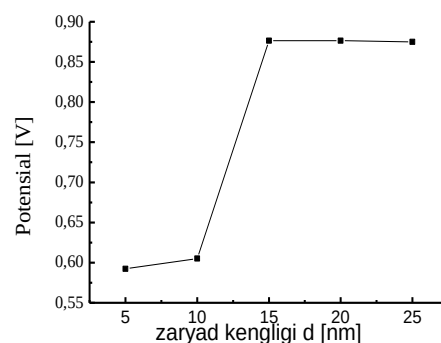
IV. MUXOKAMA

Xaqiqatdan ham modellashirish natijalari shuni ko'rsatadiki lokal zaryad kengligi d va istok tomon siljib borish vaziyati L o'zgarishi bilan potensial taqsimoti ham o'zgaradi. 7 a va b rasmlarda potensial taqsimotning zaryad kengligi d va istokkacha siljish masofasi L ga bog'lanishi keltirilgan.

7.a rasmdan ko'rinish turibdiki, d ning 25 nm ga teng bo'lgan qiymatida potensial taqsimoti eng yuqori qiymatni qabul qilgan. 7.b rasmda esa lokal zaryadning istok tomon siljib borish masofasi L ning 17,4 nm qiymatida potensial taqsimoti eng yuqori qiymatga erishgan.



a)



b)

7-rasm. a) Lokal zaryadning istok tomon siljib borish vaziyati L ni potensial taqsimotiga ta'siri. b) Lokal zaryad kengligi d ning potensial taqsimotiga ta'siri.

Bundan shuni xulosa qilishimiz mumkinki lokal zaryad kengligi $d=25$ nmga teng bo'lganda va lokal zaryadning istok tomon siljib borish masofasi $L=17,4$ nm bo'lganda SS eng kichik qiymatlarga erishadi.

V. XULOSA

Modellashtirish natijalari shuni ko'rsatadiki, oksid qatlamidagi lokal zaryad kengligining o'zgarishida va kanal bo'ylab istok tomon siljib borishi turli vaziyatlarida olingan yon stok-kanal o'tish toklari VAX ga ta'sir qiladi. Bu esa o'z navbatida bo'sag'adan past o'tish xarakteristikasi qiyaligi (SS) ning o'zgarishiga olib keladi. Olingan natijalar d ning 25 nm ga teng bo'lgan qiymatida va L ning 17,4 nm ga teng bo'lgan qiymatlarida SS ning eng kichik bo'lishligini ko'rsatdi. SS ning eng kichik qiymatlarida yon o'tish stok-kanal toklari eng katta qiymatlarni qabul qiladi. Bu 4 va 5-rasmlardagi natijalarda ko'rsatib o'tilgan. Biz bu orqali oksid qatlamda qamralgan lokal

zaryadning vaziyatini aniqlash bo'yicha diagnostika xulosalarini chiqarishimiz mumkin.

ADABIYOTLAR

- [1] Nobrega, R.; Fonseca, Y.; A Costa, R.; Duarte, U. Comparative Study on the Performance of Silicon and III-V Nanowire Gate-All-Around Field-Effect Transistors for Different Gate Oxides. // In Proceedings of the XIII Workshop on Semiconductors and Micro & Nano Technology, São Bernardo do Campo, Brazil, 19–20 April 2018.
- [2] Pratap, Y.; Gautam, R.; Haldar, S.; Gupta, R.; Gupta, M. Physics-based drain current modeling of gate-all-around junctionless nanowire twin-gate transistor (JN-TGT) for digital applications. // J. Comput. Electron. **2016**, 15, 492–501.
- [3] Kumar, P.; Singh, S.; Singh, N.P.; Modi, B.; Gupta, N. Germanium v/s silicon Gate-all-around junctionless nanowire transistor. // In Proceedings of the 2014 2nd International

Conference on Devices, Circuits and Systems (ICDCS), Combiatore, India, 6–8 March 2014; pp. 1–5.

[4] Bharti, S.; Saini, G. Sensitivity Analysis of Junctionless FinFET for Analog Applications. // In Proceedings of the 2018 Second International Conference on Intelligent Computing and Control Systems (ICICCS), Madurai, India, 14–15 June 2018; pp. 1288–1293.

[5] Han, M.H.; Chang, C.Y.; Chen, H.B.; Cheng, Y.C.; Wu, Y.C. Device and circuit performance estimation of junctionless bulk FinFETs. IEEE Trans. // Electron. Devices **2013**, 60, 1807–1813.

[6] Barraud S., Berthomé M., Coquand R., Cassé M., Ernst T., Samson M.P., Perreau P., Bourdelle K. K., Faynot O. and Poiroux T. Scaling of Trigate Junctionless Nanowire MOSFET with Gate Length Down to 13 nm // 2012. IEEE Electron Device Letters. vol. 33. no. 9. pp.1225-1227.

Mualliflar haqida ma'lumot

1. Karimov Ibroximjon – f.-m.f.d., professor, Andijon davlat universiteti, Kondensirlangan muhitlar fizikasi kafedrası professori. Tel.: +99890-060-75-75;

2. Foziljonov Mirzabaxrom – Andijon davlat universiteti, Umumiy fizika kafedrası, o'qituvchisi, f.-m.f.d. PhD., E-mail: foziljonov.mirzabaxrom.1991@gmail.com Tel.: +99899-903-70-09;

ПРИМЕСНЫЙ ТЕПЛОФОТОВОЛЬТАИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ $p\text{Si-nSi}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$)-СТРУКТУРАХ

Х.М. Мадаминов¹, А.А. Абдурахмонов², А.Ш. Икромов¹, Г.С. Холйигитова³

¹Андижанский государственный университет, Узбекистан, 170100, г. Андижан, ул. Университетская, 129.

²Ферганский государственный университет, Узбекистан, 1501000, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19.

³Андижанский государственный технический институт, Узбекистан, 170019, г. Андижан, ул. Бабуршаха, 56.

Получено 25 октября 2025 г.; принято к публикации 23 ноября 2025 г

Аннотация. В статье установлено, что в кремниевых структурах типа $p\text{Si-nSi}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$), легированных изовалентной примесью олова, совместное воздействие температурного фактора и оптического облучения приводит к интенсификации тепло- и фотогенерации неравновесных электронно-дырочных пар в примесной области поглощения. Указанный механизм обуславливает расширение спектральной области чувствительности в длинноволновую часть спектра. В дальнейшем это создает предпосылки для реализации примесного теплофотовольтаического эффекта, проявляющегося при равенстве скоростей тепло- и фотогенерации электронов и дырок.

Ключевые слова: генерационно-рекомбинационные процессы, ширина запрещенной зоны, уровень Ферми, энергетический уровень, эффективная масса, фототок, примесный теплофотовольтаический эффект.

Annotatsiya. Maqolada, izovalent qalay (Sn) kirishma legirlangan $p\text{-Si-nSi}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$) turidagi kremniyli tuzilmalarida harorat omili hamda optik nurlanishning birgalikdagi ta'siri kirishmaviy yutilish sohasida muvozanatdan chiqqan elektron-kovak juftlarining issiqlik va fotogeneratsiya jarayonlarini jadallashtirishi aniqlagan. Mazkur mexanizm spektral sezgirlik sohasining spektrning uzun to'liq qismi tomon kengayishiga olib keladi. Natijada, elektronlar va kovaklarning issiqlik va foto-generatsiya tezliklari o'zaro tenglashgan holatda namoyon bo'ladigan kirishmaviy issiqlik fotovoltayik effektini amalga oshirish uchun qulay shart-sharoitlar shakllanadi.

Kalit so'zlar: generatsion-rekombinatsion jarayonlar, ta'qiqlangan soha kengligi, energetik sath, effektiv massa, Fermi sathi, fototok, kirishmaviy issiqlik fotovoltayik effekti.

Annotation. I paper it has been established that in silicon structures of the type $p\text{Si-nSi}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$), doped with isovalent tin impurities, the combined action of temperature and optical irradiation leads to an intensification of thermal and photo-generation of nonequilibrium electron-hole pairs in the impurity absorption region. This mechanism results in an expansion of the spectral sensitivity toward the long-wavelength region of the spectrum. Subsequently, this creates favorable conditions for the realization of the impurity thermo-photovoltaic effect, which manifests itself when the rates of thermal and photo-generation of electrons and holes become equal.

Key words: generation-recombination processes, band gap, Fermi level, energy level, the effective mass, the photocurrent, impurity thermal photovoltaic effect.

I. ВВЕДЕНИЕ.

Как известно, фотоэлектрические исследования представляют собой эффективный инструмент получения фундаментальной информации о механизмах генерационно-рекомбинационных процессов носителей заряда в полупроводниках. Эти процессы обусловлены не только энергетическим положением примесных уровней, но и их концентрацией, а также в значительной степени зависят от величины ширины запрещенной зоны твердого раствора $\text{Si}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$). Ширина запрещенной зоны является одним из ключевых фундаментальных параметров полупроводниковых материалов [1]. Определение её значения позволяет осуществлять обоснованный прогноз основных эксплуатационных и

функциональных характеристик полупроводниковых приборов [2].

С учётом изложенных выше положений в настоящей работе были сформулированы следующие цели исследования:

- определение ширины запрещенной зоны твердого раствора $\text{Si}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$);
- установление положения уровня Ферми в твердом растворе $\text{Si}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$);
- определение энергетического положения примесного уровня Sn в запрещенной зоне твердого раствора $\text{Si}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$);
- построение энергетической зонной диаграммы структуры $p\text{-Si-n-Si}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$) с изовалентными примесями Sn на

основе результатов фотоэлектрических исследований.

II. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ.

Для оценки ширины запрещенной зоны были исследованы спектральные зависимости фототока $pSi-nSi_{1-x}Sn_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$)- структур полученной методом жидкофазной эпитаксии в широком спектральном диапазоне энергий фотонов (E_{ph}). С этой целью, также были исследованы контрольные образцы - стандартные $pSi-nSi$ -структуры, без примеси Sn.

При исследовании к структурам создавались омические контакты, методом вакуумного напыления серебра - сплошные (1) с тыльной стороны и полосатые (2) из серебра со стороны эпитаксиального слоя (рис. 1). Спектральные зависимости фототока исследовались на установке с призмным монохроматором фирмы CARL ZEISS JENA (Германия). Источником светового излучения служила галогеновая лампа накаливания мощностью 100 Вт.

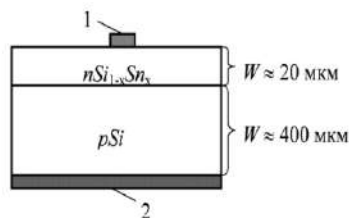


Рис. 1. Схема $pSi-nSi_{1-x}Sn_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$)

Из экспериментальной зависимости спектра фототока, приведенной на рис. 2 видно, что край изменения фототока $pSi-nSi_{1-x}Sn_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$)- структуры (кривая 1, рис. 2) сдвинут в длинноволновую сторону по сравнению с контрольной $pSi-nSi$ -структурой (кривая 2, рис. 2).

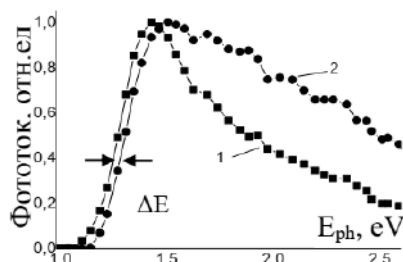


Рис. 2. Спектральные зависимости фототока $pSi-Si_{1-x}Sn_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$)-структур

а основе сдвига фототока $pSi-nSi_{1-x}Sn_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$)-структуры в длинноволновую сторону спектра излучения по сравнению с кремниевой структурой мы оценили ширину запрещенной зоны твердого раствора, которая составляла $E_{gSiSn} = E_{gSi} - E = 1.16 - 0.1 = 1.06$ эВ. Определенная нами значения E_{gSiSn} хорошо согласуется с результатами, определенные с помощью первопринципными методами [3-4] и законом Вегарда [5] (табл. 1).

Таблица 1.

Зависимость ширины запрещенной зоны от концентрации олова

x, %	E_{gSiSn} , эВ	
	[3-4]	[5]
0	1.16	-
1.5	1.13	-
3	1.10	1.11
6	1.04	1.041

Известно, что в невырожденных полупроводниках величина ширины запрещенной зоны находится в тесной взаимосвязи с положением уровня Ферми. Для количественной оценки положения уровня Ферми в исследуемых образцах воспользуемся соотношениями, приведёнными в работе [1]. В предположении, что электроны в зоне проводимости подчиняются статистике Максвелла–Больцмана, положение уровня Ферми может быть определено через концентрацию электронов следующим образом:

$$n = \int_{E_c}^{\infty} N(E) f(E, T) dE = \int_{E_c}^{\infty} N(E) e^{-\frac{E-F}{kT}} dE = N_c e^{-\frac{E_c-F}{kT}} \quad (1)$$

где N_c – эффективная плотность состояний в зоне проводимости:

$$N_c = 2 \cdot \left(\frac{2\pi m_n^* kT}{h^2} \right)^{3/2} = 2,5 \cdot 10^{19} \cdot \left(\frac{m_n^*}{m} \right)^{3/2} \times \left(\frac{T}{300} \right)^{3/2} = 2,8 \cdot 10^{19} \left(\frac{T}{300} \right)^{3/2} \quad (2)$$

Здесь m_n^* – эффективная масса электрона в зоне проводимости - $m_n^* = 0.33m$ [1].

Используя значения концентрации основных носителей n равную 10^{17} см^{-3} , определенную с помощью Холловских измерений, мы можем определить положение уровня Ферми в твердом

растворе $n\text{Si}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$) из соотношения:

$$F = E_c - kT \ln \left(\frac{N_c}{n} \right) \approx E_c - 0.145 \text{ эВ}. \quad (3)$$

Спад фототока $p\text{Si}-n\text{Si}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$)-структуры в коротковолновой области спектра излучения обусловлен глубиной залегания разделяющего р-п-перехода, в нашем случае она составляет 20 мкм. Когда длина диффузии неосновных носителей меньше, чем глубины залегания р-п-перехода, то электронно-дырочные пары, генерированные высокоэнергичными фотонами, в приповерхностной области структуры не доходят до разделяющего барьера и не участвуют в создании фототока, что приводит к спаду фоточувствительности структуры [6]. Спад фототока $p\text{Si}-n\text{Si}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$)-структуры в коротковолновой области спектра с энергией фотонов $E_{ph} > 1.6$ эВ сильнее, чем контрольных $p\text{Si}-n\text{Si}$ -структур. Это, обусловлено тем, что длина диффузии неосновных носителей в твердом растворе $n\text{Si}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$) меньше, чем в $n\text{Si}$ материале.

III. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ.

Известно, что генерационно-рекомбинационные процессы носителей в полупроводниках связаны не только положением энергетических уровней примесей, но и с их концентрацией, которая в свою очередь сильно зависит от температуры.

Для проверки вышесказанного были исследованы температурные зависимости фототока $p\text{Si}-n\text{Si}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$)-структур в широком спектральном диапазоне энергии фотонов. На рис. 3 показаны зависимости относительного прироста фототока, определяемые как отношение значений фототока при различных температурах ($J_{ph}(T)$) к его значению при комнатной температуре ($J_{ph}(300 \text{ K})$) от энергии фотонов, падающих на образец.

Из рис. 3 видно, что когда энергия фотонов $E_{ph} > E_{g,\text{SiSn}}$, в собственной области поглощения, фототок практически не зависит от температуры. Когда $E_{ph} < E_{g,\text{SiSn}}$, в примесной области поглощения фототок сильно зависит от температуры. С ростом

температуры наблюдается монотонный рост фототока в примесной области поглощения, причем максимальный прирост фототока наблюдается при $E_{ph} \approx 1.01$ эВ. При достижении температуры $T = 363 \text{ K}$ максимальный относительный прирост фототока составляет $J_{ph}(T)/J_{ph}(300 \text{ K}) = 4.3$, что является существенным и свидетельствует о возникновении примесного теплофотовольтаического эффекта в исследуемых образцах с участием уровня Sn.

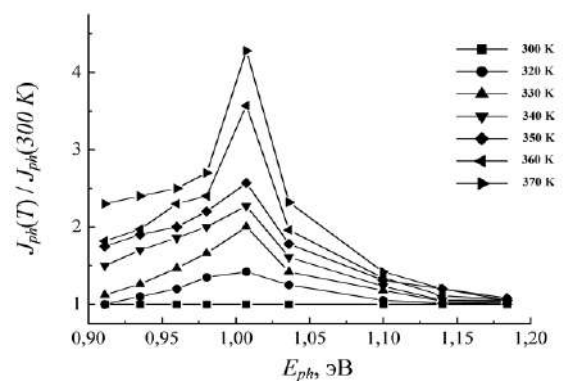


Рис. 3. Спектральные зависимости относительного прироста фототока $J_{ph}(T)/J_{ph}(300 \text{ K})$ $p\text{Si}-n\text{Si}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$)-структур при различных температур

Для объяснения механизмов процессов протекающих в исследованных структурах, при одновременном воздействии тепло- и фотогенерации нами была построена энергетическая зонная диаграмма (рис. 4).

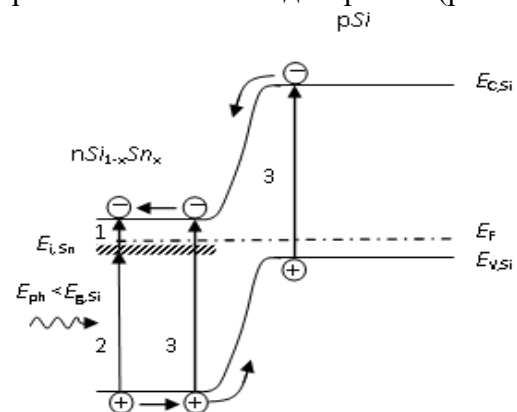


Рис. 4. Энергетическая зонная диаграмма $p\text{Si}-n\text{Si}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($0 \leq x \leq 0.04$)-структуры.

Согласно этому, повышение прироста фототока с ростом температуры в примесной области поглощения, можно

считать, обусловлено увеличением скорости тепловой генерации неравновесных электронов Δn_i за счет перехода электронов с примесных уровней в зону проводимости, как это показано на рис. 4 (переход 1). Тепловая генерация электронов с примесных уровней, ионизируя комплексы Si-Sn, способствует электронным переходам из валентной зоны на примесный уровень, которые происходят под воздействием фотонов с энергией $E_{ph} < E_{g, Si}$ (переход 2 на рис. 4). В результате таких электронных переходов в валентной зоне генерируются неравновесные дырки. Поскольку максимальный прирост фототока наблюдается при $E_{ph} \approx 1.01$ eV, следовательно, Sn-Si связь в твердом растворе $Si_{1-x}Sn_x$, по-видимому, образует энергетический уровень, расположенной на $E_i \approx 1.01$ eV выше потолка валентной зоны кремния. Однако при температурах до 363 K скорость тепловой генерации электронов (G_n) с примесных уровней будет меньше, чем скорость фотогенерации дырок (G_p); $G_n < G_p$, так как на кривых 1–7 рис. 3 отсутствует насыщения по температуре и, следовательно, теплофотовольтаический ток в примесной области поглощения в интервале температур до 363 K будет определяться, в основном, скоростью тепловой генерации электронов - G_n .

Решающим условием для полноты проявления примесного теплофотовольтаического эффекта является равенство скоростей тепло- и фотогенерации электронов и дырок: $G_n = G_p$, которое может происходить при повышении температуры.

Исследования спектральных зависимостей фототока $pSi-nSi_{1-x}Sn_x (0 \leq x \leq 0.04)$ -структур в широком спектральном диапазоне энергий фотонов (E_{ph}) и температурной зависимости спектров фототока образцов позволили определить, что энергетический уровень Sn находится в запрещенной зоне твердого раствора $Si_{1-x}Sn_x$, ниже 0.15 эВ от дна зоны проводимости, которая полностью совпадает с [7] литературными данными. Согласно [7], примеси олова в Si создают энергетический уровень в запрещенной зоне с энергией ионизации $E \leq 0.25$ эВ.

Определенная нами значения ширины запрещенной зоны твердого раствора составляла $E_{g, SiSn} = 1.06$ эВ, хорошо согласуется с результатами других авторов. На основе этих результатов фотоэлектрических исследований построена энергетическая зонная диаграмма $pSi-nSi_{1-x}Sn_x (0 \leq x \leq 0.04)$ структуры.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЯ.

В кремниевых структурах с изовалентными примесями Sn совместное влияние температуры и освещения способствует тепло- и фотогенерации неравновесных электронно-дырочных пар в примесной области поглощения и расширяет спектральную область чувствительности в длинноволновую сторону.

Таким образом, изученная структура имеет высокую инфракрасную чувствительность, вследствие которой может быть использована как активным элементом для индикаторов ИК-излучения в ночном наблюдении [8], для ИК-термометров [9] и для биосенсорных приборов.

ЛИТЕРАТУРА

1. P.Y. Yu and M.Cardona. Fundamentals of Semiconductors: Physics and Materials Properties, Springer, 2005, p. 206.
2. D.K. Schroder. Semiconductor Material and Device Characterization. John Wiley and Sons, 2006, p. 489.
3. F. Tran and P. Blaha. Phys. Rev. Lett. 2009, 102(22), 226401.
4. D.J. Singh. Phys. Rev. B. 2010, 82(20), 205102.
5. A.R. Denton and N.W. Ashcroft. Phys. Rev. A. 1991, 43(6), 3161.
6. С.З. Зайнабидинов, Х.М. Мадаминов. Петербургский журнал электроники. 2017, №4, С. 8-13.
7. М.К. Бахадирханов, И.Б. Ортиков. Малый энциклопедический справочник по полупроводниковым материалам. Ташкент. 2006, С.199.
8. Х.М.Мадаминов. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2021, № 2, С. 71–84.
9. Х.М.Мадаминов. Прикладная физика. 2021. № 1. С. 63-68.

Mualliflar haqida ma'lumot

1. Madaminov Xurshidjon Muxamedovich - Z.M. Bobur nomidagi Andijon davlat universiteti Kondensirlangan muhitlar fizikasi kafedrasida dotsenti, f.-m.f.n., khurmad@mail.ru, (93)-259-05-29;

2. Abduraxmonov Azizbek Abduraxim o'g'li - Farg'ona davlat universiteti, Fizika kafedrasida tayanch doktoranti, e-mail: fizikamatematikaazizbek7@gmail.com, tel.: +99893-983-15-45;

3. Ikromov Avazbek Shoyatbek o'g'li - Z.M. Bobur nomidagi Andijon davlat universiteti Kondensirlangan muhitlar fizikasi kafedrasida tayanch doktoranti, avazbekikromov5758@gmail.com, (93)-788-57-58;

4. Xolyigitova Gulxayot Sulaymanovna - Andijon davlat texnika instituti Materialshunoslik kafedrasida o'qituvchisi, e-mail: gulhayot2012@gmail.com, tel.: +99850-714-30-00.



SCIENTIFIC BULLETIN
PHYSICAL AND
MATHEMATICAL RESEARCH

ILMIY XABARNOMA
FIZIKA-MATEMATIKA
TADQIQOTLARI

2025
VOLUME 7
ISSUE 4

ЗАХИРИДДИН
МУҲАММАД БОБУР
НОМИДАГИ АНДИЖОН
ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ANDIJAN STATE
UNIVERSITY NAMED
AFTER ZAKHIRIDDIN
MUKHAMMAD BABUR

ИЛМИЙ ХАБАРНОМА

Физика-математика
тадқиқотлари

SCIENTIFIC BULLETIN

Physical and
Mathematical Research

2025/№4(7)

Андижон
2025йил

Муассис

Захириддин Мухаммад Бобур
номидаги Андижон давлат
университети

ИЛМИЙ ХАБАРНОМА. ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ТАДҚИҚОТЛАРИ

Журнал бир йилда 4 марта чоп этилади.

Андижон вилояти ахборот ва оммавий
коммуникациялар бошқармаси
томонидан 2019-йил 26 декабрда
0452 рақам билан рўйхатга олинган.

Нашр индекси: 344

Нашр учун масъул:
Н.И. Юнусалиев

Босишга рухсат этилди: 27.12.2019.
Қоғоз бичими: 60x81 1/8 Босма табоғи:
13,5

Офсет босма. Офсет қоғози.
Адади: 110 дона.

Баҳоси келишилган нархда.
Буюртма №: 165.

“Муҳаррир” нашриёти матбаа бўлимида
чоп этилди.
Тошкент шаҳри, Сўғалли ота кўчаси 7-уй

Таҳририят манзили:

170100, Андижон шаҳри, Университет
кўчаси, 129. Телефон: +998911602043.
Факс: (374) 223-88-30

E-mail: adu_xabarnoma@mail.ru

Расмий сайт: <https://asujournal.uz/>

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ РЕДКОЛЛЕГИИ

Зайнобидинов Сирожиддин –
доктор физико-математических
наук (DSc), профессор, академик
Академии наук Республики
Узбекистан.

ЗАМЕСТИТЕЛЬ ПРЕДСЕДАТЕЛЯ РЕДКОЛЛЕГИИ

Акбаралиев Бахтиёр Бакирович
– доктор технических наук (DSc),
профессор, ректор Андижанского
государственного университета
имени З. М. Бобура.

ФИЗИКА

**Утамурадова Шарифа
Бекмурадовна** – доктор физико-
математических наук (DSc),
профессор, директор Научно-
исследовательского института
физики полупроводников и
микроэлектроники при
Национальном университете
Узбекистана имени Мирзо
Улугбека.

**Маматкаримов Одилжон
Охундедаевич** – доктор физико-
математических наук (DSc),
профессор, ректор
Наманганского инженерно-
технологического института.

Олимов Хусниддин Косимович –
доктор физико-математических
наук (DSc), профессор, директор
Физико-технического института
НПО «Физика-Солнце» Академии
наук Республики Узбекистан.

Каримов Иброхим Набиевич –
доктор физико-математических
наук (DSc), профессор, профессор
кафедры физики Андижанского
государственного университета
имени З. М. Бобура.

**Тургунов Нозимжон
Абдуманнопович** – доктор
физико-математических наук
(DSc), профессор, заместитель
директора Научно-
исследовательского института
физики полупроводников и

микроэлектроники при
Национальном университете
Узбекистана имени Мирзо
Улугбека.

**Исмаилов Канатбай
Абдреймович** – доктор физико-
математических наук, профессор
Каракалпакского
государственного университета.

Каражанов Смагул – доктор
физико-математических наук
(DSc), старший научный
сотрудник отдела солнечной
энергетики Института
энергетических технологий,
Кьеллер, Норвегия.

**Рембеза Екатерина
Станиславовна** – доктор физико-
математических наук (DSc),
профессор Воронежского
государственного университета.

Вайткус Юозас Юозович – доктор
физико-математических наук
(DSc), профессор, академик
Академии наук Литвы.

Абдужабборов Ахмаджон –
доктор физико-математических
наук (DSc), профессор, главный
научный сотрудник Института
астрономии Академии наук
Республики Узбекистан.

Бобоев Акрамжон Йулдашбоевич
– доктор физико-математических
наук (DSc), декан физико-
технического факультета
Андижанского государственного
университета имени З. М. Бобура.

Курбанов Азизжон Обитжонович
– кандидат физико-
математических наук, доцент
Андижанского государственного
университета имени З. М. Бобура.

**Мадаминов Хуршиджон
Мухамедович** – кандидат физико-
математических наук, доцент
Андижанского государственного
университета имени З. М. Бобура.

ТЕХНИКА

**Мамадалимов Абдугафур
Тишабаевич** – доктор физико-
математических наук (DSc),
профессор, академик Академии

наук Республики Узбекистан.

Содилов Илхом Исмаилович –
доктор физико-математических
наук (DSc), профессор, директор
Института ядерной физики
Академии наук Республики
Узбекистан.

Ашуров Хотам Бахронович –
доктор технических наук (DSc),
профессор, директор Института
ионно-плазменных и лазерных
технологий имени У. А. Арифова
Академии наук Республики
Узбекистан.

Далиев Хожакбар Султанович –
доктор физико-математических
наук (DSc), профессор, директор
Ташкентского филиала
Национального
исследовательского
университета «МЭИ».

Алиев Раимжон Усмонович –
доктор технических наук (DSc),
профессор Андижанского
государственного университета
имени З. М. Бобура.

Юлдашев Носиржон Хайдарович
– доктор технических наук (DSc),
профессор Ферганского
политехнического института.

**Касимахунова Анора
Мамасодиловна** – доктор
технических наук (DSc),
профессор Ферганского
государственного университета.

Тагаев Марат Баймуратович –
доктор технических наук (DSc),
профессор Каракалпакского
государственного университета
имени Бердаха.

Мансуров Хатамжон Жураевич –
кандидат физико-
математических наук, доцент,
декан физического факультета
Андижанского государственного
университета имени З. М. Бобура.

МАТЕМАТИКА

**Арзикулов Фарходжон
Неъматович** – доктор физико-
математических наук, профессор
Андижанского государственного
университета имени З. М. Бобура.

Кайгородов Иван – доктор физико-математических наук, профессор Университета Бейра Интериор, Ковильян, Португалия.

Xabier Garcia Martinez – профессор кафедры математики Университета Виго, Виго, Испания.

Каримжанов Икболжон

Абдулазизович – PhD по физико-математическим наукам, доцент, проректор Андижанского государственного университета.

Ибайдуллаев Туланбой

Турсунбоевич – кандидат физико-математических наук, доцент, декан математического факультета Андижанского государственного университета имени З. М. Бобура.

Умрзаков Нодирбек

Мухаммадович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой алгебры Андижанского государственного университета имени З. М. Бобура.

ИНФОРМАТИКА

Расулов Акбарали Махаматович – доктор физико-математических наук (DSc), Ферганский филиал

Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразми.

Махкамов Мадаминжон

Комилович – кандидат физико-математических наук, доцент, проректор Андижанского государственного университета имени З. М. Бобура.

Худойбергенов Мирзоали

Уразалиевич – доктор физико-математических наук (DSc), профессор, заведующий кафедрой Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Абдурахманов Жамолидин

Комолдинович – кандидат физико-математических наук, доцент Андижанского государственного университета.

РЕДАКТОР

Юнусалиев Нуритдин Юнусали
угли – PhD по физико-математическим наукам, Андижанский государственный университет.

TOR ZONALI KVANT O'RANING O'TKAZUVCHAN ZONA TUBIDAGI ERKIN ELEKTRONLAR ENERGIYASIGA MAGNIT MAYDON TA'SIRI

M.G'. Dadamirzayev

Namangan davlat texnika universiteti, Namangan sh, I.Karimov ko'chasi 12-uy

2025-yil 30-noyabrda qabul qilingan; 2025-yil 10-dekabrda nashrga qabul qilingan

Annotatsiya. Ushbu maqolada tor zonali kvant o'ralarda erkin elektronlarning energiyasining magnit maydonga bog'liqligini nazariy jihatdan o'rganilgan. Tadqiqotda kvantlovchi magnit maydon ta'sirida Landau sathlarining hosil bo'lishi va ularning elektronlarning energetik holatlariga ta'siri nazariy jihatdan tahlil qilingan. Uch zonali yaqinlashish modeli asosida tor zonali kvant o'ralar uchun yangi energiya tenglamasi hosil qilinib, u orqali elektron energiyasining magnit maydon kuchiga nochiziqli bog'liqligi aniqlangan.

Kalit so'zlar: kvant o'ra, tor zonali yarimo'tkazgich, magnit maydon, Landau sathlari, energiya relaksatsiyasi, dispersiya qonuni, nanoelektronika.

Аннотация. В данной статье теоретически исследована зависимость энергии свободных электронов от магнитного поля в узкозонных квантовых ямах. В исследовании теоретически проанализировано образование уровней Ландау под воздействием квантующего магнитного поля и их влияние на энергетические состояния электронов. На основе трёхзонной модели приближения выведено новое уравнение энергии для узкозонных квантовых ям, с помощью которого установлена нелинейная зависимость энергии электронов от величины магнитного поля.

Ключевые слова: квантовая яма, узкозонный полупроводник, магнитное поле, уровни Ландау, релаксация энергии, закон дисперсии, нанoelektronika.

Annotation. In this article, the dependence of free electron energy on the magnetic field in narrow-band quantum wells has been theoretically investigated. The study theoretically analyzes the formation of Landau levels under the influence of a quantizing magnetic field and their effect on the electronic energy states. Based on a three-band approximation model, a new energy equation for narrow-band quantum wells has been derived, through which the nonlinear dependence of electron energy on the strength of the magnetic field has been determined.

Key words: quantum well, narrow-band semiconductor, magnetic field, Landau levels, energy relaxation, dispersion law, nanoelectronics.

Kirish. Jaxonda kvant o'lchamli tizimlar - kvant quduqlar, kvant simlar va kvant nuqtalar asosidagi strukturalar nanoelektronika, spintronika va optoelektronika sohalarining fundamental yangi ilmiy-texnikaviy yechimlarini ishlab chiqishga yo'naltirilgan ilmiy-tadqiqot ishlari olib borilmoqda. Kvantlovchi magnit maydondagi kichik va xajmiy yarimo'tkazgichli tuzilmalarda Landau sathlarining kengayishi va ularning harorat bilan so'nishi elektr va optik xususiyatlarini belgilaydi.

Respublikamizda ilm-fan sohasida, hususan yarimo'tkazgichlar fizikasining rivojlanishiga, jumladan, tashqi ta'sirga sezuvchanligi yuqori bo'lgan, tenzosezgir, fotosezgir va termosezgir yarimo'tkazgichli strukturalarni olish texnologiyalariga katta e'tibor qaratilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4997-sonli «O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha Harakatlar strategiyasi to'g'risida» gi farmoni asosida yarimo'tkazgichlar fizikasi sohasidagi fundamental izlanishlar natijasida yangi texnologiyalarni joriy etish orqali mikro va nanoelektronika sohasini yanada rivojlantirish

bo'yicha muhim vazifalar belgilab berilgan. Ushbu vazifalarni amalga oshirishda, jumladan, ikki o'lchamli holatlar zichligini tashqi omillar ta'siriga bo'liqligini chuqur o'rganish, yangi avlod tranzistorlari samaradorligini oshirish, kvant sensori (magnit maydon, harorat va bosim sezgir detektorlar) yaratish, hamda deformatsiyaga sezgir nanodatchiklarni ishlab chiqishning fundamental nazariyalarini takomillashtirish muhim ahamiyat kasb etadi.

Adabiyotlar tahlili. Kvantlovchi magnit maydonning qo'llanilishi kvant o'radagi ikki o'lchovli elektron quyi zonalarining Landau sathlarining diskret to'plamiga bo'linishiga olib keladi. Bu quyi zonalararo elektron relaksatsiya mexanizmining sezilarli o'zgarishiga olib keladi [1-6].

[1] ishda kvant o'ralardagi Landau sathlarida energiya relaksatsiyasi mexanizmlari o'rganilgan. Kvantlovchi magnit maydon ta'sirida ikki o'lchovli elektron quyizonalari diskret Landau sathlariga ajralishi va bu holat elektronlar orasidagi ichki zona kinetikasini sezilarli darajada o'zgartirishi aniqlangan. Tadqiqotda elektron-elektron va elektron-fonon o'zaro ta'sirlarining energiya

relaksatsiyasi jarayonlariga ta'siri ko'rib chiqilgan. Tadqiqotda quyizonalar energiya relaksatsiyasi ikkita bosqichdan iboratligi ko'rsatilgan. Birinchi bosqichda, elektronlar o'zaro to'qnashuvlar orqali tezda termalizatsiyalanadi va kvazi-Boltsman taqsimoti shakllanadi. Keyingi bosqichda, optik fononlar nurlanishi natijasida sekin energiya relaksatsiyasi sodir bo'ladi. Elektron-elektron to'qnashuvlari relaksatsiyaning asosiy omili sifatida aniqlangan va bu jarayon Landau sathlari bo'ylab elektronlarning energiya taqsimotini o'zgartiradi. Tadqiqot Landau sathlari kinetikasi bo'yicha ko'plab yangi nazariy va amaliy tushunchalarni taklif qiladi, bu kvant o'ra asosida ishlovchi moslamalarni optimallashtirishda qo'llanilishi mumkin. Ushbu natijalar kvant zarralari fizikasi va nanoelektronika sohalarida ahamiyatlidir.

Taxlil va natijalar. Tor zonali kvant o'raning o'tkazuvchanlik zonasi tubidagi erkin elektronlar energiyasini magnit maydonga bog'liqligini ko'rib chiqaylik.

Ushbu masala uch zonali yaqinlashish asosida tenglamalar yechiladi. Bu yaqinlashish tor zonali kvant o'rali yarimo'tkazgichlar uchun tenglamani qulay yechimini topish hisoblanadi. Ko'rib chiqilayotgan yaqinlashishda $H_{k\pm}$ va H_1 yordamida 8×8 o'zaro ta'sir matritsasini quyidagicha yozish mumkin [7].

$$\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \quad (1)$$

Bu yerda

$$H = \begin{pmatrix} E_c & 0 & kP & 0 \\ 0 & E_v - \frac{\Delta}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3}\Delta & 0 \\ kP & \frac{\sqrt{2}}{3}\Delta & E_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_v + \frac{\Delta}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} iS\uparrow \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(X+iY)\downarrow \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(X-iY)\downarrow \end{matrix} \quad (2)$$

(2) matritsadagi o'ng tomondagi ustun H bilan bog'langan energetik holatlarni ifodalaydi.

Agar boshlang'ich energiyani kvant o'raning o'tkazuvchanlik zonasi tubi bilan hisoblasak, ($E_c=0$), u holda quyidagi tenglamaga erishiladi:

$$(E' + E_g)(E'(E' + E_g)(E' + E_g + \Delta) - k^2 P^2 (E' + E_g + 2\Delta/3)) \quad (3)$$

Bu yerda,

$$E'(k) = E(k) - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0};$$

(3) formuladan ma'lumki, $k=0$ uchun $E'(k)$ funksiyaning to'rtta o'ziga hos qiymati mavjud: $E_1=0$; $E_2=E_3=-E_g$; va $E_4=-E_g-\Delta$. $E_1=0$ sharti – bu sanoq boshi o'tkazuvchanlik zonasi tubidan boshlanishini bildiradi. E_2 va E_3 energiyalar esa og'ir (E_{v1}) va yengil (E_{v2}) kovaklarning valentlik zonalarining shiplarini anglatadi. E_4 energiya-valentlik zonasi shiplariga spin orbital ta'sirini ko'rsatadi.

Ma'lumki, tor zonali yarimo'tkazgichlar uchun $m_n < m_0$ shartdan foydalanib, (3) da keltirilgan

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \text{ hadni hisobga olinmaydi } (E' \ll E_g). \text{ U}$$

holda, magnit maydon mavjud bo'lganda, (3) tenglamaga o'xshash uchta energiya zonalarini uchun energetik sathlarini kubik tenglamasi hosil bo'ladi;

$$E_{N\pm}(E_{N\pm} + E_g)(E_{N\pm} + E_g + \Delta) - P^2 \left[k_z^2 + (2N+1)\frac{1}{L^2} \right]^* \quad (4)$$

$$\left(E_{N\pm} + E_g + \frac{2}{3}\Delta \right) \pm \frac{P^2 \Delta}{3L^2} = 0$$

Bu yerda: $E_{Nk_z\pm} = E_{N\pm}$

(4) da bosh energetik sath o'tkazuvchanlik zonasi tubidan boshlangan. Agar, $B \rightarrow 0$ bo'lganda, (4) tenglama (1) ko'rinishga o'tadi.

Agar, elektronlarning spin taqsimotini hisobga olinmasa hamda $E_N \ll E_g$ shart bajarilsa, (4) dagi kubik tenglama o'tkazuvchanlik zonasi elektronlari uchun quyidagi ko'rinishga ega bo'lgan kvadrat tenglamaga o'tadi:

$$E_{N\pm}(B, E_g) = -\frac{E_g}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{E_g^2 + 4E_g \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c^0 + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_n} \right]} \quad (5)$$

Ma'lumki, kuchli magnit maydon ta'sir etmaganda, erkin elektron energiyasi OZ o'qi bo'ylab o'lchamli kvantlanish hisobiga diskret hisoblandi, lekin XOY tekislikda uzluksiz spektrdan iborat bo'ladi. Yani,

$$E_c^{parab}(k, d) = \frac{P_x^2}{2m_{nx}} + \frac{P_y^2}{2m_{ny}} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_{nz} d^2} n_z^2 \quad (6)$$

(6) ifoda keng zonali kvant o'ralar uchun o'rinli (kvadratik dispersiya qonuni uchun).

(5) formula, hajmiy tor zonali yarimo'tkazgichlarning o'tkazuvchanlik zonasidagi erkin elektronlar energiyasini magnit maydonga bog'liqligini ifodalaydi. Ya'ni, magnit maydon kuchlanganligi Z o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'lib, XOY tekislikka perpendikulyardir. Bunda, zaryad tashuvchilar energiyasi Landau nazaryasiga muvofiq, XOY tekislikda diskret sathlar hosil bo'ladi. OZ o'qi bo'ylab esa, erkin elektron

energiyasi uzluksiz spektrni tashkil etadi. Albatta bu kvant ip analogiyasini beradi. Savol tug'iladi, tor zona kvant o'ra asosidagi yarimo'tkazgichlarda ushbu ilmiy faraz qanday amalga oshadi? Tor zonali kvant o'raning o'rkazuvchanlik zonasidagi erkin elektronlar energiyasi magnit maydonga qanday bog'liq bo'ladi? Kvant o'raning valent zonasidachi?

Tor zonali kvant o'ralar uchun [7] dagi formulani tadbiq etiladi: Yani, $\Delta \ll E_g$ shart bajarilsa

$$E_c^{nonparab}(k) = -\frac{E_g}{2} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{4P^2}{E_g^2} * \frac{2m_{nxyz}}{\hbar^2} * \frac{\hbar^2 k_{xyz}^2}{2m_{nxyz}} \right]^{1/2} \right\} \quad (7)$$

(7) ni tor zonali kvant o'ra uchun quyidagicha yozish mumkin:

$$E_c^{2d,nonparab}(k, d) = -\frac{E_g}{2} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{4P^2}{E_g^2} * \frac{2m_n}{\hbar^2} \left(\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_{nx}} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_{ny}} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_{nz}} n_z^2 \right) \right]^{1/2} \right\} \quad (8)$$

Bu yerda, $P = -\frac{i\hbar}{m_0} < S | \hat{p}_x | X >$.

(6) va (8) formulalar kvadratik hamda kvadratik bo'lmagan dispersiya qonunlari uchun $B=0$ da kvant o'raning o'tkazuvchanlik zonasidagi erkin elektronlar energiyasini ifodalaydi. Agar $B \neq 0$ shart bajarilsa, (6) ifoda quyidagi formulaga o'tadi:

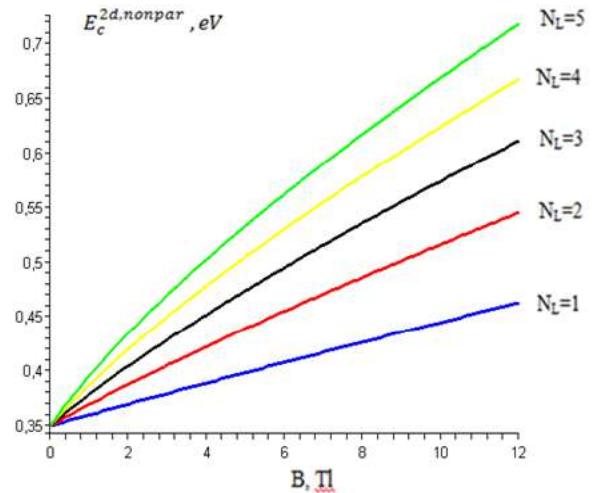
$$E_c^{parab}(B, d) = \left(N_L^c + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c^e + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_n d^2} n_z^2 \quad (9)$$

U holda, (5) da keltirilgan $\frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_n}$ ni o'rniga tor zonali kvant o'ra shartiga muvofiq (Lui de Broyl munosabati, $\lambda_d \approx d$), $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_n d^2} n_z^2$ xadni almashtirilsa, quyidagi ifodaga erishiladi:

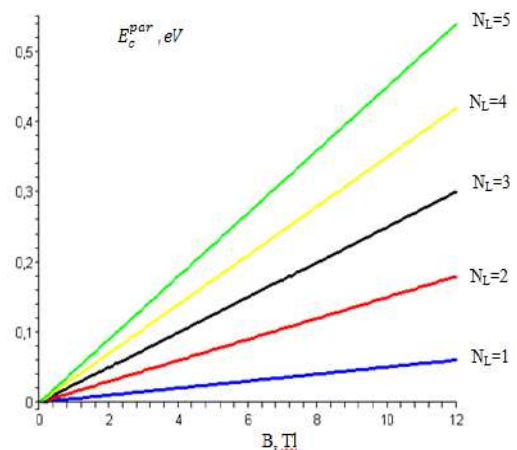
$$E_n^{2d,nonparab}(E_g(B, d), B, d, n_z, N_L^e) = -\frac{E_g(B, d)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(E_g(B, d))^2 + 4E_g(B, d) \left[\left(N_L^e + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c^e + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m d^2} n_z^2 \right]} \quad (10)$$

Ushbu formula, tor zonali kvant o'raning o'tkazuvchanlik zonasidagi erkin elektronlarning energiyasi magnit maydonga bog'liqligini ifodalaydi. Yangi olingan (10) formula muhim hisoblanadi, sababi, shu kunga qadar kvant o'raning ta'qiqlangan zona kengligi qanday bo'lishidan qat'iy nazar $E_N(B, d)$ faqat (9) bo'yicha hisoblangan. Vaholanki, (10) ga ko'ra, E_N energiya B ga nochiziqli bog'langan. Bu yerda, $\omega_c = \frac{eB}{m_n}$;

Keling, (10) formulani tor zonali kvant o'ra asosidagi yarimo'tkazgichlarga tadbiq etaylik. Bu nazariy g'oyani grafik ko'rinishda taxlil qilib ko'raylik. 1-rasmda InAs/AlSb kvant o'rali yarimo'tkazgich uchun o'tkazuvchan zonasidagi erkin elektron energiyasini $E_c^{nonparab}$, B bog'liqligi keltirilgan. Bunda, $E_g(\text{InAs})=0.35$ eV, $d=12$ nm [8-10]. 2-rasmda esa, GaAs/ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}$ /GaAs [11] kvant o'ra uchun $E_c^{parab}(B, d)$ grafigi keltirilgan. Ushbu rasmdan ko'rinib turibdiki, chiziqli va nochiziqli grafiklar dispersiya qonunlariga bo'ysinishi kuzatilmoqda. Bundan tashqari (10) formulaga ko'ra $E_c^{nonparab}(B, d)$ dan tor zonali kvant o'rani qalinligi d ga bog'ligini ham olish mumkin.



1-rasm. InAs/AlSb kvant o'raning o'tkazuvchanlik zonasidagi erkin elektronlar energiyasiga magnit maydonni ta'siri .



2-rasm. GaAs/ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}$ /GaAs kvant o'raning o'tkazuvchanlik zonasidagi erkin elektronlar energiyasiga magnit maydonni ta'siri .

Foydalanilgan adabiytlar:

1. Mityagin Yu.A., Telenkov M.P., Amiri Sh., Nagaraja K.K. Energy relaxation in Landau levels in quantum well structures: Different scenarios of inter-level kinetics // *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*. 2020. Vol.122, pp.114104-114108.
2. Теленков М.П., Митягин Ю.А., Агафонов В. В., Нагараджа К.К. Механизм релаксации энергии в системе уровней Ландау в квантовых ямах // *ЖЭТФ*. 2015. том 102, с.770 -774.
3. Telenkov M.P., Mityagin Yu.A., Doan T.N.V., Nagaraja K.K. Kinetics of intrasubband electron energy relaxation in quantum wells in a quantizing magnetic field // *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*. 2018. Vol.104, pp.007-016.
4. Savic I., Ikonc Z., Milanovic V., Vukmirovic N., Jovanovic V.D., Indjin D., Harrison P. Electron transport in quantum cascade lasers in a magnetic field // *Phys. Rev.* 2006 . Vol.73, pp.075321-075328.
5. Timotijevic, D., Radovanovic, J., Milanovic, V. The role of electron-electron scattering in gain modulation of a mid-infrared quantum cascade laser in strong magnetic field // *Semicond. Sci. Technol.* 2012. Vol.27, pp.045006–045010.
6. Becker C., Vasanelli A. and Sirtori C. Electron–longitudinal optical phonon interaction between Landau levels in semiconductor heterostructures // *Physical review*. 2004. Vol.69, 115328-115333.
7. Цидильковский И.М. Электроны и дырки в полупроводниках. Энергетический спектр и динамика // Издательство «Наука» Главная редакция физико - математической литературы, М., 1972 г. С. 264-266. 640 С.
8. Гулямов Г., Шаробаев Н. Ю. Исследования температурной зависимости ширины запрещенной зоны Si и Ge с помощью модели. // *Физическая инженерия поверхности* 2013, т.11, № 2 с.231-237
9. Gulyamov G., Erkaboev U.I., Sharibaev N.Yu. Simulation of the temperature dependence of the density of states in a strong magnetic field // *Journal of Modern Physics*. - USA. 2014. –Vol. 5, No.8. –pp.680-685.
<https://doi.org/10.4236/jmp.2014.58079>
10. Gulyamov G., Abdulazizov B. T., Baymatov P. J. Three-Band Simulation of the g-Factor of an Electron in an InAs Quantum Well in Strong Magnetic Fields // *Journal of Nanomaterials*. 2021.Vol. 2021, Article ID 5542559, 4 p.
<https://doi.org/10.1155/2021/5542559>
11. Hou-zhi Zheng, Aimin Song, Fu-hua Yang, and Yue-xia Li. Density of states of the two-dimensional electron gas studied by magneto capacitances of biased double – barrier structures // *Physical review B*. 1994. Vol. 49, No.3, pp.1802-1808.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.49.1802>

Muallif haqida ma'lumot

1. **Dadamizayev Muzaffar G'ulomqodirovich** –Namangan davlat texnika universiteti, “Axborot tizimlari va

TEMIR VA NIKEL BILAN LEGIRLANGAN QILINGAN KREMNIY NAMUNALARIDA BO‘LAKLARINING HOSIL BO‘LISHI

S.Z.Zainabidinov¹, N.A.Turgunov², A.Y.Boboev¹, Sh.K.Akbarov¹, N.B.Khaitimmetov²

¹Z. M. Bobur nomidagi Andijon davlat universiteti, O‘zbekiston, 170100, Andijan sh, Universitet ko‘chasi 129 uy

²Scientific Research Institute of Semiconductor Physics and Microelectronics at the National University of Uzbekistan

2025-yil 5-noyabrda berilgan; 2025-yil 29-noyabrda chop etish uchun qabul qilingan.

Annotatsiya. Ushbu maqolada kremniyda temir va nikel bilan aralashib, yuqori haroratli diffuziya qotishmasi orqali aralashma atomlari klasterlarining hosil bo‘lishi jarayonlari ko‘rib chiqiladi. Strukturaviy tadqiqotlar natijalari Shimadzu XRD 6100 rentgen diffraktometri yordamida olindi. Ma‘lum bo‘lishicha, n-Si<Fe> namunalarning hajmida kremniy atomlari, asosiy temirning qotishma aralashmasi hamda kislorod va uglerodning texnologik aralashmalari ishtirokida atomlar to‘planishi aniqlandi, bu esa matritsa materialining tuzilishida sezilarli o‘zgarishga olib keldi. Diffuziya annealingdan so‘ng n-Si<Fe,Ni> namunalarning hajmida asosiy va texnologik iflosliklarning turli atom to‘plamlari hosil bo‘lishi kuzatiladi.

Kalit so‘zlar: kremniy, temir, nikel, rentgen difraksiya tahlili, to‘planishi

Аннотая. В этой статье рассматриваются процессы образования кластеров атомов соединений путём смешивания железа и никеля в кремнии с помощью высокотемпературного диффузионного сплава. Результаты структурных исследований были получены с помощью рентгеновского дифрактометра Shimadzu XRD 6100. Оказалось, что в разрезе образцов n-Si<Fe> обнаружено накопление атомов в присутствии атомов кремния, смеси сплавов базового железа и технологических смесей кислорода и углерода, что привело к значительным изменениям структуры матричного материала. После диффузионного отжига в объёме образцов n-Si<Fe,Ni> наблюдается образование различных атомных наборов основных и технологических примесей.

Ключевые слова: кремний, железо, никель, рентгеновский дифракционный анализ, накопление.

Abstract. In this paper, the processes of formation of clusters of impurity atoms in silicon doped with iron and nickel by high-temperature diffusion alloying are considered. The results of the structural studies were obtained using a Shimadzu XRD 6100 X-ray diffractometer. It was revealed that accumulations of impurity atoms with the participation of silicon atoms, the main alloying admixture of iron, as well as technological admixtures of oxygen and carbon are formed in the volume of n-Si<Fe> samples, which leads to a significant change in the structure of the matrix material. The formation of various accumulations of atoms of basic and technological impurities is also observed in the volume of n-Si<Fe,Ni> samples after diffusion annealing.

Keywords: silicon, iron, nickel, impurity, X-ray diffraction analysis, impurity accumulations.

I. KIRISH. Ma‘lumki, 3D metallarning turli elementlari bilan doplangan kremniyning xususiyatlarini boshqarish yanada tarqalgan tuzilma hosil bo‘lishi va mikro- hamda nanoklasterlar hosil bo‘lishi orqali aniqlanadi [1-4]. Ushbu jarayonda, optimal diffuziya parametrlarini tanlash orqali yarimo‘tkazgich kremniyning fizik-kimyoviy xususiyatlarini sezilarli darajada yaxshilash mumkin. Kremniy hajmiga metallarning kiritilishi, ayniqsa yuqori haroratda diffuziya qotishmasi usuli orqali, kremniy matritsali element atomlarining texnologik atomlari bilan kimyoviy o‘zaro ta‘siriga, shuningdek, ularning tuzilishiga sezilarli ta‘sir ko‘rsatishi mumkin [5-7].

Mikro- va nanoelektronikaning zamonaviy rivojlanishi yarimo‘tkazgich materiallarning fizik-kimyoviy xususiyatlarini yanada aniqroq usullar yordamida o‘rganishni

talab qiladi. Bunday tadqiqot yo‘nalishlaridan biri — strukturaviy tahlil bo‘lib, u orqali yarimo‘tkazgich materiali haqida muhim ma‘lumotlarni olish mumkin. Bu sohada nuqsonli modda tuzilmalarini rentgen spektroskopiyasi usullari eng ma‘lumotli, ishonchli va keng tarqalgan usullardan hisoblanadi [8,9]. Kristall jismlarning strukturaviy xususiyatlarini o‘rganishning eng keng tarqalgan usullaridan biri rentgen diffraksiya tahlilidir. U kristallarning strukturaviy tuzilishini o‘rganish, ya‘ni kristall panjara turini va uning parametrlarini aniqlash uchun ishlatilishi mumkin. Agar o‘rganilayotgan obyekt ko‘p fazali bo‘lsa, masalan, bir nechta komponentlardan iborat qotishma, unda har bir fazani aniqlash va qotishmadagi foizini aniqlash mumkin [10, 11]. Ushbu ishda biz nikel va temir bilan qoplangan

kremniy namunalarining strukturaviy xususiyatlarini, shuningdek, nikel, temir va kislorod kremniy atomlarini o'z ichiga olgan turli klasterlar hosil bo'lish xususiyatlarini o'rgandik.

II. MATERIAL VA USULLAR

Ushbu ishda temir bilan aralashtirilgan kremniy namunalarining strukturaviy tahlil natijalari olindi. Tadqiqot uchun dastlabki n-Siix namunalari va diffuziya orqali olingan n-Si<Fe> namunalari ishlatilgan. Temirni kremniyga diffuziya qilish 1300 °C haroratda, vakuum SOUL-4 da, muhrlangan ampulalarda amalga oshirilgan, bu yerda vakuum 10^{-3} - 10^{-4} Torr oralig'ida saqlangan. Diffuziya jarayonining davomiyligi 2 soat bo'lgan. Eritma annealizatsiyasidan so'ng namunalar ikki usulda sovutish jarayonidan o'tkazildi: $v_{\text{sovuq}}=250$ °C/s haroratda tez qattiqlashtirish va $v_{\text{sovuq}}=0,05$ °C/s da sekin sovutish.

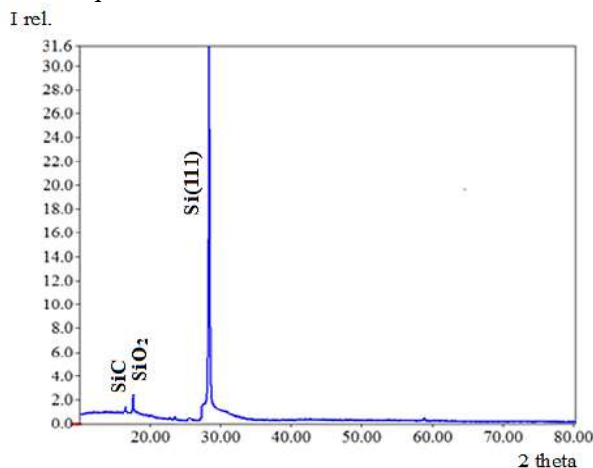
Shu bilan birga, qotishmali n-Si<Ni,Fe> namunalari Chokhralsky usuli bilan o'stirilgan, KEF brendiga mansub yagona kristall kremniy asosida, 0,3 ohm·sm qarshilikda olingan. Namunalar 10x5x2 mm o'lchamdagi to'rtburchak parallelepiped shaklida bo'lib, HF:HN₃ (1:2) eritmasi yordamida kimyoviy tozalangan. VUP-4 o'rnatmasi yordamida, har bir oldindan tayyorlangan kremniy namunasi uchun vakuum qiymati 10^{-4} Torr bo'lgan, 0,4 mikron qalinlikdagi nikel atomlari bir tomonga purkash orqali joylashtirildi. Boshqa tomondan, 0,2-0,3 mikron qalinlikdagi temir atomlari shu namunalarga joylashtirilgan. Nikel va temir atomlarini kremniyda bir vaqtning o'zida diffuziya qilish SUOL-4 gorizontall pechida T = 1473 K haroratda 5 soat davomida amalga oshirilgan. Pechdagi harorat ± 3 K ichida platina-platina rodium termokupl yordamida nazorat qilindi. Diffuziya annealingdan so'ng, namunalar tez sovutish ($v_{\text{sovuq}} = 200$ K/c) bilan sovutilgan.

Dastlabki va qotishma kremniy namunalarining strukturaviy xususiyatlari rentgen diffraksiya tahlili yordamida o'rganildi. Strukturaviy tadqiqotlar uchun zamonaviy XRD 6100 Shimadzu rentgen diffraktometri bosqichma-bosqich skanerlash rejimida CuK α nurlanishidan foydalangan. Bu

holatda nurlanish to'liq uzunligi $\lambda=1.5405$ Å edi.

III. NATIJALAR

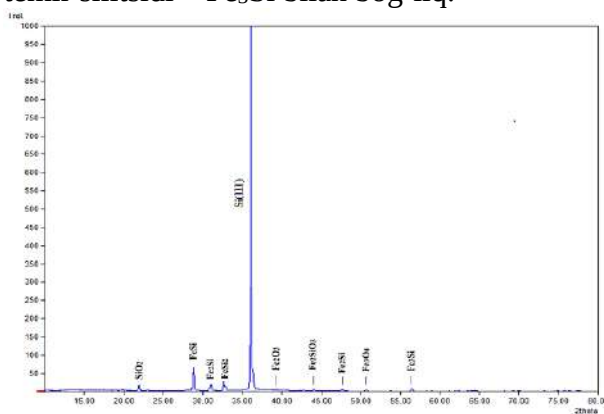
1-rasmda dastlabki n-Si namunasining rentgen diffraksiya tahlili natijalari ko'rsatilgan. Rentgen tasvirida ikki aniq cho'qqi va har xil intensivlikda ko'rsatilgan. Ularning eng baland cho'qqisi $2\theta=28.39^\circ$ burchakda kuzatilgan bo'lib, bu kristallografik orientatsiyaga ega kremniyga mos keladi (111). Si(111) cho'qqi refleksining yuqori intensivligi va tor kengligi kristall panjaraning yuqori darajada mukammalligini ko'rsatadi. Hisob-kitoblar natijalari shuni ko'rsatdiki, $2\theta=25.61^\circ$ da kuzatilgan refleksda tekisliklararo masofa d 0.347 nm bo'ladi. Keyingi refleks 16.21° burchakda kuzatiladi va u silikon bilan kislorod kompleksi – SiO₂ ni anglatadi. Va past intensivlikka ega eng kichik cho'qqi $2\theta=14.39^\circ$ burchakda kuzatiladi va bu SiC birikmasiga ishora qiladi.



1-rasm. Nazorat namunasi n-Si rentgen tasviri.

2-rasmda n-Si<Fe> namunasining rentgen diffraksiyasi tahlili natijalari ko'rsatilgan. Ko'rinib turibdiki, rentgen tasvirida eng baland cho'qqi Si(111) ga to'g'ri keladi va u $2\theta=36.42^\circ$ burchakda kuzatiladi. Diffuziyadan so'ng, bu cho'qqi asl namunadagi refleksga nisbatan yuqoriroq burchak qiymatlariga siljigan, bu diffuziyadan so'ng kremniy matritsa elementining kristall tuzilmasi deformatsiyalanganini ko'rsatadi. Rentgen tasviri 2θ burchak oralig'ida 22° dan 57° gacha bo'lgan bir nechta cho'qqilarni ko'rsatadi, bu esa kremniy atomlarini, shuningdek, asosiy va texnologik iflosliklarni o'z ichiga olgan turli birikmalarning hosil bo'lishini ko'rsatadi.

$2\theta=22.45^\circ$ da aniqlangan cho‘qqi kremniy dioksidi natijasidir. Temir silitsidlar FeSi, Fe₂Si va FeSi₂ bilan bog‘liq aks ettirishlar diffraksiya naqshida topilgan bo‘lib, ular mos ravishda 28.64° , 31.85° va 32.26° burchakda kuzatiladi. $2\theta=39.05^\circ$ dagi cho‘qqi temir atomlari va kislorod aralashmasiga mos keladi, Fe₂O₃. $2\theta=43.84^\circ$ da kuzatilgan maksimal Fe₂SiO₃ birikmasiga ishora qiladi. Bundan tashqari, Fe₂Si birikmasi bilan bog‘liq cho‘qqi rentgen tasvirida $2\theta=47.65^\circ$ da qayd etiladi. Fe₃O₄ birikmasiga mos keladigan sezilarli intensivlikdagi reflekslar $2\theta=51.04^\circ$ burchakda kuzatiladi. Eng aniq cho‘qqi $2\theta=56.82^\circ$ bo‘lgan temir silitsidi – Fe₃Si bilan bog‘liq.



2-rasm. n-Si<Fe> namunasining rentgen tasviri.

Diffuziya termik ishlodan so‘ng tez sovutish va $v_{\text{sovuq}}=200$ K/c yordamida olingan n-Si<Ni,Fe> namunalari strukturaviy tadqiqotlari natijalari birikmalarining hajmida hosil bo‘lishini ko‘rsatdi. Natijalar quyidagicha tahlil qilindi. Olingan natijalar yordamida kristalldagi tekisliklar orasidagi masofani Vulf-Bragg tenglamasi yordamida aniqlash mumkin:

$$n\lambda = 2d \sin \theta \quad (1)$$

bu yerda: d — tekisliklararo masofa, θ — Vulf-Bragg burchagi, n — diffraksiya maksimumining tartibi, va $\lambda = 0.15405$ nm — CuK α - nurlanishining to‘lqin uzunligi.

Turli tekisliklardagi kristallitlarning o‘rtacha hajmi Scherrer formulasi bilan aniqlanadi:

$$L = \frac{K\lambda}{\beta \cos \theta} \quad (2)$$

bu yerda: K — o‘lchamsiz zarracha shakli koeffitsienti (Scherrer doimiysi); $\lambda = 0.15405$ nm — CuK α -nurlanishining to‘lqin uzunligi; β — yarim balandlik refleksining

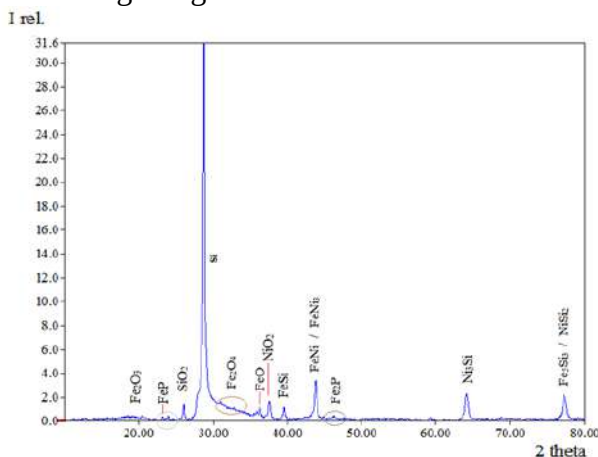
kengligi, θ — Vulf-Bragg burchagi, L — kristallitlarning o‘rtacha o‘lchami (nm).

Dastlabki namunaning rentgen tasvirida faqat ikki strukturaviy aks etish kuzatildi. Ulardan biri eng kuchli intensivlikda bo‘lib, $2\theta=28.39^\circ$ burchakda aks ettiriladi, bu Si(111) ga to‘g‘ri keladi. Ushbu akslanishda o‘rtacha kristallit o‘lchami L va tekisliklararo masofa d mos ravishda 2.84 nm va 0.628 nm ni tashkil etadi. Ikkinchi cho‘qqi esa kuchsizroq aks etadi, u $2\theta = 25.61^\circ$ burchakda kuzatiladi va SiO₂ birikmasiga mos keladi. Kristallitlarning o‘rtacha o‘lchami va bu aks ettirishdagi tekisliklararo masofa $L=2.55$ nm va $d=0.347$ nm ni tashkil etadi. Strukturaviy chiziqlarning tor kengligi va diffraksiya naqshida boshqa cho‘qqilarning yo‘qligi dastlabki namunaning kristall panjarasining yuqori darajada mukammalligini ko‘rsatadi.

Temir va nikel bilan qoplangan kremniy namunasining rentgen diffraksiya namunasi 3-rasmida ko‘rsatilgan. Rentgen tasviridan ko‘rinib turibdiki, turli intensivlikdagi bir nechta strukturaviy aks-sadolar kuzatiladi. Ularning eng katta cho‘qqisi kristall orientatsiyasiga ega monokristallin kremniyga to‘g‘ri keladi (111) (3-rasm). U 28.83° burchakda aks ettiriladi va asl namunadagi refleksga nisbatan kattaroq burchakka siljiydi. Bu kristall panjaraning atomlari ichiga kirib kelishi natijasida deformatsiyalanganini ko‘rsatadi. Bu refleksda L qiymati va d qiymati mos ravishda 0.997 nm va 0.619 nm ni tashkil etadi. Bundan tashqari, rentgenda temir, kislorod, fosfor, nikel va matritsa elementining aralashgan atomlari ishtirokida hosil bo‘lgan boshqa birikmalar ham kuzatilgan. Nikel va kremniy oksidlarining hosil bo‘lishi ham kuzatiladi. Temir atomlari va nikel atomlari tomonidan hosil bo‘lgan birikmalar 44° burchakda kuzatilgan. Ushbu struktura chizig‘idagi o‘rtacha kristallit o‘lchami va tekisliklar orasidagi masofa $L=0.624$ nm va $d=1.44$ nm ni tashkil etadi. 39.52° burchakda kuzatilgan aks ettirish FeSi birikmasiga to‘g‘ri keladi va bu akslanishda L va d qiymatlari mos ravishda 0.769 nm va 1.36 nm ni tashkil etadi.

64.15° burchakda kuzatilgan refleks Ni₃Si birikmasiga mos keladi va bu refleksda L va d qiymatlari mos ravishda 0.569 nm va 1.161 nm ni tashkil etadi. Rentgen tasviridan temir-

kislorod birikmalarining Fe_2O_4 va FeO shaklida hosil bo'lishini ham ko'rish mumkin. Ushbu strukturaviy chiziqlar $30-37^\circ$ burchak diapazonida aks etadi. Rentgen past intensivlikdagi strukturaviy chiziqlarni ko'rsatadi va ular temir hamda fosfor birikmalariga mos keladi, ya'ni FeP va Fe_2P shaklida. Ular mos ravishda 25° va 45° burchaklarda aks etadi. Yana bir konstruktiv chiziqlik 77° burchak yaqinida aks etgan. Kristall tuzilmalari ma'lumotlar bazasi (COD-Crystallography Open Database) va adabiyot ma'lumotlaridan ma'lum bo'lishicha, bu cho'qqi Fe_5Si_3 va NiSi_2 shaklidagi ikki birikmaga to'g'ri keladi.



3-rasm. n-Si<Ni,Fe> namunasining rentgen tasviri.

IV. XULOSALAR

Shunday qilib, olingan natijalarga ko'ra, kremniyni temir bilan yuqori haroratda diffuziya bilan qotishma jarayonida namunalar hajmidagi yarimo'tkazgich materialining tuzilmasida sezilarli o'zgarishlar yuz beradi, bu esa Si matritsa elementining yangi birikmalari, shuningdek, asosiy va texnologik iflosliklarning hosil bo'lishi bilan bog'liq. Olingan natijalar natijasida n-Si<Ni,Fe> namunalarida turli intensivlik va 2θ qiymatlariga ega bir nechta birikmalar hosil bo'lishi aniqlandi. Bu birikmalar nafaqat matritsa elementining atomlari va atomlarining birikmalari, balki kislorod birikmalari bo'lib, o'zaro aralashgan atomlari va atomlar birikmalari ham hisoblanadi. Hosil bo'lgan birikmalar orasida, Fe atomlariga ega fosfor atomlarining birikmalari ham kuzatiladi.

ADABIYOTLAR

- [1] Scheffler L., Kolkovsky V., Weber J., Nikel doplangan kremniyda elektr darajalari // Journal of Applied Physics. 2014. 116-jild. 173704(1-8)-bet.
- [2]. Turgunov N.A. Kremniydagi kobaltning issiqlik tavlanihi ta'siri ostida nano-inkluziyalarining buzilishi // Noorganik materiallar. 2018. 54-jild, 12-son. 1183–1186-betlar.
- [3]. Li X., Yang Lou B., Ping Wu H., Dong He X., Sun Y. EB-PVD yordamida yuqori kremniy elektr po'latining mikrostrukturasi va xususiyatlariga bosim ta'siri // Qo'llaniladigan mexanika va materiallar. 2011. 55-57-jildlar. 348-351-betlar.
- [4]. Iniewski K. Yarimo'tkazgichlarda nurlanish ta'sirlari // Nyu-York, 2011, 405-bet.
- [5]. K. Takata, J. Fujise, B. Ko, T. Ono. Kremniy kristallining mexanik mustahkamligiga aralashmalarining ta'siri. Yapon. J. App. Fizika. 2019. No58. 0455070.
- [6]. N.A. Turgunov, E. X. Berkinov, R.M. Turmanova. Issiqlik tavlanihiining namunalarining elektrofizik xususiyatlariga ta'siri n-si. Sharqiy Yevro. J. Fizika. 2023. No3. 287-290-betlar.
- [7]. J. Lindroos, D. P. Fenning, D. J. Backlund, E. Verlage, A. Gorgulla va boshqalar. Nickel: Kremniyda juda tez diffuzor // J. Appl. Phys. 2013. 113-jild. 20-son. 204906(1-7)-bet.
- [8]. Bunaciu A.A., Udristioiu E.G., Aboulenein H.Y. Rentgen difraksiyasi: Asbob-uskunalar va qo'llanilishi // Analitik kimyoda kritika sharhlari. 2015. 45-jild. 289-299-betlar.
- [9]. Tam P.L., Cao Y., Nyborg L. XRD va XPS o'tish metali silitsid yupqa qatlamlarining tavsifi // [Sirt fanlari](#). 2012. [606-jild, 3–4-son](#). 329-336-betlar.
- [10]. Zainabidinov S.Z., Musaev K.N., Turgunov N.A., Turaev A.R. Si<Mn> va Si<Ni>da dopant mikroassotsiatsiya mexanizmlari // Noorganik materiallar. 2012. 48-jild. 11-son. 1065-1069-betlar.
- [11]. Turgunov N.A., Akbarov Sh.K., Xaytimmetov N.B., Turmanova R.M. Ni va Fe aralash atomlarining to'planishining Si yagona kristallarning elektrofizik xususiyatlariga ta'siri // Journal of nano- and electronic physics. 2024. 16-jild, 1-son. 01004(4)-betlar.

Yarimo'tkazgichli materialning birinchi Landau sathini vaqt bo'yicha o'zgarish dinamikasi

Ulug'bek Mirzobahrom o'g'li Negmatov¹.

¹Namangan davlat texnika universiteti, O'zbekiston, Namangan shaxri, I.Karimov shox-ko'chasi, 12-uy. 160100

2025-yil 25-noyabrda berilgan; 2025-yil 2-dekabrda chop etish uchun qabul qilingan.

Annotatsiya. Ishda kuchsiz o'zgaruvchan magnit maydoni ta'sirida kvant o'rali yarimo'tkazgich tuzilmalarda Landauning birinchi diskret sathining o'zgarish dinamikasi nazariy jihatdan tadqiq etilgan. Zaryad tashuvchi zarralarning samarali massasi kichik bo'lgan nanostrukturali yarimo'tkazgich larda Landauning diskret energetik sathlari faqat kuchli statik magnit maydonlari va past haroratlar sharoitida emas, balki xona haroratlarda ham kuchsiz magnit maydonlarida shakllanishi mumkinligi ko'rsatilgan. Analitik yondashuv asosida magnit maydonining sinusoidal modulyatsiyasida Landauning birinchi sathi energiyasining vaqtga bog'liqligi va uning o'zgarish tezligi uchun ifodalar olingan. Diskret sathlarning o'zgarish tezligi faqat dinamik magnit maydoni amplitudasi va Landau sathining tartib raqami bilan aniqlanishi, hamda kvant o'ra qalinligi va o'lchamli kvantlanish kvantlanish raqamiga bog'liqligi aniqlangan. Sonli tahlil o'tkazilib, energetik sathlarning vaqt bo'yicha evolyutsiyasi qurilgan bo'lib, ular ostsillyatsiyalarning garmonik xarakterini namoyish etgan. Olingan natijalar kichik o'lchamli yarimo'tkazgich tizimlar fizikasi uchun qiziqarli bo'lib, kuchsiz dinamik magnit maydonlarida kvant ostsillyatsion effektlarni modellashirishda, jumladan mikro- va nanoelektronika, spintronika hamda biomagnit qo'llanmalarda foydalanilishi mumkin..

Kalit so'zlar: : kvant o'ra; Landau sathlari; dinamik magnit maydon; kuchsiz magnit maydoni; kvant ostsillyatsiyalari; energetik spektr; nanostrukturali yarimo'tkazgich lar; fazaviy portret.

Аннотация: В работе теоретически исследована динамика изменения первого дискретного уровня Ландау в квантово-ямных полупроводниковых структурах при воздействии слабого переменного магнитного поля. Показано, что в наноструктурированных полупроводниках с малой эффективной массой носителей заряда дискретные энергетические уровни Ландау могут формироваться не только в условиях сильных статических магнитных полей и низких температур, но и при комнатных температурах в слабых магнитных полях. На основе аналитического подхода получены выражения для временной зависимости энергии первого уровня Ландау и скорости её изменения при синусоидальной модуляции магнитного поля. Установлено, что скорость изменения дискретных уровней определяется исключительно амплитудой динамического магнитного поля и порядковым номером уровня Ландау и не зависит от толщины квантовой ямы и квантовых чисел размерного квантования. Проведён численный анализ и построены графики временной эволюции энергетических уровней и их производных, демонстрирующие гармонический характер осцилляций. Полученные результаты представляют интерес для физики низкоразмерных полупроводниковых систем и могут быть использованы при моделировании квантовых осцилляционных эффектов в слабых динамических магнитных полях, в том числе в задачах микро- и нанoeлектроники, спинтроники и биомангнитных приложений.

Ключевые слова: квантовая яма; уровни Ландау; динамическое магнитное поле; слабое магнитное поле; квантовые осцилляции; энергетический спектр; наноструктурированные полупроводники; фазовый портрет.

Annotation. The work presents a theoretical investigation of the dynamics of variation of the first discrete Landau level in quantum-well semiconductor structures under the action of a weak alternating magnetic field. It is shown that in nanostructured semiconductors with a small effective mass of charge carriers, discrete Landau energy levels can form not only under strong static magnetic fields and low temperatures, but also at room temperature in weak magnetic fields. Within an analytical approach, expressions are derived for the time dependence of the energy of the first Landau level and for the rate of its change under sinusoidal modulation of the magnetic field. It is established that the rate of change of the discrete levels is determined exclusively by the amplitude of the dynamic magnetic field and the Landau level index, and does not depend on the quantum-well thickness or on the quantum numbers of size quantization. A numerical analysis is performed, and plots of the temporal evolution of the energy levels and their derivatives are constructed, demonstrating the harmonic nature of the oscillations. The obtained results are of interest for the physics of low-dimensional semiconductor systems and can be used in modeling quantum oscillatory effects in weak dynamic magnetic fields, including applications in micro- and nanoelectronics, spintronics, and biomagnetic systems..

Key words: quantum well; Landau levels; dynamic magnetic field; weak magnetic field; quantum oscillations; energy spectrum; nanostructured semiconductors; phase portrait.

Kirish

Ma'lumki, statik kvantlovchi magnit maydonning kvant o'rani ruxsat etilgan zonasiga ta'siri natijasida o'tkazuvchan va valent zonadagi zaryad tashuvchilarining energetik spektrlarini tubdan o'zgarishiga olib keladi. Bu esa, diskret Landau sathlarini hosil bo'lishidan [1, 2, 3] dalolat beradi. Statik ko'ndalang kuchli magnit maydoni ($B \parallel Z$) kvant o'raga ta'siridan erkin elektronning energiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$E_n = \left(N_L + \frac{1}{2}\right) \hbar \frac{eB}{m^*} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* d^2} n_z^2, \quad (1)$$

Bunda, N_L – diskret Landau sathlarining soni, B – statik kuchli magnit maydonning induksiyasi, d – kvant o'ra qalinligi, m^* – elektron effektiv massiasi, n_z – o'lchamli kvantlanish tartib raqami, $\hbar$ – plank doimiysi.

(1) ifodadan ko'rinib turibdiki, OXY tekisligida $(N_L + \frac{1}{2}) \hbar \frac{eB}{m^*}$ diskret energetik sathlar, OZ o'qida esa $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* d^2} n_z^2$ o'lchamli kvant sathlar hosil bo'lmoqda. Bu esa, erkin elektronlarning har tomonlama kvantlanishiga olib kelmoqda. Xuddiki, elektron harakati kvant nuqta analogiyasiga o'tmoqda. Bunday diskret energetik sathlar juda past haroratlarda namoyon bo'ladi. Sababi, $kT \ll \hbar \frac{eB}{m^*}$ sharti bajarishi kerak. Lekin, shunday nanostrukturallari yarimo'tkazgichlar borki, yuqori haroratlarda va statik kuchsiz magnit maydonlarda ham diskret energetik sathlar hosil bo'ladi. Masalan, [5,6,7] ishlarda $CdB_x F_{2-x} / p - CdF_2 - QW / CdB_x F_{2-x}$ kabi kvant o'rali yarimo'tkazgichli materiallarda magnitosingdiruvchanlik va magnitoqarshilik ossillyatsiyalari $T = 280\text{ K} \div 340\text{ K}$ va $B = 25\text{ mTl} \div 100\text{ mTl}$ oraliqlarida kuzatilgan. Buni sababini quyidagicha tushuntirish mumkin: Tajribalardan ma'lum bo'ldiki [6,7], $p - CdF_2$ kvant o'rali materiallari uchun elektronini effektiv massasi $m^* \approx 10^{-4} m_0$ munosabatda topildi. Chunki, $p - CdF_2$ kvant o'raning taqiqlangan zonasi juda ham kichik bo'lib, juda tor zona hisoblanadi. U holda $\hbar \frac{eB}{m^*}$ dan ko'rinib turibdiki, $\hbar \omega_c$ statik magnit maydon energiyasi (kT) kattaroq bo'lishi uchun, B -ni qiymati mTl

atrofida o'zgarishi yetarli. Bundan kelib chiqadiki, ushbu kvant o'rali materiallar yuqori haroratlardan ham (hatto xona haroratidan yuqori), $\hbar \omega_c \gg kT$ sharti bajarilmoqda. Demak, kuchsiz statik magnit maydonlarda ham diskret Landau sathlari hosil bo'lmoqda. Xulosa qilib aytish mumkinki, kuchsiz statik magnit (mTl) maydonlarida ham kvant ossillyatsiya jarayonlari paydo bo'lar ekan.

Endi, boshqa bir masalani ko'rib chiqaylik. Aksariyat dinamik magnit maydonlarni tibbiyot yoki biologik obyektlarga ta'siri aniqlanganda, asosan kuchsiz maydonlar (mTl) yetarli bo'ladi. Aniqroq qilib aytadigan bo'lsak, kuchsiz dinamik magnit maydonlar ta'sir etganda, ushbu bio obyektlarning xususiyatlari o'zgaradi. Shu bilan birga, kuchsiz o'zgaruvchi magnit maydonlarni vaqtga bog'liqligi dinamik tizimlarni aniqlashga qulay usulidir. Bularning barchasi tajribalar asosida olingan faktlarga tayanadi.

Tabiiy savol tug'iladi: [3,8] ishlarda keltirilgan nanostrukturallari materiallarga kuchsiz dinamik magnit maydon ta'sir etganda, erkin elektronlarning energetik spektri qanday hisoblanadi? $E_n(B(t))$ dan kvant o'raning ruxsat etilgan zonasidagi erkin elektron energetik spektrini fazaviy portreti qanday hosil bo'ladi?

Keling, endi kuchsiz dinamik magnit maydondagi kvant o'raning ruxsat etilgan zonasidagi erkin elektronlarni energetik spektrini o'zgarishini ko'rib chiqaylik. O'zgaruvchan magnit maydon induksiyasini vaqt bo'yicha o'zgarishini qo'yidagi sinusoidadan qonuniyatga asoslanib, taklif etaylik:

$$B = B_0(1 + \sin(\omega_c t)), \quad (2)$$

bunda, B_0 – dinamik magnit maydon induksiyasining amplituda qiymati, ω – o'zgaruvchan magnit maydonning siklotron chastotasi, t – dinamik maydonning kvant o'raga ta'sir etish vaqti.

[4, 8] ishlarda, tajribalar o'tkazish jarayonida o'zgaruvchan kuchsiz magnit maydonlarining chastotasini 10 Hz dan 1 000 Hz gacha, ta'sir ettirish vaqti esa 10^{-3} s dan 50 s gacha bo'lgan. U xolda, (2) ni (1) ga qo'yishimiz natijasida:

$$E_n(B(t), d, N_L, n_z) = \left(N_L + \frac{1}{2}\right) \cdot \hbar \frac{eB_0(1 + \sin(\omega_c t))}{m^*} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* d^2} n_z^2, \quad (3)$$

ega bo'lamiz.

(3) ifoda, kuchsiz dinamik magnit maydonning kvant o'radagi erkin elektronlarning diskret energetik sathlariga bog'liqligini anglatadi.

Dinamik magnit maydonda vaqt o'tishi bilan magnit maydon induksiyasi sinusoidal o'zgarishi (2) dan ma'lum bo'lmoqda. Bu esa, o'z navbatida (3) dan ham ko'rinib turibdiki, kvant o'raning ruxsat etilgan zonalaridagi diskret energetik sathlar vaqtga kuchli bog'liq bo'lmoqda, ya'ni $E_n(t)$ sinusoidal o'zgarmiqda. Endi, (3) dan, vaqt bo'yicha hosila olib, E_n -ni o'zgarish tezligini ko'rib chiqaylik. U holda, differensiyalash qoidasiga binoan, quyidagi kelib chiqadi:

$$\frac{dE_n(\omega_c t, N_L)}{dt} = \omega_c \cdot \left(N_L + \frac{1}{2}\right) \cdot \hbar \frac{e \cdot B_0 \cdot \cos(\omega_c t)}{m^*}, \quad (4)$$

(4) ifodadan ko'rinib turibdiki, diskret energetik sathlarni o'zgarish tezligi $\frac{dE_n}{dt}$ dinamik magnit maydon induksiyasining amplituda qiymatiga va Landau sathlari soniga bog'liq bo'lmoqda. Lekin, kvant o'raning qalinligi d va o'lchamli kvantlar soni n_z ning o'zgarish $\frac{dE_n}{dt}$ ga umuman ta'sir etmayapti. Buni fizik ma'nosi quyidagicha tushuntiriladi: $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* d^2} n_z$, ($n_z = 1$) ning qiymati kuchsiz dinamik magnit maydon energiyasiga nisbatan ko'p marta kattaradi, ya'ni:

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* d^2} n_z (n_z = 1) \gg \left(N_L + \frac{1}{2}\right) \hbar \frac{eB}{m^*}. \quad (5)$$

(5) dan ko'rinib turibdiki, kuchsiz dinamik magnit maydon hosil qilgan har bir diskret Landau sathlari kvant o'raning ($n_z = 1$) birinchi o'lchamli sathiga nisbatan juda yaqin joylashgan bo'ladi. ($E_{n_z}(n_z = 1)$ ning shipida

bo'ladi). Xulosa qilib, aytish mumkinki, faqatgina bizning hisobimiz uchun $n_z = 1$ ni o'zi yetarli (ya'ni, $E_{n_z} = \text{const}$).

Xulosa:

1. Kvant o'rali yarimo'tkazgichlarning diskret energetik sathlarining o'zgarish tezligi $\frac{dE_n}{dt}$ faqatgina o'zgaruvchan kuchsiz magnit maydon induksiyasining amplituda qiymatiga va Landau sathlari tartib raqamiga bog'liq bo'lishi isbotlandi.
2. Statik magnit maydon va dinamik kuchsiz magnit maydonlardagi kvant o'rali yarimo'tkazgichlarning o'tkazuvchanlik zonasidagi birinchi Landau sathining vaqt bo'yicha o'zgarishlarini dinamikasi solishtirildi. Natijada, kvant o'raning o'tkazuvchanlik zonasidagi erkin elektronlarning energiyasidan birinchi tartibli hosilasi $\frac{dE_n}{dt}$ eng yuqori amplitudali garmonik tebranma harakat qilishi asoslab berildi.
3. Kvant o'rali yarimo'tkazgichning diskret Landau sathlarini vaqt bo'yicha o'zgarish tezligi $\frac{dE_n(B(t))}{dt}$ dinamik kuchsiz o'zgaruvchan magnit maydon induksiyasining amplitudasiga kuchli bog'liq bo'lib, u katta energiyalar intervalida, $\frac{dE_n(B(t))}{dt}$ ni garmonik tebranma harakat amplitudasini keskin oshishiga sabab bo'lishi aniqlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

- [1] Gulyamov G.G., Gulyamov A.G., Muhitdinova F.R. Influence of Recombination Centers on the Phase Portraits in Nanosized Semiconductor Films // Journal of Modern Physics. 2016. T.7. Pp. 1661–1667. doi:10.4236/jmp.2016.713151.
- [2] Zainabiddinov S.Z. Yarimo'tkazgichlar fizikasi. Toshkent: O'qituvchi, 2008.
- [3] Rasulov R.Ya. Kvant mexanikasi elementlari va yarimo'tkazgichlarga tatbiqi. Toshkent: Universitet, 2010.
- [4] Erkaboev U.I., Rakhimov R.G., Sayidov N.A., Mirzaev J.I. Modeling the temperature dependence of the density oscillation of energy states in two-dimensional electronic gases under the impact of longitudinal and transversal quantum magnetic fields // Indian Journal of Physics. 2023. Vol. 97. No. 4. Pp. 1061–1070. doi:10.1007/s12648-022-02621-4.

- [5] Erkaboev U.I., Rakhimov R.G. Determination of the dependence of the oscillation of transverse electrical conductivity and magnetoresistance on temperature in heterostructures based on quantum wells // East European Journal of Physics. 2023. Vol. 3. Pp. 133–145. DOI: 10.26565/2312-4334-2023-3-10
- [6] Фомин М.А., Головин П.А., Клячкин Л.Е., Маляренко А.М., Емельянов А.К., Баграев Н.Т. Макроскопические квантовые явления в условиях осаждения олигонуклеотидов ДНК в краевые каналы кремниевой наносандвич-структуры // Журнал технической физики. 2025. Т.94. №9. Сс. 1588–1596.
- [7] Gulyamov G., Erkaboev U.I., Rakhimov R.G., Mirzaev J.I., Sayidov N.A. Determination of the dependence of the two-dimensional combined density of states on external factors in quantum-dimensional heterostructures // Modern Physics Letters B. 2023. Vol. 37. No. 10. P. 2350015. doi:10.1142/S021798492350015X.
- [8] Liu Y.Z., Zhan L.H., Ma Q.Q., Ma Z.Y., Huang M.H. Effects of alternating magnetic field aging on microstructure and mechanical properties of AA2219 aluminum alloy // Journal of Alloys and Compounds. 2015. Vol. 647. Pp. 644–647. doi:10.1016/j.jallcom.2015.06.103

Mualliflar haqida ma'lumot

1. Ulug'bek Negmatov – f.-m.f.f.d. (PhD),
Namangan davlat texnika universiteti, Axborot
tizimlari va texnologiyalari kafedrasi katta
o'qituvchisi. Tel.: +99897-3703574;
e-mail: unegmatov+publish@gmail.com

ISSIQLIK ISHLOVI REJIMLARIGA BOG'LIQ HOLDA p -TIP KREMNIY MONOKRISTALLARIDA KISLORODLI KOMPLEKSLAR, KLASSTERLAR VA MIKROKUCHLANISHLARNING XRD TAHLILI

B.M. Ergashev

Andijon davlat pedagogika instituti, O'zbekiston, 170100, Andijon shahri, Do'stlik ko'chasi, 4-uy

2025-yil 4-dekabrda qabul qilingan; 2025-yil 28-dekabrda nashr qilingan

Annotatsiya. Ushbu maqolada Choxralskiy usulida o'stirilgan p -Si monokristallarida 5 soat davomida 950°C, 1050°C va 1150°C haroratlarda berilgan issiqlik ishlovlarining kislorodli tuzilmaviy nomuvofiqliklar, mikrokuchlanishlar hamda fazaviy o'zgarishlarga ta'siri Empyrean Malvern rentgen difraktometri yordamida o'rganildi. XRD natijalari (111)_{Si} akslanishining kichik burchaklar tomonga siljishi va panjara doimiysining ortishini, shuningdek (222)_{Si} akslanishining paydo bo'lishi orqali mikrokuchlanishlar kuchayishini ko'rsatdi. Rentgenogrammalarda SiO₂ va SiO_x klasterlari (2 nm atrofida), SiO₂ kristallitlari (21–25 nm), B₂O₃ (55 nm) hamda SiB₆ nanokristallitlari (71–95 nm) fazalari aniqlanib, ularning shakllanishi issiqlik ishlovi harorati bilan bog'liqligi asoslandi.

Kalit so'zlar: Choxralskiy usuli; issiqlik ishlovi; kislorodli nuqsonlar; rentgenodifraksion tahlil; mikrokuchlanishlar; SiO₂ fazasi; SiO_x klasterlari; subkristallitlar; SiB₆ nanokristallitlari.

Аннотая. В статье исследовано влияние термообработки при 950°C, 1050°C и 1150°C в течение 5 часов на кислородсодержащие структурные несоответствия, микродеформации и фазовые превращения в монокристаллах p -Si, выращенных методом Чохральского. Рентгенодифракционные измерения на дифрактометре Empyrean Malvern показали смещение отражения (111)_{Si} в сторону меньших углов и увеличение параметра решётки, а также появление отражения (222)_{Si}, свидетельствующее об усилении микрокривизны и локальных механических напряжений. В дифрактограммах идентифицированы фазы SiO₂ и SiO_x в виде кластеров (~2 нм), кристаллитов SiO₂ (21–25 нм), B₂O₃ (~55 нм) и нанокристаллитов SiB₆ (71–95 нм), формирование которых зависит от температуры термообработки.

Ключевые слова: метод Чохральского; термообработка; кислородсодержащие дефекты; рентгенодифракционный анализ; микродеформации; фаза SiO₂; кластеры SiO_x; субкристаллиты; нанокристаллиты SiB₆.

Abstract. This paper investigates the effect of 5 h thermal treatments at 950°C, 1050°C, and 1150°C on oxygen-related structural mismatches, microstrain, and phase evolution in Czochralski-grown p -Si single crystals. X-ray diffraction measurements performed using an Empyrean Malvern diffractometer reveal a shift of the (111)_{Si} reflection toward lower angles and an increase in the lattice parameter, while the appearance of the (222)_{Si} reflection indicates enhanced microstrain and local stress fields. The XRD patterns identify oxygen-containing phases including SiO₂ and SiO_x as small clusters (~2 nm), SiO₂ crystallites (21–25 nm), B₂O₃ crystallites (~55 nm), and SiB₆ nanocrystallites (71–95 nm), demonstrating a clear dependence of their formation and structural evolution on the annealing temperature.

Keywords: Czochralski method; thermal treatment; oxygen-related defects; X-ray diffraction analysis; microstrain; SiO₂ phase; SiO_x clusters; subcrystallites; SiB₆ nanocrystallites.

I. KIRISH. Zamonaviy nanoelektronika va mikroelektronika texnologiyalarining jadal rivojlanishi yuqori tozalik va mukammal kristall tuzilishga ega bo'lgan yarimo'tkazgich materiallarini olish muammosi bilan bevosita bog'liqdir. Ushbu sohada monokristall kremniy eng muhim va keng qo'llaniladigan materiallardan biri bo'lib, uning fizik-ximik hamda elektr xususiyatlari kristall panjaradagi fon kirishmalar, ayniqsa kislorod atomlarining mavjudligi va ularning tuzilmaviy holati bilan keskin belgilanadi. Choxralskiy usulida o'stirilgan kremniy kristallarida yuqori haroratli jarayonlar ta'sirida kislorodli komplekslar, klasterlar va ikkilamchi fazalarning shakllanishi mikrokuchlanishlar paydo

bo'lishiga, zaryad tashuvchilarning yashash vaqti hamda diffuziya jarayonlarining o'zgarishiga olib keladi. Shu sababli, issiqlik ishlovi sharoitlarida p -tip kremniy monokristallarida kislorod bilan bog'liq tuzilmaviy nomuvofiqliklarning shakllanish mexanizmlarini rentgenodifraksion usullar yordamida chuqur o'rganish nanoelektronika qurilmalari uchun yuqori sifatli kremniy asoslarini yaratishda muhim ilmiy va amaliy ahamiyatga ega[1-3].

II. MATERIAL VA USULLAR

Kremniy yuqori haroratda erigan holatdan kristalllanish jarayonida ortiqcha miqdorda kislorodni singdiradi va uning bir qismi SiO_x

oksidlarini hosil qilib, kristall hajmida bir tekis taqsimlanadi. Bu oksidlarning konsentrasiyasi $\sim 10^7 \text{ sm}^{-3}$ gacha etishi mumkin. Shuningdek, Choxralskiy usulida o'stirilgan krenmiy kristalli 400-800 °C haroratda ≥ 1 soat davomida ushlab turilganda, kislorodning ortiqcha miqdori Si-Ox ($x=1\div 4$) turdagi komplekslarni hosil qiladi. Masalan, SiO_4 komplekslari parchalanib, erkin kislorod ajralib chiqadi va kremniy atomlari tomonidan SiO_2 shaklida bog'lanadi[4]. Biroq, SiO_2 ning kristall hajmida to'planishi mikronuqsonlar paydo bo'lishiga olib keladi, bu esa asosiy bo'lmagan zaryad tashuvchilarning yashash vaqtini qisqarishiga va kremniyning xususiyatlarining o'zgarishiga sabab bo'lishi mumkin.

Dastlabki material sifatida Choxralskiy usulida o'stirilgan, 5 Omxsm solishtirama qarshilikka hamda p-tur o'tkazuvchanlikka ega bo'lgan monokristall kremniydan tayyorlangan $1 \times 10 \times 10 \text{ mm}^3$ o'lchamdagi namunalardan foydalanildi. Choxralskiy usulida monokristall kremniy o'stirishning asosiy kamchiliklaridan biri – olingan kristalllarda kislorod va uglerod atomlari kabi fon kirishmalarining yuqori miqdorda bo'lishi bo'lib, ularning konsentrasiyasi mos ravishda $2 \times 10^{18} \text{ sm}^{-3}$ va $5 \times 10^{16} \text{ sm}^{-3}$ gacha etadi. Fon kirishmalari orasida kremniyda kislorod atomlarining mavjudligi muammosi ko'p yillar davomida dolzarb bo'lib qolmoqda[5].

Tadqiq qilingan namunalarning tuzilmaviy va fazaviy holatlarini nazorat qilish Empyrean Malvern rentgen difraktometri yordamida amalga oshirildi. Tuzilmaviy cho'qqining maksimal qiymatini aniqlash uchun OriginPro2022 dasturi foydalanildi. Rentgenodifraksion o'lchovlar Bregg-Brentano geometriyasida o'tkazilib, tarqalish burchi $2\theta_B = 10^\circ \div 120^\circ$ bo'lgan diapazonda uzluksiz skanerlash tezligi 1 gradus/min etib belgilandi. Burchak qadami esa 0,02 gradus etib olindi[6].

1-rasmda mos ravishda 5 soat mobaynida 950°C, 1050°C va 1150°C haroratlarda issiqlik ishlovlari berilgan monokristall p-Si (nazorat namunalari) rentgenogrammalari keltirilgan. Rasmdan rentgenogrammalarning $2\theta = 28,53^\circ$, $28,5^\circ$ va $28,45^\circ$ sochilish burchaklarida $(111)_{\text{Si}}$ kristallografik yo'nalishga mansub tanlanma tabiatga ega yuqori intensivlikdagi ($I_{\text{Si},(950^\circ\text{C})}=3 \times 10^6 \text{ imp/s}$, $I_{\text{Si},(1050^\circ\text{C})}=4,7 \times 10^6 \text{ imp/s}$ va $I_{\text{Si},(1150^\circ\text{C})}=1,4 \times 10^6 \text{ imp/s}$) difraksion akslanishlar kuzatilgan. Bu holat Si nazorat namunasining sirti (111) kristallografik yo'nalishga tegishli ekanligidan dalolat beradi. Shuningdek, mazkur akslanishlar harorat ortishi bilan kichik burchaklar tomon ($28,53^\circ$ dan $28,45^\circ$ gacha) siljigani va ularning intensivligi avval 1,6 marta oshgani, so'ngra esa 2,1 marta kamaygani ham kuzatilgan.

Bu, o'z navbatida, 5 soat mobaynida 950°C, 1050°C va 1150°C haroratlardagi issiqlik ishlovlari ta'sirida kristalldagi nuqsonlar yoki atomlarning qayta taqsimlanishi natijasida panjara doimiysining ($a_{\text{Si},(950^\circ\text{C})}=0,534 \text{ nm}$, $a_{\text{Si},(1050^\circ\text{C})}=0,535 \text{ nm}$ va $a_{\text{Si},(1150^\circ\text{C})}=0,536 \text{ nm}$) ortib borishini va kristallik darajasi 1050°C da ortgani, 1150°C da esa kamayganini ko'rsatadi. Bundan tashqari, rentgenogrammalarning $2\theta = 94,95^\circ$, $94,94^\circ$ va $94,98^\circ$ sochilish burchaklarida uchinchi tartibli $(333)_{\text{Si}}$ kristallografik yo'nalishga mansub yuqori intensivlikdagi ($I_{\text{Si},(950^\circ\text{C})}=2,3 \times 10^4 \text{ imp/s}$, $I_{\text{Si},(1050^\circ\text{C})}=4,5 \times 10^5 \text{ imp/s}$ va $I_{\text{Si},(1150^\circ\text{C})}=8,9 \times 10^4 \text{ imp/s}$) difraksion akslanishlar ham kuzatilgan. Shuningdek, $10^\circ \div 60^\circ$ burchakli sochilish oralig'ida noelastik fon sathining nomonoton xarekteri, $(111)_{\text{Si}}$ tuzilmaviy akslanishlarining α_1 va α_2 nurlanishli tashkillovchilarga sezilsiz ajralishi, $(333)_{\text{Si}}$ tuzilmaviy akslanishlarining esa α_1 va α_2 nurlanishli tashkillovchilarga yaqqol ajralishi ham kuzatilgan. Bu, o'z navbatida, 950°C, 1050°C va 1150°C haroratlardagi issiqlik ishlovlari ta'sirida kristall panjarasidagi mikrokuchlanishlar (dis-lokasiya yoki boshqa nuqsonlar) namunalarning sirti sohalarida shakllanganini, hajm bo'ylab esa barqarorlashganini ko'rsatadi. Bundan tashqari, rentgenogrammalarning $2\theta = 25,7^\circ$ va $2\theta = 83,3^\circ$ burchakli sochilishlarida birinchi tartibli $(111)_{\text{Si}}$ va uchinchi tartibli $(333)_{\text{Si}}$ akslanishlarining β -tashkillovchilari ham kuzatilgan 2-a va 2-c rasmlarga qarang).

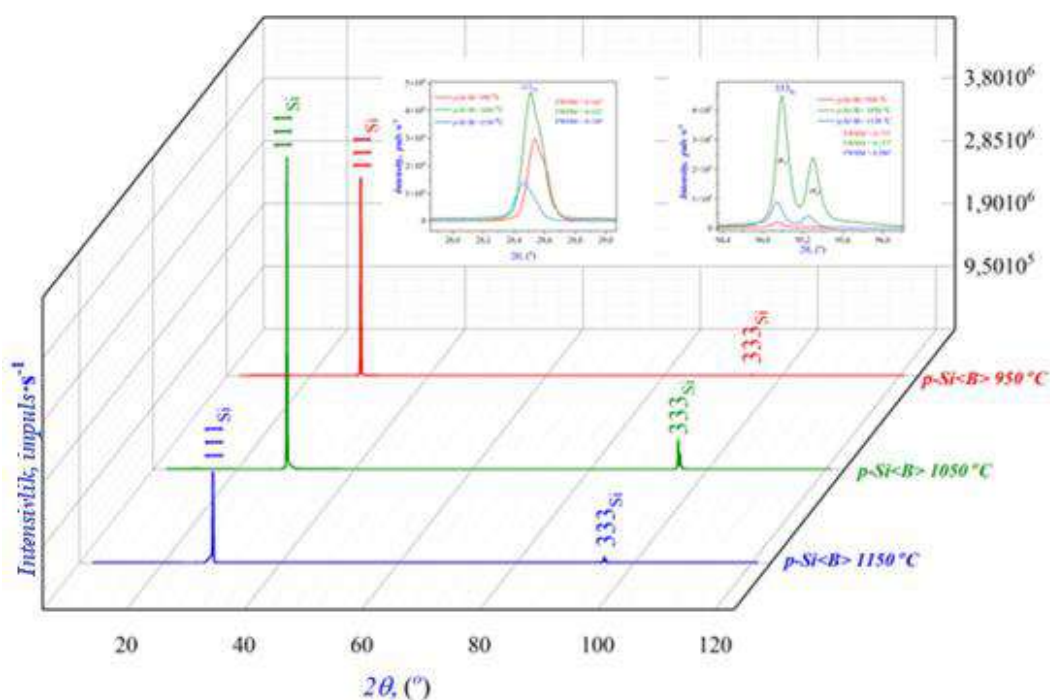
Birinchi tartibli $(111)_{\text{Si}}$ akslanishlarning eksperimental natijalariga ko'ra, 5 soat mobaynida 950°C, 1050°C va 1150°C haroratlarda issiqlik ishlovi berilgan kremniy nazorat namunalari tashkil etuvchi subkristallitlarning o'lchamlari mos ravishda 59,7 nm, 61,1 nm va 57,4 nmga teng ekanligi aniqlandi. Bu esa, o'z navbatida, 950°C haroratda nisbatan quyi diffuziya tufayli subkristallitlarning holati sezilarli darajada o'zgarmaganini, 1050°C haroratda qayta kristalllanish jarayoni yuz berishi natijasida ularning o'lchami ortib, yiriklashganini hamda 1150°C haroratda subkristallitlarning yo'qolishi va qayta shakllanish jarayonlari faollashishi tufayli ularning o'lchami kamayganini ko'rsatadi. Shuningdek, rentgenogrammalarning $2\theta = 63,2^\circ$ va $105,1^\circ$ sochilish burchaklarida $(220)_{\text{Si}}$ va $(440)_{\text{Si}}$ tuzilmaviy akslanishlari ham kuzatilgan (2 c va 2 d-rasmlarga qarang), bu esa p-Si namunalari sirtida va hajmida turli (11 nm dan 87 nm gacha) o'lchamli polikristall sohalar mavjudligidan dalolat beradi. Bundan tashqari, 5 soat mobaynida 950°C, 1050°C va 1150°C haroratlarda issiqlik ishlovi berilgan kremniy nazorat namunalari rentgenogrammalarining $2\theta = 58,8^\circ$, $59,0^\circ$ va $58,9^\circ$

sochilish burchaklarida (222)Si kristallografik orientatsiyasiga mansub tuzilmaviy akslanish ham kuzatilgan (2 c-rasmga qarang). Odatda bunday tuzilmaviy akslanish kristall panjarasi turli mikrokuchlanishlardan xoli bo'lgan kremniyning rentgenogrammasida kuzatilmaydi, ya'ni bunday akslanishlarning namoyon bo'lishi p-Si namunalari kristall panjarasida mikrokuchlanishlar mavjudligidan dalolat beradi[7].

Bunday mikrokuchlanishlar miqdorini aniqlash imkonini mavjud bo'lib, buning uchun (222)Si turidagi tuzilmaviy akslanish intensivligining asosiy (111)Si turidagi akslanish intensivligiga nisbati ($I_{(222)}/I_{(111)}$) hisoblanadi. Bizning holatda bu nisbat mos ravishda $3,8 \times 10^{-4}$, $5,4 \times 10^{-4}$ va $6,5 \times 10^{-4}$ ga teng bo'lib, bu qiymatlar ideal holatdagidan (10^{-4} darajasida, olmossimon tuzilmalar kristall panjarasida

atomlarning tekis taqsimlanishiga muvofiq) katta hisoblanadi.

Bu esa, o'z navbatida, issiqlik ishlovlari haroratining ortishi natijasida kremniy kristall panjarasida fon kirishmalaridan kelib chiqqan kislorodning notekis taqsimlanishi tufayli kristall panjaraning mahalliy sohalarida mexanik kuchlanishlar ortayotganidan dalolat beradi. Bu holat, ehtimol, kremniy va kislorod atomlari ion radiuslarining farqlanishi bilan bog'liq, shuningdek, kristall o'sishi jarayonida harorat gradienti ta'sirida yuzaga kelgan kichik kuchlanishlarga tegishli bo'lishi mumkin[8].



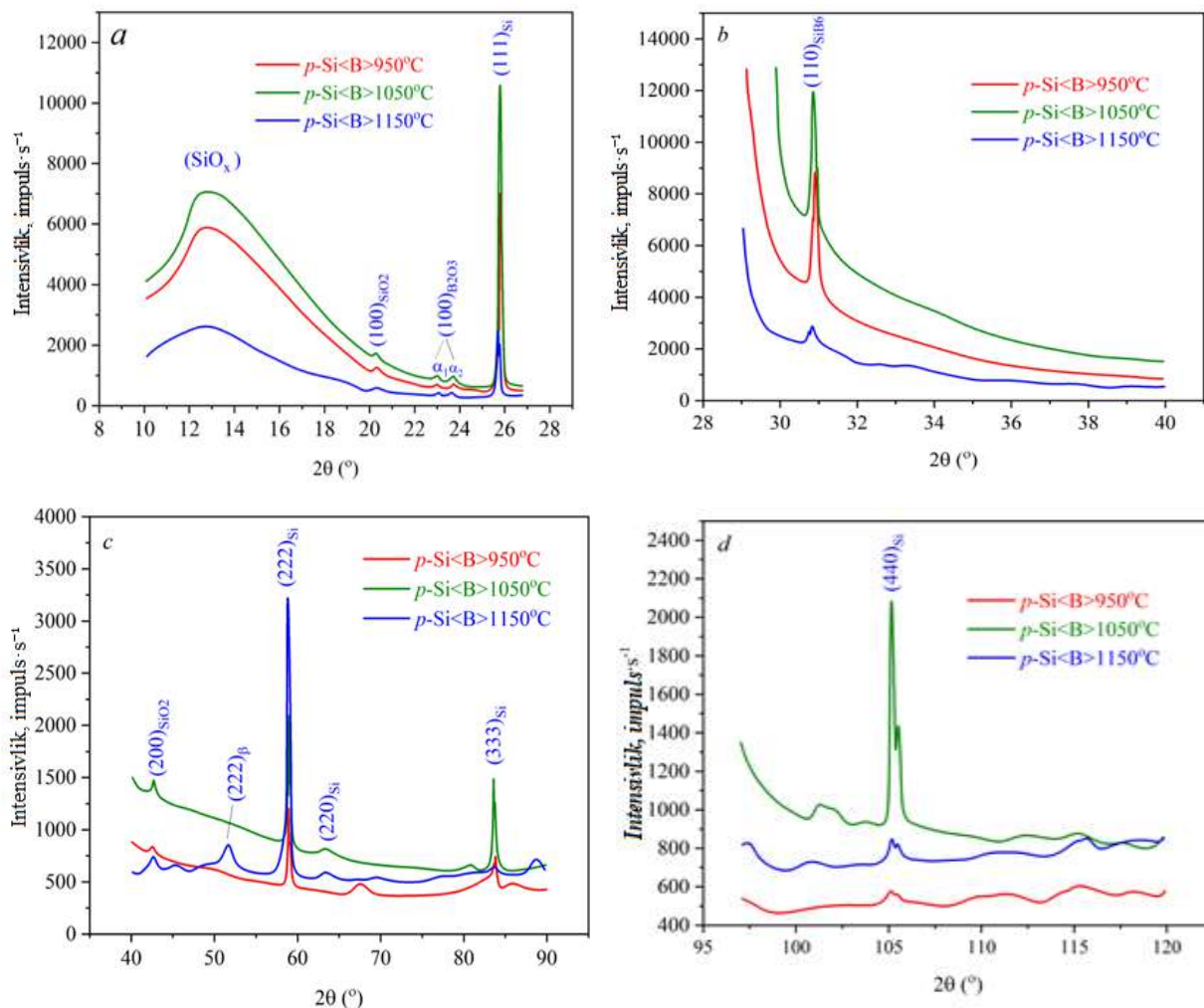
1-rasm. 950°C, 1050°C va 1150°C haroratlarda issiqlik ishlovi berilgan p-Si namunacining rentgenogrammalari.

Kislorod atomlari ion radiusining farqi tufayli chegaraviy sohalar kristall panjarasi va kremniy subkristallitlari bo'linish chegaralaridagi siljigan tugunlarga joylashib, kremniyning to'yinmagan bog'larini to'ldiradi. Bu, o'z navbatida, kristallit hajmida asosan kremniy atomlari joylashganligini va kristall tuzilmasining yuqori simmetriyaga ega ekanligini hamda kislorod atomlari subkristallitlar bo'linish chegaralarida o'z-o'zidan asimmetrik kristallitlar hosil qilishi mumkinligini ko'rsatadi[9].

Yuqoridagi mulohazani tasdig'i sifatida p-Si rentgenogrammalarining $2\theta = 20,2^\circ$, $2\theta = 39,1^\circ$, $2\theta = 42,6^\circ$, $2\theta = 90,8^\circ$ va $2\theta = 91,9^\circ$ burchakli sochilishlarida mos ravishda (100), (102), (200), (400) va (401) kristallografik orientatsiyalarga mansub SiO₂ fazasiga tegishli bo'lgan tuzilmaviy akslanishlar kuzatilgan (2 a va 2 c-rasmlarga qarang). Shuningdek, mazkur akslanishlarning yarimkengliklari ($\text{FWHM} = 5,7 \times 10^{-3} \div 7,1 \times 10^{-3} \text{ rad}$) qiymatlari ularning kremniy va kislorod atomlari

ishtirokida 21÷25 nm o'lchamli kristallitlarni shakllantirayotganidan dalolat beradi. Bundan tashqari, ushbu tuzilmaviy akslanishlarning eksperimental qiymatlarini qayta ishlab chiqib, tahlil qilish orqali SiO₂ kristallitlarining kristall panjara doimiylari mos ravishda $a_{\text{exp}} = b_{\text{exp}} = 0,5031$ nm va $c_{\text{exp}} = 0,5527$ nm ekanligi hamda ularning P₃221 fazoviy guruhiga mansub trigonal elementar katakchalardan tashkil topganligi aniqlandi. Shuningdek, p-Si rentgenogrammasining $2\theta = 23,0^\circ \div 23,6^\circ$ burchakli sochilishlarida kremniyda

fon kirishmalaridan bo'lgan bor va kislorod atomlarining birikishi natijasida (100) kristallografik orientatsiyaga mansub ikki tarkibli B₂O₃ fazasiga tegishli tuzilmaviy akslanish ham kuzatilgan (2a-rasmga qarang). Ushbu akslanishning eksperimental qiymatlari yordamida P₃221 fazoviy guruhiga mansub bo'lgan, panjara doimiylari $a_{\text{exp}} = b_{\text{exp}} = 0,4415$ nm va $c_{\text{exp}} = 0,8812$ nm bo'lgan trigonal elementar katakchalardan tashkil topgan 55 nm o'lchamli kristallitlar mavjudligi ham aniqlandi.



2-rasm. p-Si namunasi rentgenogrammasida noelastikfon sathining kichik, o'rta va katta sochilish burchaklaridagi o'zgarishi hamda kuzatilgan tuzilmaviy akslarning shakli.

5 soat mobaynida 950°C, 1050°C va 1150°C haroratlarda issiqlik ishlovi berilgan kremniy nazorat namunalarining rentgenogrammasi kichik burchakli ($2\theta \approx 13^\circ$) sochilishlarda SiO_x ga tegishli diffuziyaviy akslanishlarni ko'rsatdi (2 a-rasmga qarang). Ushbu akslanishlarning yarimkengliklari (FWHM 950°C = $7,2 \times 10^{-2}$ rad, FWHM 1050°C = $8,7 \times 10^{-2}$ rad va FWHM 1150°C = $8,4 \times 10^{-2}$ rad) tahlili bo'yicha ular kristallit

ko'rinishiga emas, balki kichik o'lchamli fragmentlarga, ya'ni mos ravishda 2 nm, 1,6 nm va 1,7 nm ga teng bo'lgan klasterlarga ega ekanligi aniqlandi. Bunday klasterlar asosan kremniy sirtiga yaqin sohalarda hosil bo'lib, kremniy atomlari o'rtasida to'yinmagan bog'lanishlar mavjudligini hamda kichik o'lchamlari kremniy va kislorod atomlari joylashuvida uzoq masofali tartib yo'qligini ko'rsatadi. Shuning uchun bunday

fragmentlar nanokristallitlar emas, balki klasterlar deb ataladi. Bundan tashqari, ushbu klasterlar 950°C, 1050°C va 1150°C haroratlarda issiqlik ishlovi berilgan kremniy nazorat namunalarining turli sohalarida qisman shakllanganligi sababli, mazkur rentgenogrammlarning kichik, oʻrta va yuqori burchakli sochilishlarida noelastik fonning turlicha oʻzgarishini ham kuzatish mumkin. Bu esa oʻz navbatida kremniy kristall panjarasida kirishma mikrobuilishlar shakllanayotganidan dalolat beradi. p-Si namunasi rentgenogrammlarining $2\theta=30,8^\circ$ burchakli sochilishlarida (110) kristallografik orientasiyaga mansub SiB₆ (geksaborid kremniy) fazasiga tegishli boʻlgan tuzilmaviy akslanish ham kuzatildi (2 b-rasmga qarang). Bu akslanish panjara doimiylari $a_{\text{exp}} = b_{\text{exp}} = c_{\text{exp}} = 0,4156$ nm boʻlgan kub shaklidagi elementar katakchalardan tashkil topgan 75 nm, 71 nm va 95 nm oʻlchamli nanokristallitlarga tegishli ekanligi aniqlandi [10]. Bu esa, oʻz navbatida, issiqlik ishlovi natijasida 950°C da kristallitlar shakllanib oʻsishi, 1050°C da qayta tashkillanish va parchalanish jarayonlari sababli kristallit oʻlchamining vaqtinchalik kamayishi, 1150°C da esa atomlarning harakatchanligi va Ostwald Ripening jarayoni kuchayib, kattaroq oʻlchamdagi kristallitlar shakllanishini koʻrsatadi.

III. XULOSA.

Olib borilgan rentgenodifraksion tadqiqotlar Choxralskiy usulida oʻstirilgan p-Si monokristallarida issiqlik ishlovi harorati ortishi bilan kristall panjara tuzilmaviy holati sezilarli darajada oʻzgarishini koʻrsatdi. 950–1150°C haroratlarda oraligʻida berilgan issiqlik ishlovlari natijasida kislorodli komplekslar, SiO₂ va SiOx klasterlari hamda ikkilamchi fazalarning shakllanishi kuchayib, panjara doimiysi ortishi va mikrokuchlanishlarning paydo boʻlishiga olib kelishi aniqlandi. Subkristallitlar oʻlchamining haroratga bogʻliq ravishda oʻzgarishi, shuningdek B₂O₃ va SiB₆ fazalarining aniqlanishi kislorod va bor atomlarining diffuziyasi hamda ularning oʻzaro taʼsiri kristallning fazaviy va mexanik barqarorligini belgilovchi asosiy omillardan biri ekanligini tasdiqlaydi. Olingan natijalar issiqlik ishlovi rejimlarini optimallashtirish orqali p-tip kremniy

monokristallarining tuzilmaviy sifati va nanoelektronika qurilmalarida qoʻllash samaradorligini oshirish imkonini beradi.

Adabiyotlar

1. Falster, R., Voronkov, V. V. (2021). Oxygen-related defects and microdefect formation in Czochralski-grown silicon // *Journal of Crystal Growth*. Vol. 572, 126276. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcrysgro.2021.126276>
2. Shindoh, T., Yamada, T., Saitoh, K. (2022). Thermal treatment effects on oxygen precipitation and lattice strain in p-type silicon // *Semiconductor Science and Technology*. Vol. 37. No. 9, 095012. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-6641/ac7c3e>
3. Nakamura, M., Takahashi, J., Kimura, S. (2023). X-ray diffraction analysis of oxygen-induced microstrain in single-crystal silicon // *Materials Science in Semiconductor Processing*. Vol. 158, 107264. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mssp.2023.107264>
4. Li, Y., Wang, H., Zhou, X. (2024). Evolution of SiO₂ precipitates and subgrain structures in annealed silicon crystals // *Applied Surface Science*. Vol. 640, 158899. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2024.158899>
5. Boboev, A. Y., Ergashev, B. M., Yunusaliyev, N. Y., Xotamov, M. M. (2025). Study of the formation of low-dimensional defect states in single-crystal silicon with the participation of oxygen // *East European Journal of Physics*. Vol. 2. No. 5. pp. 299–306. DOI: <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2025-2-36>
6. Zhang, L., Chen, Q., Liu, Y. (2022). Microstructural evolution and oxygen-related complexes in boron-doped silicon // *Journal of Applied Physics*. Vol. 131. No. 18, 185703. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0087426>
7. Boboev, A. Y., Maxmudov, X. A., Yunusaliyev, N. Y., Ergashev, B. M., Madaminjonov, J. S. (2025). Electrophysical nature of defects in silicon caused by implanted platinum atoms // *East European Journal of Physics*. Vol. 2. No. 5. pp. 431–435. DOI: <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2025-2-53>
8. Kim, J. H., Park, S. H., Lee, D. K. (2023). Formation of oxygen clusters and nanodefects in thermally treated silicon crystals // *Crystals*. Vol. 13. No. 4, 612. DOI: <https://doi.org/10.3390/cryst13040612>
9. Boboev, A. Y., Ergashev, B. M., Yunusaliyev, N. Y., Tojiboyev, G. G., Abdulkhaev, F. A. (2025). SRIM simulation of cobalt ions interaction with ZnO-based thin films // *Journal of Ovonic Research*. Vol. 21. No. 4. pp. 481–493. <https://doi.org/10.15251/JOR.2025.214.481>
10. Huang, X., Sun, Z., Li, P. (2024). Annealing-driven phase formation and defect redistribution in doped silicon crystals // *Materials Today Communications*. Vol. 38, 107812.

Mualliflar haqida maʼlumot1.

1. Ergashev Biloliddin – Andijon davlat pedagogika instituti, Fizika va texnologik taʼlim kafedrası. E-mail: ergashev_biloliddi@mail.ru Tel.: +99899-936-02-01;

TERMOJUFT SHOXCHALARDA TOK ZICHLIGI O'ZGARISHINING ISSIQLIK JARAYONLARIGA TA'SIRINI TADQIQ ETISH

A.M. Kasimaxunova, M.A. Norbo'tayev, S.I. Norbo'tayeva

Farg'ona davlat texnika universiteti, O'zbekiston, 150100, Farg'ona sh, Farg'ona ko'chasi 86 uy

2025-yil 1-noyabrda berilgan; 2025-yil 10-dekabrda chop etish uchun qabul qilingan.

Аннотация. В данной статье смоделировано влияние изменения плотности электрического тока на процессы теплообмена в ветвях термоэлектрического генератора. Моделирование проводилось с использованием программного пакета COMSOL Multiphysics. В ходе исследования был проанализирован распределение тепла и температуры внутри термопары при различных плотностях тока. Этот параметр имеет важное значение для оптимизации эффективности термоэлектрических генераторов. Кроме того, в статье рассмотрены процессы формирования электрических токов в термоэлектрических элементах, теплопроводность в твердых телах, термоэлектрический эффект, источники электромагнитного тепла и процессы температурной связи.

Ключевые слова: термоэлектрический генератор, COMSOL Multiphysics, термопара, распределение температуры, оптимизация эффективности.

Annotatsiya: Ushbu maqolada termoelektrik generator shoxchalarida elektr tok zichligi o'zgarishining uning hajmidagi issiqlik almashinuvi jarayonlariga ta'siri modellashirilgan. Modellash ishlarida COMSOL Multiphysics dasturiy paketi qo'llanilgan. Tadqiqot davomida turli tok zichliklari ostida termojuft ichidagi issiqlik va harorat taqsimoti tahlil qilindi. Ushbu parametrlar termoelektrik generatorlarning samaradorligini optimallashtirishda muhim ahamiyatga ega. Shuningdek, maqolada termojuft elementlarida elektr toklarining shakllanishi, qattiq jismlarda issiqlik o'tkazilishi, termoelektrik effekt, elektromagnit issiqlik manbalari va harorat bog'lanishlari jarayonlari yoritilgan.

Kalit so'zlar: termoelektrik generator, COMSOL Multiphysics, termojuft, harorat taqsimoti, samaradorlikni optimallashtirish.

Annotation. This article models the influence of changes in electric current density on the heat transfer processes within thermoelectric generator branches. The modeling was carried out using the COMSOL Multiphysics software package. During the study, the distribution of heat and temperature within the thermocouple under various current densities was analyzed. This parameter is of significant importance for optimizing the efficiency of thermoelectric generators. Additionally, the article discusses the formation of electric currents in thermoelectric elements, heat conduction in solids, the thermoelectric effect, electromagnetic heat sources, and temperature coupling processes.

Key words: thermoelectric generator, COMSOL Multiphysics, thermocouple, temperature distribution, efficiency optimization.

I. KIRISH. So'nggi yillarda energiya sohasidagi asosiy yo'nalishlardan biri milliy iqtisodiyotning barcha tarmoqlariga uzluksiz elektr ta'minotini ta'minlash masalasi hisoblanadi. Shu munosabat bilan uzluksiz elektr ta'minotining eng dolzarb muammolaridan biri — elektr energiyasini ishlab chiqaruvchi qurilmalarni qo'llash va ularni takomillashtirishdir. Albatta, qurilma texnik nuqtai nazardan xavfsiz bo'lishi, atrof-muhitga zararli ta'sir ko'rsatmasligi va alternativ energiya manbalaridan maksimal darajada foydalanish imkoniyatini berishi zarur.

Bugungi muammolarni hal qilishning bir yo'li sifatida 1821-yilda Zeebek tomonidan kashf etilgan fizik jarayonga asoslangan termoelektrik generatorlar (TEG) xizmat qiladi [1; 131–138-b, 2; 442–451-b].

Oldingi ishlarimizda ta'kidlanganidek [3; 302–308-b, 4; 269–273-b], termoelektrik generatorlar issiqlik energiyasini elektr energiyasiga samarali aylantirishda asosiy manba hisoblanadi. TEGlar deyarli har qanday

muhitda, harorat farqi yaratish mumkin bo'lgan joylarda qo'llanilishi mumkin [5; 89–94-b]. Shu bilan birga, ular uy xo'jaliklari uchun qo'shimcha elektr manbai sifatida ham xizmat qiladi [6; 128–136-b].

TEGlar avtonom elektr ta'minoti talab qilinadigan monitoring tizimlari, tibbiy asboblari va boshqa qurilmalar uchun istiqbolli qurilmalardir. Individual qozonlardan isitish maqsadida foydalangan uy xo'jaliklarida TEGlar sovitish, isitish va oziq-ovqat mahsulotlarini haroratini barqarorlashtirish uchun ham ishlatilishi mumkin [7; 26–30-b].

Garchi TEGlarning qo'llanilish doirasi keng bo'lsa-da, ularning samaradorligi hozirgi kunda yetarli darajada emas. Birinchi termoelektrik generatorlarning samaradorligi 2% dan oshmagan bo'lsa, zamonaviy ko'p bosqichli issiqlik generatorlari 13% gacha samaradorlikka ega. Yangi yarimo'tkazgich materiallari va ularning tuzilmasini takomillashtirish hisobiga bu ko'rsatkich 20% va undan yuqori bo'lishi kutilmoqda [8; 81–105].

Ushbu maqsadga erishish uchun ko'pchilik tadqiqotlar yarimo'tkazgich materiallarning optimal stekiommetrik tarkibini aniqlash, ishlab chiqarish texnologiyalarini takomillashtirish va qo'llanilish sohaslarini kengaytirishga qaratilgan. Shuningdek, termoyadro strukturasiga ega yangi nanomateriallar ishlab chiqilmoqda, ular issiqlik o'tkazish xususiyatlarini yaxshilaydi.

Biroq termojuftni tadqiq qilish, tayyorlash va ishlab chiqarish jarayoni katta kuch, sarmoya va laboratoriya uskunalarini talab qiladi. TEG parametrlarini hisoblash ko'plab omillar, jumladan, TEG materiali, uning elektr parametrlar, geometrik o'lchamlari va elektr hamda issiqlik xususiyatlari nisbati bilan murakkablashadi. Ushbu muammolarni hal qilishda simulyatsiya ishlatiladi, bu esa ishlab chiqarishdan oldin termojuft elementlarining parametrlarini optimallashtirishga imkon beradi va ko'plab iteratsiyalarni kamaytiradi [9; 45–54-b].

II. ADABIYOTLAR TAHLILI

Ushbu tadqiqotda yuqori aniqlik va hisoblash samaradorligini ta'minlash uchun mos modellashtirish yondashuvi tanlanishi muhimdir. Ko'plab tadqiqotlar turli matematik va kompyuter yordamida modellashtirish usullaridan foydalangan.

Masalan, Kaljadin va Korolev [10; 38–45-b] halqa geometriyasiga ega termoelektrik generatorning matematik modelini ishlab chiqqan, bu TEG modullarining strukturaviy xususiyatlarini tahlil qilish imkonini beradi. Shuningdek, Vinogradov, Halykov va Doan [11; 84–91-b] eksperimental TEG parametrlarini hisoblash va baholash metodologiyasini taklif qilgan, diqqatni dizayn optimallashtirishga qaratgan.

Zamonaviy yondashuvlar ko'proq kompyuter simulyatsiyasiga asoslangan. Habirov va Vohmin [12; 151–159-b], Korotkov va boshq. [13; 142–150-b] bismut va antimon telluridlariga asoslangan mikro-TEGlarni modellashtirish uchun ANSYS Workbench dasturiy platformasidan foydalanish imkoniyatlarini ko'rsatgan.

Kostarev va boshq. [14; 241–248-b] radioizotop termoelektrik generator (RTG)ni modellashtirgan, unda tabiiy aylanish asosidagi sovutish jarayoni simulyatsiya qilingan.

Buslaev va Loboda [15; 7–20-b] Uni-Leg tuzilmasidagi magniy silitsid asosidagi TEGni modellashtirgan.

Ushbu ishlarni solishtirish orqali turli modellashtirish usullarining afzalliklari va cheklovlari aniqlanadi. Shu munosabat bilan COMSOL Multiphysics dasturi eng maqbul va samarali vosita hisoblanadi, chunki u multiphysik bog'lanish, yuqori aniqlik va geometriya hamda material parametrlarini moslashuvchan aniqlash imkonini beradi.

III. MASALANING QO'YILISHI

Ushbu tadqiqotda termoelektrik generator (TEG) elementlarini modellashtirish va tok zichligini oshirishning ularning issiqlik xatti-harakatlariga ta'sirini tahlil qilish uchun COMSOL Multiphysics dasturiy paketi qo'llanildi. COMSOL Multiphysics tanlovi uning integrallashgan multiphizik yondashuvi bilan izohlanadi, bu esa elektr, issiqlik va termoelektrik jarayonlarni bir vaqtda hisobga olish imkonini beradi va natijalar yuqori aniqlik hamda fizik moslikka ega bo'lishini ta'minlaydi.

Modellashtirish yondashuvi va algoritmi

Raqamli modellashtirish chegaraviy elementlar usuli (FEM) asosida amalga oshirildi, bu COMSOL Multiphysics'ning asosiy hisoblash texnikasini tashkil qiladi. Quyidagi algoritm qabul qilindi:

Geometriya yaratish – p- va n-turdagi termoelektrik shoxchalarning tegishli o'lchamlardagi 3D modellarini yaratish.

Materiallarni aniqlash – bismut tellurid (Bi_2Te_3) va antimon tellurid (Sb_2Te_3) materiallarining xususiyatlari kiritildi, jumladan, haroratga bog'liq issiqlik o'tkazuvchanligi, Zeebek koeffitsienti va elektr o'tkazuvchanligi.

Fizika modullarini tanlash – bog'langan modullar faollashtirildi (2-bo'limda ta'riflangan).

Chegara sharoitlarini belgilash – issiq va sovuq tomon haroratlari, elektr tokining kirish shartlari va issiqlik izolyatsiyasi sharoitlari aniqlandi.

Tarmoq yaratish (Meshing) – harorat yoki tok gradientlari keskin bo'lgan hududlarda aniqlikni ta'minlash uchun moslashuvchan tarmoq texnikalari qo'llanildi.

Hisoblash va post-protsessing – iteratsion yechimlar yordamida harorat taqsimoti, issiqlik oqimi, elektr potentsial va samaradorlik ko'rsatkichlari hisoblandi.

Fizik modullari va ularning integratsiyasi.

TEG elementlarida issiqlik va zaryad tashish jarayonlarining o'zaro bog'liqligini aniq modellashtirish uchun bir nechta COMSOL modullari birlashtirildi:

Qattiq jismlarda issiqlik uzatish – termoelektrik shoxchalardagi harorat gradientlarini hisobga olgan holda issiqlik o'tkazuvchanligi tenglamalarini yechish.

Elektr toklari – p- va n-turdagi shoxchalarda elektr tok zichligini modellashtirish.

Termoelektrik effekt (multiphysics coupling node) – issiqlik va zaryad tashish jarayonlarini bog'lash, Zeebek, Peltier va Thomson effektlarini hisobga olish.

Chegara issiqlik manbai – tok oqimi natijasida Joule isishi orqali yuzaga keladigan lokal isitish effektlarini kiritish.

Ushbu multiphizik integratsiya temperatura va potentsial maydonlarini o'zaro mos holda hisoblashni ta'minlaydi va termoelektrik qurilmalarning haqiqiy ishlash sharoitlarini aks ettiradi.

Zeebek effekti – harorat gradienti natijasida elektromotor kuch hosil bo'lishi.

Peltier effekti – tok oqimi ostida turli materiallarning bog'lanish joylarida isitish yoki sovutish.

Thomson effekti – harorat gradientiga ega o'tkazgich bo'ylab qo'shimcha isitish yoki sovutish.

Joule isishi – tok zichligi natijasida rezistiv isitish.

Ushbu effektlar bir vaqtda hisobga olinganda, model termoelektrik energiyani aylantirish samaradorligini aniq aks ettiradi.

Usulning afzalliklari

➤ An'anaviy analitik yondashuvlar va soddalashtirilgan raqamli modellarga nisbatan [10–15]:

➤ Haroratga bog'liq no-chiziqli material xususiyatlarini yuqori aniqlikda hisobga olish.

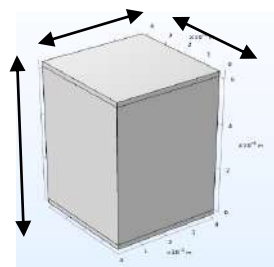
➤ TEG modullarining turli geometrik konfiguratsiyalarini simulyatsiya qilishdagi moslashuvchanlik.

➤ Issiqlik uzatilishini turli rejimlarda (o'tkazuvchanlik, konveksiya, nurlanish) tahlil qilish imkoniyati.

➤ Harorat maydonlari, tok taqsimoti va issiqlik gradientlarini samarali vizualizatsiya qilish orqali optimallashtirish.

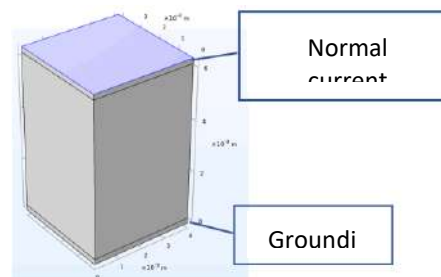
IV. TADQIQOT NATIJALARI

COMSOL Multiphysics dasturining imkoniyatlarini hisobga olib, termoelektrik generator elementlarida tok zichligini oshirishning issiqlik taqsimotiga ta'sirini modellashtirish uchun dastur ishga tushirildi va uning geometrik o'lchamlari kiritildi. Geometrik o'lchamlar konstant yoki o'zgaruvchi parametr sifatida kiritilishi mumkin (1-rasm). Bu jarayonlarni to'g'irlash va optimallashtirishga, shuningdek, termoelektrik generatorning samaradorligini oshirish uchun uning geometrik o'lchamlarini o'zgartirishga imkon beradi.



1-rasm. COMSOL Multiphysics dasturiy vositasidan foydalanib termoelektrik generator elementining geometrik o'lchamlarini kiritish.

2-rasmda dastur tomonidan kirish parametrlari qanday belgilanib, tushuntirilgani ko'rsatilgan. Misol uchun, termoelektrik generator parallelepiped shaklida olingan, uning geometrik o'lchamlari A (asos eni), B (asos uzunligi), H (element balandligi) o'zgaruvchilar orqali aniqlangan va dastlab 4 mm, 4 mm va 6 mm sifatida belgilangan. Tok zichligi J_0 bilan, asosiy harorat T_0 (sovuq uch) 20°C deb qabul qilingan.



2-rasm. COMSOL Multiphysics dasturiy vositasidan foydalanib termoelektrik generator elementining elektr tokini parametrizatsiya qilish

Keyin dastur imkoniyatlaridan foydalanib, termoelektrik generatorning tarkibiy materiallari va kontakt plastinalarining materiallari tanlandi. E'tiborga molik yana bir xususiyat shundaki, dastur termoelektrik generator elementlarini yaratishda ishlatiladigan barcha kimyoviy va fizik parametrlarni (Bi, Te, Sb...) o'z ichiga oladi. Bu nazariy tadqiqot natijalarini yuqori aniqlik bilan olish va ortiqcha ma'lumot kiritishga sarflanadigan vaqtni tejash imkonini beradi.

Parametrlar: temir qatlamlari, kontakt qoplamasi qalinligi 0,2 mm; tok zichligi: 10–200 A/cm²; asosiy harorat: 20°C; temirning zeebek koeffitsienti: 6,5 mV/k.

Termoelement materiali: bismut tellurid.

Termoelektrik generator elementlaridagi elektr tok parametrlari – “Tokni saqlash” (Current conservation), “Elektr izolyatsiyasi” (Electrical insulation), “Boshlang'ich qiymatlar” (Initial values), “Yer” (Earth), “Oddiy tok zichligi” (Normal current density) – dasturdagi “Elektr toklari” (Electric currents) bo'limidan sozlanadi va elektr tokining boshlang'ich qiymatlari kiritiladi.

2-rasmda elektr tok parametrlarini sozlash jarayoni ko'rsatilgan. Termojuftlarda tok oqimi Peltier effekti natijasida harorat farqining yuzaga kelishiga sabab bo'ladi, va dastur $\nabla J = Q_{\text{J}}, V$ tenglamasi asosida quyidagi formulalarga muvofiq hisoblashlarni amalga oshiradi:

$$J = \sigma E + J_e \text{ va } E = -\nabla V$$

Bu jarayonlar tok va harorat maydonlarining haqiqiy taqsimotini modellashtirishga imkon beradi.

Modelimizni yaratishda keyingi jarayon – “Qattiq jismlarda issiqlik uzatish” (Heat Transfer in Solids) dastur parametrlarini sozlashdir. Termojuftlardagi harorat gradienti Zeebek effekti natijasida termo-elektromotor kuchi (thermo-EMF) paydo bo'lishiga sabab bo'lishini tushungan holda, dastur bu jarayonni quyidagi formulalar qonunlariga muvofiq amalga oshiradi.

$$\rho C_p u \cdot \nabla T + \nabla \cdot q = Q + Q_{\text{ted}} \quad (1)$$

$$q = -k \nabla T \quad (2)$$

Model yaratish jarayonining navbatdagi bosqichi – dasturning “Multiphysics”

bo'limidan “Termoelektrik effekt” va “Elektromagnit isitish” parametrlarini sozlashdir. Termoelektrik ta'sir jarayonlari quidagi formulalariga muvofiq amalga oshiriladi:

$$C_p \frac{dT}{dt} + \nabla(-k \nabla T + PJ) = Q, q = PJ \quad (3)$$

Elektromagnit isitish esa quyidagi formulalar orqali hisoblanadi:

$$J_e = -\sigma \nabla T, Q_e = J \cdot E \quad (4)$$

Yuqorida biz termojuft o'lchamlari bo'ylab sodir bo'ladigan fizik jarayonlar bilan bog'liq barcha holatlarni ko'rish imkonini beruvchi hodisalarni tahlil qildik. Endi esa bu jarayonlarni amalga kuzatish va natijalar chiqarish imkonini beruvchi protsedurani bajarish vaqti keldi. Buning uchun dasturdagi “Training” bo'limiga o'tamiz.

Bizning tadqiqotimizda bu ish ikki xil holat bo'yicha amalga oshirildi:

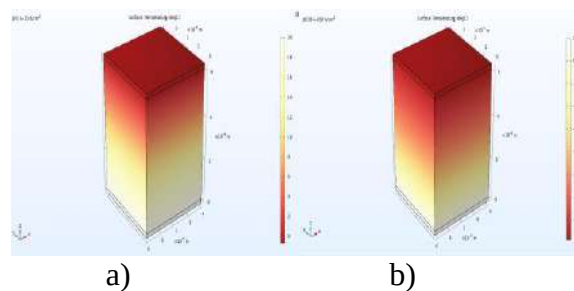
1. Birinchi holatda elektromagnit isitish, ya'ni qarshilik yo'qotishlari (resistive losses) hisobga olinmadi.

2. Ikkinchi holatda esa qarshilik yo'qotishlari hisobga olindi.

Shuningdek, ushbu bo'limga tadqiqotimizning optimizatsiya jarayoni uchun “Optimize” funksiyasi qo'shildi. Tadqiqotimizni optimizatsiya qilish jarayonida SNOPT metodi qo'llanildi.

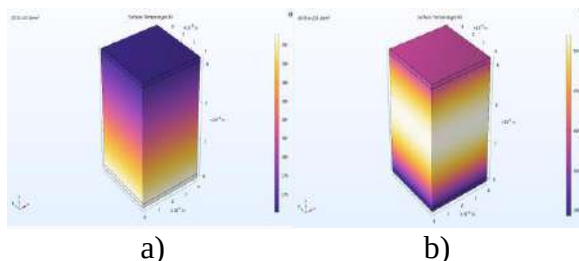
V. TADQIQOT NATIJALARINI TAHLILI

Simulyatsiya natijasida olingan TB (termojuft batareyasi) elementlarida tok zichligini o'zgartirish orqali termojuft ichida yuzaga keladigan o'zgarishlarni va issiqlik taqsimotini tahlil qilish imkoniyati 3a, 3b, 4a, 4b-rasmlarda ko'rsatilgan.



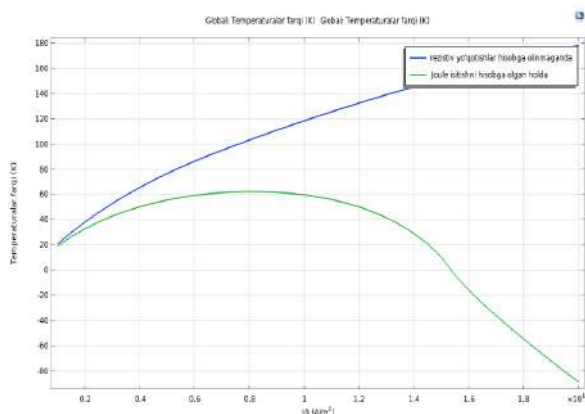
3-rasm. Tok zichligini o'zgartirishning haroratga ta'siri (qarshilik yo'qotishlari hisobga olinmagan): a) Tok zichligi 10 A/cm²; b) Tok zichligi 200 A/cm²

Agar 3a va 3b-rasmlarga e'tibor bersak, qarshilik yo'qotishlari hisobga olinmagan holatda, tok zichligi oshgan sayin termoelementlarda harorat farqi sezilarli darajada oshmaydi. Albatta, real jarayonlarda qarshilik yo'qotishlarini hisobga olish zarur.



4-rasm. Tok zichligini o'zgartirishning haroratga ta'siri (qarshilik yo'qotishlari hisobga olingan): a) Tok zichligi 10 A/cm²; b) Tok zichligi 200 A/cm²

4a va 4b-rasmlarga qaraganda, harorat farqi ma'lum bir tok zichligi qiymatigacha ortadi, so'ngra kamayishni boshlaydi. Bu holat **5-rasmdagi** grafik orqali yanada aniq ko'rinadi.



5-rasm. Termojuftlarda tok zichligini oshirishning haroratga ta'siri.

5-rasmdagi ko'k chiziq qarshilik yo'qotishlari hisobga olinmagan holatni ifodalaydi. Chiziq yo'nalishiga e'tibor bersak, harorat farqi tok zichligi oshishi bilan deyarli chiziqli tarzda ortadi. Agar yashil chiziq bilan ifodalangan qarshilik yo'qotishlari hisobga olinsa, yuqorida aytilgan holatlar aniq tasdiqlanadi.

VI. XULOSA.

Xulosa qilib aytganda, bugungi kunda modellashtirish jarayonlari ilm-fan rivojlanishida muhim rol o'ynaydi. Hozirgi kunda turli yo'nalishlarda modellashtirish uchun ko'plab dasturiy vositalar mavjud. Bizning tadqiqotimizda COMSOL

Multiphysics dasturi yordamida turli termojuft parametrlarini tahlil qilish imkoniyati yaratildi va quyidagi natijalarga erishildi:

1. Tok zichligi o'zgarishi termojuftlardagi harorat farqiga ta'sir qilishi aniqlangan;
2. Eng katta harorat farqi 4 mm × 4 mm × 6 mm o'lchamli termojuftda 81,218 A/cm² tok zichligida kuzatilgan.

Adabiyotlar

1. Шостаковский, П. Термоэлектрические источники альтернативного электропитания // *Компоненты и технологии*. – 2010. – №113. – С. 131–138.
2. Шелехов, И. Ю., Дорофеева, Н. Л., Смирнов, Е. И., & Дорофеева, А. А. Возобновляемые источники энергии: новые возможности использования термоэлектрических генераторов // *Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость*. – 2020. – Т. 10. – №3 (34). – С. 442–451.
3. Kasimaxunova, A. M., Norbutaev, M., & Baratova, M. Thermoelectric generator for rural conditions // *Scientific Progress*. – 2021. – Vol. 2. – No. 6. – P. 302–308.
4. Abdurasulovich, N. M. O'zbekistonda termoelektrik generatorlardan foydalanish istiqbollari // *So'ngi ilmiy tadqiqotlar nazariyasi*. – 2022. – Vol. 5. – No. 1. – P. 269–273.
5. Виноградов, С. В., Горбачёв, М. М., & Халыков, К. Р. Проектирование термоэлектрического генератора, работающего от теплоты выхлопных газов судовых дизелей // *Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Морская техника и технология*. – 2010. – №1. – С. 89–94.
6. Mamur, H., & Ahiska, R. A review: Thermoelectric generators in renewable energy // *International Journal of Renewable Energy Research*. – 2014. – Vol. 4. – No. 1. – P. 128–136.
7. Тимофеев, В. Н., & Тихонов, Н. Ф. Использование термоэлектрических генераторов в условиях удалённых от постоянного электроснабжения // *European Science*. – 2016. – №3 (13). – С. 26–30.
8. Хвесюк, В. И., Останко, Д. А., Скрыбин, А. С., Цыганков, П. А., Челмодеев, Р. И., &

Чирков, А. Ю. Предельная эффективность термоэлектрического преобразования теплоты в высокотемпературных энергоустановках // *Машиностроение и компьютерные технологии*. – 2016. – №3. – С. 81–105.

9. Bitschi, A. *Modelling of thermoelectric devices for electric power generation*. Doctoral dissertation, ETH Zurich, 2009.

10. Калядин, О. В., & Королев, К. Г. Математическая модель термоэлектрического генераторного модуля кольцевой геометрии // *Вестник Воронежского государственного технического университета*. – 2018. – Т. 14. – №6. – С. 38–45.

11. Виноградов, С. В., Халыков, К. Р., & Доан, Н. К. Методика расчёта и оценки параметров экспериментального термоэлектрического генератора // *Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Морская техника и технология*. – 2011. – №1. – С. 84–91.

12. Хабиров, Ф. Ф., & Вохмин, В. С. Моделирование работы термоэлектрического генератора в программном комплексе Ansys Workbench // *Известия Санкт-Петербургского государственного аграрного университета*. – 2024. – №1 (75). – С. 151–159.

13. Коротков, А. С., Лобода, В. В., Макаров, С. Б., & Фельдхофф, А. Моделирование термоэлектрических генераторов с использованием программной платформы ANSYS: методики, практические приложения, перспективы // *Микроэлектроника*. – 2017. – Т. 46. – №2. – С. 142–150.

14. Костарев, В. С., Климова, В. А., & Ташлыков, О. Л. Моделирование процесса естественного охлаждения радиоизотопного термоэлектрического генератора // *Атомная энергия*. – 2017. – Т. 123. – №4. – С. 241–248.

15. Буслаев, Р. Д., & Лобода, В. В. Моделирование термоэлектрического генератора на основе силицида магния по структуре Uni-Leg // *Информатика, телекоммуникации и управление*. – 2019. – Т. 12. – №1. – С. 7–20.

16. Hashim, H., Bomphrey, J. J., & Min, G. Model for geometry optimisation of

thermoelectric devices in a hybrid PV/TE system // *Renewable Energy*. – 2016. – Vol. 87. – P. 458–463.

17. Riffat, S. B., & Ma, X. Thermoelectrics: a review of present and potential applications // *Applied Thermal Engineering*. – 2003. – Vol. 23. – No. 8. – P. 913–935.

18. Марченко, О. В., Кашин, А. П., Лозбин, В. И., & Максимов, М. З. *Методы расчёта термоэлектрических генераторов*. Москва: Энергоатомиздат, 1995. – 240 с.

Mualliflar haqida ma'lumot

1. Kasimaxunova Anarxan Mamasodikovna – t.f.d.prof., Farg'ona davlat texnika universiteti. Tel.: +99890-290-01-98;

1. Norbo'tayev Ma'sudjon Abdurasulovich – f.-m.f. PhD., katta o'qituvchi, Farg'ona davlat texnika universiteti. E-mail: nmasudjon@gmail.com Tel.: +99893-737-91-08;

1. Norbo'tayeva Sarvinoz Ismatillayevna – tyutor, Farg'ona davlat texnika universiteti. Tel.: +99893-971-87-77;

O'ZGARUVCHAN KUCHSIZ MAGNIT MAYDONDAGI KVANT O'RALI YARIMO'TKAZGICHLARDA BIRINCHI LANDAU SATHINING VAQT BO'YICHA O'ZGARISHI

U.I. Erkaboev, U. M. Negmatov

Namangan davlat texnika universiteti, O'zbekiston, Namangan shaxri, I.Karimov shox-ko'chasi, 12-uy. 160100

2025-yil 2-noyabrda berilgan; 2025-yil 28-noyabrda chop etish uchun qabul qilingan.

Annotatsiya. Ushbu maqolada kvant o'rali yarimo'tkazgichlarning o'tkazuvchanlik zonasida hosil bo'ladigan birinchi diskret Landau sathining statik va o'zgaruvchan kuchsiz magnit maydonlar ta'siridagi vaqt bo'yicha o'zgarish dinamikasi nazariy jihatdan tadqiq etilgan. Statik magnit maydon sharoitida birinchi Landau sathining energiyasi vaqtga bog'liq bo'lmasligi, o'zgaruvchan kuchsiz magnit maydon ta'sirida esa ushbu sath energiyasining garmonik ravishda tebranib turishi ko'rsatib berilgan. Dinamik magnit maydon sharoitida birinchi Landau sathining vaqt bo'yicha o'zgarish tezligi aniqlanib, uning faqat magnit maydon induksiyasining amplituda qiymatiga va Landau sathining tartib raqamiga bog'liq ekanligi isbotlangan. Olingan natijalar sonli tahlillar asosida grafiklar orqali tasdiqlangan. Tadqiqot natijalari past o'lchamli yarimo'tkazgich tizimlarida kvant ossilyatsiya jarayonlarini tushuntirish va ularni fazaviy tahlil qilishda muhim ilmiy ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: : kvant o'ra; Landau sathlari; kuchsiz magnit maydon; o'zgaruvchan magnit maydon; kvant ossilyatsiya; energetik spektr; past o'lchamli yarimo'tkazgichlar; fazaviy tahlil.

Аннотация: В данной статье теоретически исследована динамика изменения во времени первого дискретного уровня Ландау, формирующегося в зоне проводимости квантово-ямных полупроводников, под воздействием статических и переменных слабых магнитных полей. Показано, что в условиях статического магнитного поля энергия первого уровня Ландау не зависит от времени, тогда как при воздействии переменного слабого магнитного поля энергия данного уровня испытывает гармонические колебания. В условиях динамического магнитного поля определена скорость временного изменения первого уровня Ландау и доказано, что она зависит исключительно от амплитуды магнитной индукции и порядкового номера уровня Ландау. Полученные результаты подтверждены на основе численного анализа с использованием графических построений. Результаты исследования имеют важное научное значение для понимания квантовых осцилляционных процессов в низкоразмерных полупроводниковых системах и их фазового анализа.

Ключевые слова: квантовая яма; уровни Ландау; слабое магнитное поле; переменное магнитное поле; квантовые осцилляции; энергетический спектр; низкоразмерные полупроводники; фазовый анализ.

Annotation. This article presents a theoretical study of the time-dependent dynamics of the first discrete Landau level formed in the conduction band of quantum-well semiconductors under the influence of static and weak alternating magnetic fields. It is shown that under a static magnetic field the energy of the first Landau level is time-independent, whereas under the action of a weak alternating magnetic field the energy of this level undergoes harmonic oscillations. Under dynamic magnetic-field conditions, the rate of temporal variation of the first Landau level is determined, and it is proven that it depends exclusively on the amplitude of the magnetic induction and the Landau level index. The obtained results are confirmed by numerical analysis using graphical representations. The results of the study are of significant scientific interest for understanding quantum oscillatory processes in low-dimensional semiconductor systems and for their phase analysis.

Keywords: quantum well; Landau levels; weak magnetic field; alternating magnetic field; quantum oscillations; energy spectrum; low-dimensional semiconductors; phase analysis.

KIRISH

Aytaylik, dinamik magnit maydon vaqt o'tishi bilan magnit maydon induksiyasi sinusoidal o'zgarmoqda. Unda, kvant o'raning ruxsat etilgan zonlardagi diskret energetik sathlar vaqtga kuchli bog'liq bo'ladi [1,2,3]. Shu sinusoidal qonuniyatni bajarayotgan formuladan, vaqt bo'yicha hosila olsak, E_n -ni o'zgarish tezligi kelib chiqadi [1,2,3]:

$$\frac{dE_n(\omega_c t, N_L)}{dt} = \omega_c \cdot \left(N_L + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{e \cdot B_0 \cdot \cos(\omega_c t)}{m^*}. \quad (1)$$

(1) ifodadan ko'rinib turibdiki, diskret energetik sathlarni o'zgarish tezligi $\frac{dE_n}{dt}$ dinamik magnit maydon induksiyasining amplituda qiymatiga va Landau sathlari soniga bog'liq bo'lmoqda. Lekin, kvant o'raning qalinligi d va o'lchamli kvantlar soni n_z ning

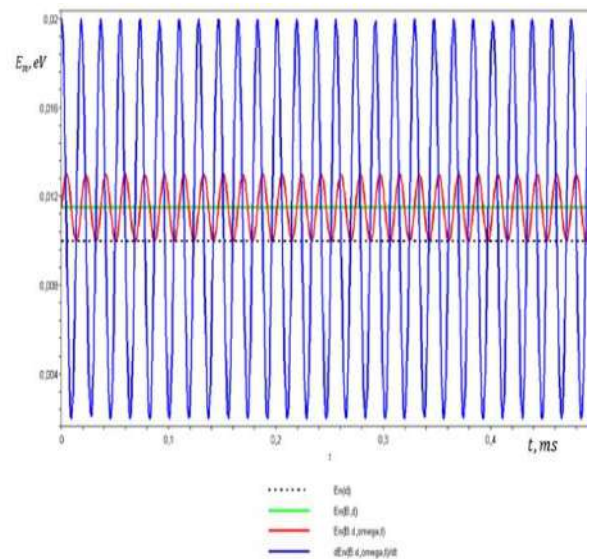
o'zgarish $\frac{dE_n}{dt}$ ga umuman ta'sir etmayapti. Buni fizik ma'nosi quyidagicha tushuntiriladi: $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* d^2} n_z$, ($n_z = 1$) ning qiymati kuchsiz dinamik magnit maydon energiyasiga nisbatan ko'p marta kattaradi, ya'ni:

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* d^2} n_z (n_z = 1) \gg \left(N_L + \frac{1}{2}\right) \hbar \frac{eB}{m^*}. \quad (2)$$

(2) dan ko'rinib turibdiki, kuchsiz dinamik magnit maydon hosil qilgan har bir diskret Landau sathlari kvant o'raning ($n_z = 1$) birinchi o'lchamli sathiga nisbatan juda yaqin joylashgan bo'ladi. ($E_{n_z}(n_z = 1)$ ning shipida bo'ladi). Xulosa qilib, aytish mumkinki, faqatgina bizning hisobimiz uchun $n_z = 1$ ni o'zi yetarli (ya'ni, $E_{n_z} = \text{const}$).

Keling endi sonli tahlillar olib boraylik. 1-rasmda 4 xil grafik keltirilgan. Qora rangdagi (nuqtali) chiziq vaqtga bog'liq bo'lmagan va magnit maydon $B = 0$ dagi $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* d^2} n_z^2$ energiyaning grafigidir. Bir qator hisoblarga ko'ra, u $E_n = 0.0105$ eV ga teng bo'lsin ($n_z = 1$). OY o'qi bo'yicha sanoq boshini «nol» deb olinsa, u holda OX o'qiga parallel chiziq o'raning o'tkazuvchanlik zonasini tubi hisoblanadi. Agar, $d \approx 5$ nm bo'lsa, ushbu o'ra kvantlangan bo'lib, ushbu zona tubi 1-rasmdagi «qora» chiziqqa to'g'ri keladi. «Yashil» chiziq kvant o'raning OZ o'qiga parallel bo'lgan statik magnit maydon ta'siridagi $N_L = 1$ ga teng bo'lgan diskret Landau sathidir [1,2]. Bu «yashil» chiziq (1) formula bo'yicha olingan grafik hisoblanadi. Albatta, statik kuchsiz magnit maydon vaqtga bog'liq emas, ya'ni, $B_0 = 5$ mTl magnit maydon ta'sirida $E_n(B, d) = 0.011$ eV (11 meV) o'zgarish energiyaga teng bo'lmoqda. 1-rasmdagi «qizil» rangda keltirilgan grafikni ko'rib chiqaylik. Ushbu grafik, (1) formula bo'yicha olingan bo'lib, unda dinamik kuchsiz magnit maydon ta'siridagi birinchi diskret Landau sathini vaqt bo'yicha o'zgarishi ko'rsatilgan [3,4,6] ($E_n(B, t, d)$). Bunda [3,5,7] larga ko'ra, $\omega_c = 10^3$ Hz va vaqt davomiyligi $t = 0 \div 0.5$ ms kabi tanlab olingan. Ushbu «qizil» rangdagi grafikdan ko'rinib turibdiki, vaqt o'tishi bilan $E_n(B(t), d)$ ni qiymati maksimal 0.0130 eV ga teng bo'lib, minimal 0.0105 eV gacha yetib bormoqda. Vaholanki, 0.0105 eV energiya $B = 0$ dagi $E_n(d)$ ga to'g'ri keladi. Va nihoyat, 1-rasmdagi «ko'k» rangda keltirilgan grafikni

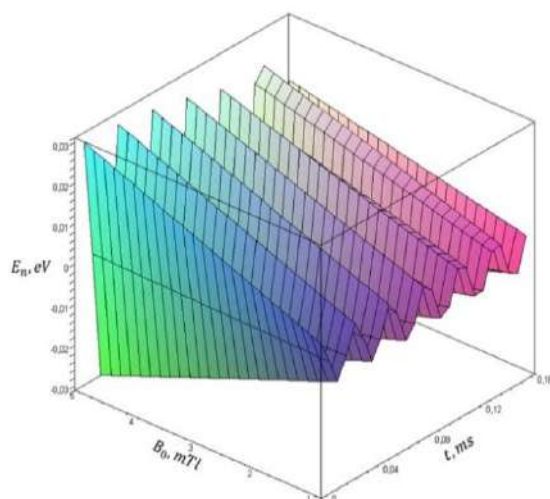
ko'raylik. Ushbu grafik $\frac{dE_n(B(t))}{dt}$ ga tegishli bo'lib, u (2) formula bo'yicha ko'rilgan. $\frac{dE_n(B(t))}{dt}$ – funksiyaning diskret Landau sathlarini vaqt bo'yicha o'zgarish tezligi deb nomlaymiz [2,3,5]. Bu tezlik shunday o'zgaradiki, uning $\frac{dE_n}{dt}(\text{max}) = 0.02$ eV gacha ($n_z = 1$ ga to'g'ri keluvchi $E_n(d)$ ga nisbatan 2 marta ko'p), $\frac{dE_n}{dt}(\text{min}) = 0.001$ eV gacha (deyarli «kvantlanmagan» o'tkazuvchanlik zonasi tubiga yaqin) garmonik o'zgarmoqda.



1-rasm. Kvant o'raning o'tkazuvchanlik zonasidagi birinchi Landau sathining statik magnit maydon va o'zgaruvchan magnit maydonlarga bog'liqligi

Demak, $\frac{dE_n(B, t)}{dt}$ o'zgarish tezligi kvant o'ra qalinligiga, o'lchamli kvantlar soniga bog'liq bo'lmasligi bilan bir qatorda, uning qiymati $E_{n_z}(d, n_z)$ ga nisbatan 2 karra ortiq bo'lishi mumkin ekan. Yoki, aksincha, $\frac{dE_n(B, t)}{dt}$ ning qiymati shunday «minimum»ga erishadiki, bu qisqa vaqtda, erkin elektronlar o'zini 3D holatdagidek his qiladi.

2-rasmda E_n ni vaqtga va kuchsiz dinamik magnit maydon induksiyasining amplitudasiga bog'liqligi ko'rsatilgan. Bunda, $B_0 = 1 \div 5$ mTl oraliq, va $t = 0 \div 0.16$ ms ta'sir vaqti tanlab olingan [1,2,6]. 2-rasmdan ko'rinib turibdiki, dinamik magnit maydon induksiyasining ta'sir qiymati ortishi bilan $\frac{dE_n}{dt}$ tezlik katta energiyalar intervalida kuchli o'zgarishi kuzatilmoqda.



2-rasm. O'zgaruvchan kuchsiz magnit maydondagi erkin elektron energiyasini ta'sir etish vaqti va magnit maydon induksiyasi amplitudasiga bog'liqligi

Xulosa:

1. Kvant o'rali yarimo'tkazgichlarning diskret energetik sathlarining o'zgarish tezligi $\frac{dE_n}{dt}$ faqatgina o'zgaruvchan kuchsiz magnit maydon induksiyasining amplituda qiymatiga

va Landau sathlari tartib raqamiga bog'liq bo'lishi isbotlandi.

2. Statik magnit maydon va dinamik kuchsiz magnit maydonlardagi kvant o'rali yarimo'tkazgichlarning o'tkazuvchanlik zonasidagi birinchi Landau sathining vaqt bo'yicha o'zgarishlarini dinamikasi solishtirildi. Natijada, kvant o'raning o'tkazuvchanlik zonasidagi erkin elektronlarning energiyasidan birinchi tartibli hosilasi $\frac{dE_n}{dt}$ eng yuqori amplitudali garmonik tebranma harakat qilishi asoslab berildi.

3. Kvant o'rali yarimo'tkazgichning diskret Landau sathlarini vaqt bo'yicha o'zgarish tezligi $\frac{dE_n(B(t))}{dt}$ dinamik kuchsiz o'zgaruvchan magnit maydon induksiyasining amplitudasiga kuchli bog'liq bo'lib, u katta energiyalar intervalida, $\frac{dE_n(B(t))}{dt}$ ni garmonik tebranma harakat amplitudasini keskin oshishiga sabab bo'lishi aniqlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

[1] Gulyamov G.G., Gulyamov A.G., Muhitdinova F.R. Influence of Recombination Centers on the Phase Portraits in Nanosized Semiconductor Films // *Journal of Modern Physics*. 2016. T.7. Pp. 1661–1667. doi:10.4236/jmp.2016.713151.

[2] Negmatov U.M. O'zgaruvchan dinamik magnit maydondagi kvant o'raning landau sathlarini vaqtga bog'liqligi // *Namangan davlat universiteti ilmiy axborotnomasi*. 2025. 5-son. 56-60 betlar (01.00.00. №14).

[3] Erkaboev U.I., Rakhimov R.G., Sayidov N.A., Mirzaev J.I. Modeling the temperature dependence of the density oscillation of energy states in two-dimensional electronic gases under the impact of longitudinal and transversal quantum magnetic fields // *Indian Journal of Physics*. 2023. Vol. 97. No. 4. Pp. 1061–1070. doi:10.1007/s12648-022-02621-4.

[4] Erkaboev U.I., Sayidov N.A., Negmatov U.M. Kvant o'rali geterostrukturali yarimo'tkazgichlarning elektr o'tkazuvchanligi ossilyatsiyalarini kuchli elektromagnit maydon va haroratga bog'liqligini modellashirish // *O'zMU xabarлари*. 2024. № 3/2. 560-562 betlar (01.00.00. №8)

[5] Фомин М.А., Головин П.А., Клячкин Л.Е., Маляренко А.М., Емельянов А.К., Баграев Н.Т. Макроскопические квантовые явления в условиях осаждения олигонуклеотидов ДНК в краевые каналы кремниевой наносандвич-структуры // *Журнал технической физики*. 2025. Т.94. №9. Сс. 1588–1596.

[6] Gulyamov G., Erkaboev U.I., Rakhimov R.G., Mirzaev J.I., Sayidov N.A. Determination of the dependence of the two-dimensional combined density of states on external factors in quantum-dimensional heterostructures // *Modern Physics Letters B*. 2023. Vol. 37. No. 10. P. 2350015. doi:10.1142/S021798492350015X.

[7] Liu Y.Z., Zhan L.H., Ma Q.Q., Ma Z.Y., Huang M.H. Effects of alternating magnetic field aging on microstructure and mechanical properties of AA2219 aluminum alloy // *Journal of Alloys and Compounds*. 2015. Vol. 647. Pp. 644–647. doi:10.1016/j.jallcom.2015.06.103

YARIMO‘TKAZGICHLI MATERIALLARDAN TAYYORLANGAN HAJMIY TERMOELEMENTLARNI TAYYORLASH IMKONIYATLARINI TADQIQ QILISH

M.A. Norbo‘tayev

Farg‘ona davlat texnika universiteti, O‘zbekiston, 150100, Farg‘ona sh, Farg‘ona ko‘chasi 86 uy

2025-yil 2-noyabrda berilgan; 2025-yil 8-dekabrda chop etish uchun qabul qilingan.

Annotatsiya. Ushbu maqolada termoelektrik batareyalar uchun p-tur o‘tkazuvchanlikka ega bo‘lgan Bi_2Te_3 – Sb_2Te_3 asosidagi yarim o‘tkazgich materiallardan hajmiy termoelementlar tayyorlash texnologik imkoniyatlari tadqiq etildi. Material tarkibining stexiometriyasi, tellur va selen bilan boyitish, shuningdek, qo‘rg‘oshin bilan legirlashning elektr va termoelektrik parametrlarga ta‘hiri eksperimental natijalar asosida tahlil qilindi. Olingan natijalar p- $\text{Bi}_{0.5}\text{Sb}_{1.5}\text{Te}_3$ asosidagi termoelementlar uchun optimal tarkib va texnologik rejimlarni aniqlash imkonini beradi.

Kalit so‘zlar: termoelektrik generator, p-tip yarim o‘tkazgich, termoelektrik samaradorlik, Bi_2Te_3 – Sb_2Te_3 , legirlash.

Аннотация. В статье исследованы технологические возможности получения объемных термоэлементов из полупроводниковых материалов на основе Bi_2Te_3 – Sb_2Te_3 с p-типом проводимости для термоэлектрических батарей. На основе экспериментальных данных проанализировано влияние стехиометрического состава, обогащения теллуром и селеном, а также легирования свинцом на электрические и термоэлектрические параметры. Полученные результаты позволяют определить оптимальные составы и технологические режимы для p- $\text{Bi}_{0.5}\text{Sb}_{1.5}\text{Te}_3$ термоэлементов.

Ключевые слова: термоэлектрический генератор, p-тип полупроводника, термоэлектрическая эффективность, Bi_2Te_3 – Sb_2Te_3 , легирование.

Annotation. This paper investigates technological approaches for the fabrication of bulk thermoelectric elements based on p-type Bi_2Te_3 – Sb_2Te_3 semiconductor materials for thermoelectric batteries. The effects of stoichiometry, tellurium and selenium enrichment, as well as lead doping on electrical and thermoelectric properties are analyzed using experimental data. The obtained results make it possible to determine optimal compositions and processing conditions for p- $\text{Bi}_{0.5}\text{Sb}_{1.5}\text{Te}_3$ thermoelectric elements.

Keywords: thermoelectric generator, p-type semiconductor, thermoelectric efficiency, Bi_2Te_3 – Sb_2Te_3 , doping.

KIRISH.

Energetika sohasida so‘nggi o‘n yilliklarda kuzatilayotgan global o‘zgarishlar, xususan, an‘anaviy yoqilg‘i-energetika resurslarining kamayib borishi, atrof-muhitga antropogen ta‘sirning kuchayishi hamda energiya samaradorligini oshirish zarurati muqobil va qayta tiklanuvchi energiya manbalariga bo‘lgan qiziqishni keskin oshirdi. Shu nuqtayi nazardan, ikkilamchi issiqlik energiya manbalaridan oqilona foydalanish masalasi zamonaviy energetikaning eng dolzarb ilmiy-texnik muammolaridan biri hisoblanadi.

Sanoat korxonalari, issiqlik elektr stansiyalari, ichki yonuv dvigatellari, metallurgiya va kimyo sanoati texnologik jarayonlarida katta miqdorda past va o‘rta haroratli issiqlik energiyasi ajralib chiqadi. Aksariyat hollarda ushbu issiqlik energiyasi foydasiz tarzda tashqi muhitga chiqarib yuboriladi. Aynan shu yo‘qotishlarni kamaytirish va energiya balansini yaxshilashda yarim o‘tkazgichli termoelektrik energiya o‘zgartirgichlar

muhim o‘rin tutadi. Termoelektrik generatorlar mexanik harakatlanuvchi qismlarga ega emasligi, shovqinsiz ishlashi, yuqori ishonchliligi va uzoq xizmat muddati bilan ajralib turadi.

Ma‘lumki, termoelektrik energiya o‘zgartirish jarayoni Zeebek effekti asosida amalga oshiriladi va materialning termoelektrik samaradorligi asosan Z yoki o‘lchamsiz ZT koeffitsiyenti bilan baholanadi. Ushbu ko‘rsatkich materialning Zeebek koeffitsiyenti, elektr o‘tkazuvchanligi hamda issiqlik o‘tkazuvchanligi kabi fundamental fizik xossalarga bevosita bog‘liq. Shu sababli yuqori ZT qiymatlariga ega bo‘lgan yangi termoelektrik materiallarni yaratish va mavjud materiallarning xossalarni optimallashtirish bo‘yicha tadqiqotlar jadal olib borilmoqda.

Past va o‘rta haroratlar (250–500 K) oralig‘ida ishlovchi termoelektrik qurilmalar uchun Bi_2Te_3 asosidagi qattiq qorishmalar hozirgi kunda eng samarali materiallar sirasiga kiradi. Ushbu materiallar asosida tayyorlangan termoelektrik generatorlar sovitish va elektr energiyasi ishlab

chiqarish tizimlarida keng qo'llanilmoqda. Ayniqsa, Sb_2Te_3 bilan legirlangan Bi_2Te_3 asosidagi p-tur yarim o'tkazgich materiallar yuqori Zeebek ko'effitsiyenti va maqbul elektr o'tkazuvchanlik qiymatlari bilan ajralib turadi.

Biroq p-tur o'tkazuvchanlikka ega bo'lgan termoelektrik materiallarni tayyorlash texnologiyasi n-tur materiallarga nisbatan ancha murakkab bo'lib, tarkibning stexiometrik muvozanatini saqlash, zaryad tashuvchilar konsentratsiyasini optimal darajada boshqarish hamda texnologik yo'qotishlarni kamaytirishni talab etadi. Xususan, ortiqcha tellur yoki boshqa legirlovchi qo'shimchalarning mavjudligi materialning elektr va termoelektrik parametrlariga salbiy ta'sir ko'rsatishi mumkin.

Shu munosabat bilan, Bi_2Te_3 – Sb_2Te_3 asosidagi hajmiy p-tur termoelementlarni tayyorlash texnologiyasini chuqur o'rganish, tellur va selen bilan boyitishning hamda qo'rg'oshin bilan legirlashning termoelektrik xossalarga ta'sirini kompleks tadqiq etish ilmiy va amaliy jihatdan muhim ahamiyatga ega. Ushbu ishda aynan shu masalalar ko'rib chiqilib, olingan natijalar asosida yuqori samaradorlikka ega bo'lgan p-tur termoelektrik elementlarni yaratish imkoniyatlari tahlil qilinadi.

MATERIALLAR VA METODLAR

Ushbu tadqiqot ishida p-tur o'tkazuvchanlikka ega bo'lgan hajmiy termoelektrik elementlarni olish uchun Bi_2Te_3 – Sb_2Te_3 tizimiga mansub yarim o'tkazgich qattiq qorishmalar tanlandi. Mazkur tizim past va o'rta haroratlar (300–500 K) oralig'ida ishlovchi termoelektrik generatorlar uchun eng istiqbolli materiallar qatoriga kiradi. Tadqiqotlarda asosiy e'tibor material tarkibining stexiometriyasini, legirlash darajasini hamda texnologik parametrlarning termoelektrik xossalarga ta'sirini aniqlashga qaratildi.

Boshlang'ich xom ashyo sifatida yuqori tozalikdagi (99,999 %) vismut (Bi), surma (Sb), tellur (Te) va selen (Se) elementlari qo'llanildi. p-tur yarim o'tkazgich materialini olish uchun dastlabki tarkib $\text{Bi}_{2-x}\text{Sb}_x\text{Te}_3$ ($x \approx 1,5$) nisbatda tanlandi. Amaliy hisob-kitoblar asosida asosiy qorishma 74 mol.% Sb_2Te_3 va 26 mol.% Bi_2Te_3 nisbatda shakllantirildi. Mazkur nisbat p-tur zaryad tashuvchilar konsentratsiyasini hosil qilish va yuqori Zeebek ko'effitsiyentiga erishish uchun maqbul deb topildi.

Materialning termoelektrik parametrlarini optimallashtirish maqsadida shix-ta tarkibiga 0,25–2,0 og'irlik % oralig'ida tellur yoki 0,10–1,10

og'irlik % miqdorda selen qo'shildi. Ayrim namunalarda texnologik barqarorlikni oshirish va yuqori haroratlarda xossalarni yaxshilash maqsadida qo'rg'oshin (Pb) 0,05–0,25 og'irlik % miqdorda legirlovchi qo'shimcha sifatida kiritildi.

Qattiq qorishmalarni olish inert muhitda eritish texnologiyasi asosida amalga oshirildi. Tayyorlangan shix-ta vakuumlangan va argon gazi bilan to'ldirilgan kvarts tigellarga joylashtirildi. Eritish jarayoni 850–900 °C harorat oralig'ida olib borilib, eritma bir jinsli holatga kelguniga qadar ushlab turildi. Keyinchalik namunalarning nazoratli sovitilishi amalga oshirildi.

Hosil bo'lgan ingotlar mexanik usulda maydalandi va mayda dispersli kukun holiga keltirildi. Olingan kukunlar sovuq presslash usuli bilan silindrsimon yoki parallelepiped shaklidagi briketlarga aylantirildi. Presslash bosimi 300–600 MPa oralig'ida tanlandi. Keyingi bosqichda briketlar 500–600 °C haroratda kislorodsiz (argon muhitida) muhitda sinterlandi. Ushbu jarayon materialning mexanik mustahkamligini oshirish va donalararo qarshilikni kamaytirishga xizmat qildi.

Olingan namunalar strukturaviy jihatdan polikristall anizotrop tuzilishga ega bo'lib, ularning sifatini baholash uchun zichlik va tashqi nuqsonlar tahlil qilindi. Elektr va termoelektrik xossalarni aniqlashda quyidagi metodlar qo'llanildi:

– elektr o'tkazuvchanlik (σ) – doimiy tokda to'rt zondli usul yordamida 77–300 K harorat oralig'ida o'lchandi;

– Zeebek ko'effitsiyenti (α) – namunada hosil qilinadigan harorat gradiyenti asosida aniqlandi;

– termoelektrik samaradorlik ko'rsatkichi Z va o'lchamsiz ZT qiymatlari hisoblash yo'li bilan baholandi.

Termoelektrik samaradorlik quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

$$Z = \alpha^2 \sigma / \kappa \quad (1)$$

bu yerda α – Zeebek ko'effitsiyenti, σ – elektr o'tkazuvchanlik, κ – issiqlik o'tkazuvchanlik ko'effitsiyenti.

Barcha o'lchovlar bir xil eksperimental sharoitda, takroriy tajribalar asosida amalga oshirildi. Olingan natijalar statistik jihatdan qayta ishlanib, o'rtacha qiymatlar va og'ishlar aniqlandi. Turli tarkib va legirlash darajalariga ega namunalar o'rtasida solishtirma tahlil olib borildi. Mazkur metodologiya p-tur Bi_2Te_3 – Sb_2Te_3 asosidagi hajmiy termoelektrik elementlarning xossalarni kompleks baholash va ularni tayyorlash texnologiyasini optimallashtirish imkonini berdi.

NATIJALAR MUHOKAMASI

Shunday qilib, yuqorida bayon etilgan texnologiya hamda [6]-manbada taklif etilgan usuldan foydalangan holda p-tur o'tkazuvchanlikka ega termoelektrik elementlarni olish uchun 74 mol.% miqdordagi qattiq qorishma tarkibi tayyorlandi. Ushbu qorishma asosiy termoelektrik materialni shakllantirishda xom ashyo vazifasini bajaradi. Umumiy tarkib 74 mol.% Sb_2Te_3 va 26 mol.% Bi_2Te_3 nisbatdan iborat qilib tanlandi.

Legirlanmagan qattiq qorishmalarning termoelektrik xossalari, asosan, dastlabki xom ashyoning tozaligiga bevosita bog'liq bo'ladi. Amaliy sharoitlarda har doim ham talab etiladigan xossalarga ega bo'lgan materialni olish imkoniyati mavjud emas. Xom ashyoning turiga qarab qorishmalarning elektr va termoelektrik parametrlari ma'lum darajada farqlanadi. Odatda inert gaz bosimi ostida sintez qilingan qorishmalar uchun elektr o'tkazuvchanlik va Zeebek koeffitsiyentining qiymatlari mos ravishda

$\sigma = (800-1000) \text{ Om}^{-1}\cdot\text{sm}^{-1}$ va $\alpha = (200-220) \text{ mkV/K}$ oralig'ida bo'lishi aniqlangan.

Ushbu tadqiqot doirasida olingan legirlanmagan bazaviy material uchun quyidagi parametrlar qayd etildi: $\sigma=980 \text{ Om}^{-1}\text{sm}^{-1}$ va $\alpha=197 \text{ mkV/K}$. Aynan shu qiymatlar materialni asos sifatida tanlash uchun mezon bo'lib xizmat qildi. Mazkur parametrlar sharoitida termoelektrik samaradorlikning o'lchamsiz ko'rsatkichi ZT ning maksimal qiymati $T\approx 320-340 \text{ K}$ harorat oralig'ida kuzatildi.

Material tarkibida tellur (Te), surma (Sb) va vismut (Bi) atomlarining stexiometrik nisbatdan og'ishi sezilarli o'zgarishlarga olib kelishi aniqlandi. Tellur miqdorining ortishi donorlik ta'sirini kuchaytirib, Zeebek koeffitsiyentining oshishiga, biroq elektr o'tkazuvchanlikning kamayishiga sabab bo'ladi. Aksincha, shix-ta tarkibiga vismut va surmaning ko'proq kiritilishi akseptorlik xususiyatlari tufayli elektr o'tkazuvchanlikni oshiradi, ammo α ning kamayishiga olib keladi.

1-jadval.

$\text{Bi}_2\text{Te}_3\text{--Sb}_2\text{Te}_3$ asosida tayyorlangan termoelektrik batareyalarning elektr parametrlarining eksperimental qiymatlari

Erish harorati T (°C)	Tashkil etuvchilarning miqdori og'irl %	σ $\text{Om}^{-1}\cdot\text{sm}^{-1}$	α mkV/K	$\alpha^2 \sigma$ $\text{mkV}^2/\text{sm}\cdot\text{grad}^{-1}$
	-	2590	104	28,0
	1,75 Te	1130	185	38,7
	1,85 Te	1045	191	38,1
	2,0 Te	760	217	35,8
	0,75 Se	1490	164	40,1
	0,85 Se	1235	169	35,3
	0,95 Se	950	206	40,3
	1,10 Se	807	216	37,3
875	0,25 Te	1200	185	41,0
	0,35 Te	1080	205	45,4
	0,5 Te	667	220	32,3

Qo'llanilgan texnologiya muhim jihati shundaki, legirlash jarayonida termoelektrik samaradorlik ko'rsatkichi Z ning qiymatini saqlab qolish imkoniyati mavjud. Bunga bir vaqtning o'zida xalkogenlar va qo'rg'oshin bilan boyitish orqali, ya'ni stexiometrik tarkibdan nazoratli og'ish hosil qilish yo'li bilan erishish mumkin.

Bazaviy material parametrlarini optimallashtirish maqsadida tellurning eritilayotgan shixta tarkibiga qo'shilishi uning elektr va termoelektrik xossalari qanday ta'sir ko'rsatishi alohida tadqiq etildi. Olib borilgan eksperimental izlanishlar natijalari quyidagi 1-jadvalda keltirilgan.

Dastlabki komponentlar tarkibi quyidagi og'irlik foizlarida tanlandi: Bi - 16,179 og'ir.%, Sb - 26,826

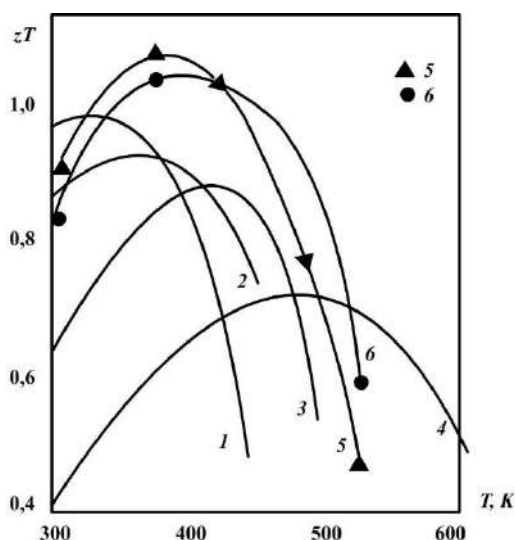
og'ir.% va Te - 56,993 og'ir.%. Vismut-surma-tellurid asosidagi, legirlanmagan va yuqori samaradorlikka ega bo'lgan termoelektrik elementlarni olish faqat bazaviy materialni zarur miqdorda tellur bilan to'yintirish orqali amalga oshirilishi mumkin.

Yuqoridagi jadval tahlilidan ko'rinib turibdiki, Te va Se qo'shimchalari termoelektrik materialning xossalari deyarli bir xil ta'sir ko'rsatadi. Biroq bir xil natijaga erishish uchun shix-ta tarkibiga tellurga nisbatan kamroq miqdorda selen qo'shish talab etilishiga qaramay, amaliy va texnologik jihatdan tellur bilan boyitish usuli barqarorroq va ustuvor hisoblanadi.

Texnologik eksperimentlar natijalari hamda [5,6]-manbalarda keltirilgan ma'lumotlarga ko'ra, $\text{Bi}_{0,5}\text{Sb}_{1,5}\text{Te}_3$ asosida yarim elementlar tayyorlashda tellur bilan to'yintirish darajasi eritish harorati va kvarts tigelingining diametriga bog'liq holda 0,25–1,0 og'ir.% oralig'ida bo'lishi lozim.

1-rasmda p-tur $\text{Bi}_{0,5}\text{Sb}_{1,5}\text{Te}_3$ qattiq qorishmaning teshiklar konsentratsiyasi turlicha bo'lgan holatlar uchun (1–4 egri chiziqlar) termoelektrik samaradorlik ko'rsatkichining haroratga bog'liqligi keltirilgan. Grafikdan ko'rinib turibdiki, musbat zaryad tashuvchilar (teshiklar) konsentratsiyasining ortib borishi bilan ZT ning maksimal qiymati pasayib boradi. Buning asosiy sababi teshiklar konsentratsiyasining ortishi elektr o'tkazuvchanlik σ ning oshishiga olib kelishi bilan birga, Zeebek koeffitsiyenti α ning sezilarli darajada kamayishidir. Natijada termoelektrik sifat ko'rsatkichi Z pasayadi. Haroratning yanada ortishi esa elektronlarning energiya tashishi kuchayishi hisobiga ZT ning keskin kamayishiga sabab bo'ladi.

1-rasmda taqqoslash maqsadida qo'rg'oshin bilan legirlangan namunalar uchun ham samaradorlikning haroratga bog'liqligi ko'rsatilgan. $T > 300$ K harorat oralig'ida bazaviy materialni qo'rg'oshin bilan legirlash uning termoelektrik xossalriga ijobiy va barqaror ta'sir ko'rsatishi aniqlandi. Buning sababi shundaki, ortiqcha tellurga ega bo'lgan asosda qo'rg'oshin $\text{Bi}_x\text{Sb}_{2-x}\text{Te}_3$ bug'larining elastikligiga nisbatan ancha past elastiklikka ega bo'lgan qo'rg'oshin telluridini hosil qiladi. Bu holat texnologik yo'qotishlarning sezilarli darajada kamayishiga olib keladi.



1-rasm. Teshiklar konsentratsiyasi turlicha bo'lgan p- $\text{Bi}_{0,5}\text{Sb}_{1,5}\text{Te}_3$ qattiq qorishmaning termoelektrik samaradorligining haroratga bog'liqligi. 1–4 egri chiziqlar uchun $P_1 > P_2 > P_3 > P_4$. 5 va 6-egri chiziqlar mos ravishda 0,05 va 0,25 og'ir.% miqdorda qo'rg'oshin bilan legirlangan, mualliflar tomonidan eksperimental yo'l bilan olingan namunalarni ifodalaydi.

XULOSA.

Ushbu tadqiqot ishida p-tur o'tkazuvchanlikka ega bo'lgan Bi_2Te_3 – Sb_2Te_3 tizimi asosida hajmiy termoelektrik elementlarni tayyorlashning texnologik imkoniyatlari kompleks ravishda o'rganildi. Olib borilgan eksperimental izlanishlar natijasida yuqori samaradorlikka ega termoelektrik materiallarni olishda tarkibning stexiometrik muvozanatini saqlash, xalkogenlar bilan boyitish darajasi hamda legirlovchi qo'shimchalarning tanlovi hal qiluvchi omil ekanini aniqlandi.

Tadqiqot davomida p-tur yarim o'tkazgich material uchun optimal tarkib sifatida 74 mol.% Sb_2Te_3 va 26 mol.% Bi_2Te_3 nisbatdagi qattiq qorishma tanlandi. Mazkur tarkibda legirlanmagan bazaviy material uchun elektr o'tkazuvchanlik $\sigma \approx 980 \text{ Om}^{-1} \cdot \text{sm}^{-1}$ va Zeebek koeffitsiyenti $\alpha \approx 197 \text{ mkV/K}$ qiymatlari qayd etilib, termoelektrik samaradorlikning maksimal ZT qiymati 320–340 K harorat oralig'ida kuzatildi. Bu holat Bi_2Te_3 – Sb_2Te_3 asosidagi materiallarning past va o'rta haroratli termoelektrik generatorlar uchun istiqbolli ekanligini tasdiqlaydi.

Tellur va selen bilan boyitishning material xossalriga ta'siri tahlili shuni ko'rsatdiki, har ikkala element termoelektrik parametrlar nuqtayi nazaridan deyarli bir xil ta'sir ko'rsatadi. Biroq texnologik jihatdan barqarorlik, takrorlanuvchanlik va sanoat sharoitida qo'llash imkoniyatlari nuqtayi nazaridan tellur bilan boyitish usuli ustunlikka ega ekanligi aniqlandi. $\text{Bi}_{0,5}\text{Sb}_{1,5}\text{Te}_3$ asosida yarim elementlarni tayyorlashda tellur bilan to'yintirish darajasining 0,25–1,0 og'ir.% oralig'ida bo'lishi optimal natijalar berishi tajribaviy jihatdan asoslandi.

Qo'rg'oshin bilan legirlashning ta'siri alohida o'rganilib, $T > 300$ K haroratlarda Pb qo'shimchasi materialning termoelektrik xossalriga ijobiy ta'sir ko'rsatishi aniqlandi. Qo'rg'oshin ortiqcha tellur bilan kam elastiklikka ega bo'lgan PbTe birikmasini hosil qilishi natijasida texnologik bug'lanish yo'qotishlari kamayadi va materialning yuqori haroratlardagi barqarorligi ortadi. Shu bilan birga, Pb legirlash zaryad tashuvchilar konsentratsiyasini haddan tashqari oshirmagan holda, elektr o'tkazuvchanlik va Zeebek koeffitsiyenti o'rtasidagi muvozanatni saqlash imkonini beradi.

Boshqa akseptor tipidagi legirlovchi qo'shimchalar (Zn, Sb, Co) bilan solishtirganda, qo'rg'oshin zaryad tashuvchilar harakatchanligini kamroq pasaytirishi va umumiy termoelektrik samaradorlikka kamroq salbiy ta'sir ko'rsatishi bilan ajralib turadi. Bu holat Pb ni p-tur Bi_2Te_3 – Sb_2Te_3 asosidagi hajmiy termoelementlar uchun

samarali legirlovchi element sifatida tanlashni ilmiy jihatdan asoslaydi.

Umuman olganda, olib borilgan tadqiqotlar natijalari Bi_2Te_3 – Sb_2Te_3 asosidagi p-tur hajmiy termoelektrik elementlarni tayyorlash texnologiyasini optimallashtirish, ularning elektr va termoelektrik xossalarini boshqarish hamda yuqori

samaradorlikka ega termoelektrik generatorlar yaratish uchun muhim ilmiy-amaliy asos bo'lib xizmat qiladi. Olingan xulosalar kelgusida sanoat chiqindi issiqligidan elektr energiyasi olishga mo'ljallangan yuqori samarali termoelektrik qurilmalarni ishlab chiqishda qo'llanishi mumkin.

ADABIYOTLAR

1. И.Ю.Шелехов, Т.И.Шишелова, Е.И.Смирнов. Применение новых технических решений в конструировании термоэлектрических систем: вестник Мордовского университета, том 28, №1, 2018., стр. 48-61.
2. Y. Shtern, I., A. Sherchenkov, A., M. Rogachev, S., A. Babich и V., «Investigation of thermoelectric properties and thermal stability of semiconductor materials for the application in middle temperature thermoelectric generators,» Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EICon Rus), pp. 1642-1648, 2018.
3. Ю.Ян., Я.Мален. Периодический нагрев увеличивает эффективность термоэлектрического преобразования энергии. Energy environ Sct, 6(2019), стр 1267-1273_view PDF CrossRef.
4. М.П.Михайлова, К.Д.Монсеев, Ю.П.Яковлев. Открытие полупроводников АПБВ: физические свойства и применение. Физика и техника полупроводников, 2019, том 53, вып. 3. Стр. 291-308
5. Л.Хуан, К.Чжан, Б.Юань, Х.Лай, Ян, З.Рей. Последние достижения в области термоэлектрических материалов полугейслера. Master Rus Bull, 76(2020), стр. 107-112
6. Nabiev Makhmud Bozorovich, Khomidzhonov Zukhriddin Mayrufjon Ugli, Latipova Mukhayyo

Ibragimjanovna, Abdullaev Abduvokhid Abdugappar Ugli, Ergashev Komiljon Ravshan Ugli, & Rakhimov Mirkamol Farkhodjon Ugli (2019). Obtaining and researching of thermoelectric semiconductor materials for high-efficiency thermoelectric generators with an increased efficiency coefficient. Проблемы современной науки и образования, (12-2 (145)), 69-73.

7. Набиев, М. Б., Усмонов, Я., Гайназарова, К. И., & Мамадалиева, Л. К. (2019). разработка получения термоэлектрических свойств материалов на основе (Bi_2Te_3 – Bi_2Se_3) под давлением в инертной среде. ББК 74.58 И 66, 451.

8. А.М.Касимахунова, М.Б. Набиев, Л.К. Мамадалиева, Я.Усмонов. Разработка р-ветвей на основе теллурида висмута и сурмы для термоэлектрических преобразователей. Материалии Международной научно практической конференции “Проблемы повышения эффективности работы современного производства и энергоресурс сбережения” Андижан. 3-4 октября, 2018 г.

Mualliflar haqida ma'lumot

1. Norbo'tayev Ma'sudjon Abdurasulovich – f.-m.f. PhD., katta o'qituvchi, Farg'ona davlat texnika universiteti. Tel.: +99893-737-91-08;

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩЕЕ ТРЕТЬЮ ПРОИЗВОДНУЮ ПО ВРЕМЕНИ В ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Меликузиева Дилшода Мухторжоновна

Наманганский государственный технический университет

Получено 1 декабря 2025 г.; принято к публикации 15 декабря 2025 г.

Аннотация. В данной работе рассматриваются краевые задачи в полубесконечных областях для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками. Единственность решений поставленных задач доказываются методом энергетических интегралов. Существование решений устанавливаются методом разделения переменных. Решения построены в явном виде бесконечных рядов, и обоснованы возможность их почленного дифференцирования по всем переменным.

Ключевые слова: Уравнения в частных производных, уравнение четвертого порядка, кратные характеристики, краевая задача, единственность, существование, ряды, полубесконечная область, абсолютная и равномерная сходимость.

Annotatsiya. Ushbu ishda karrali xarakteristikalar ega bo'lgan to'rtinchi tartibli tenglama uchun yarim chegaralangan sohalarda qo'yilgan chegaraviy masalalar ko'rib chiqiladi. Qo'yilgan masalalar yechimlarining yagonaligi energiya integrallari usuli yordamida isbotlanadi. Yechimlarning mavjudligi o'zgaruvchilarni ajratish usuli bilan aniqlanadi. Yechimlar aniq ko'rinishda cheksiz qatorlar shaklida qurilgan bo'lib, ularni barcha o'zgaruvchilar bo'yicha hadma-had differensiallash mumkinligi asoslab berilgan.

Kalit so'zlar: xususiy hosilali tenglamalar, to'rtinchi tartibli tenglama, karrali xarakteristikalar, chegaraviy masala, yagonalik, mavjudlik, qatorlar, yarim chegaralangan soha, absolyut va tekis yaqinlashish.

Annotation: In this work, boundary value in semi-bounded domains are considered for a fourth-order equation with multiple characteristics. The uniqueness of solutions of the posed problems is proved by the method of energy integrals. The existence of the solutions is proved by the method of variables separation. The solutions were constructed explicitly, in the form infinite series, an opportunity of term-by-term differentiation of the series with respect to all variables is justified.

Keywords: Partial differential equation, fourth order equation, multiple characteristics, boundary value problem, uniqueness, existence, series, semi-bounded domain, absolute and uniform convergence.

Введение

Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводится к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвертого порядка (см. [1-4]).

Монография Джураева Т.Д., Сопуева А. [5] посвящена классификации дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка для таких уравнений.

В работе [6] рассмотрен краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками содержащей второй производной по времени в конечной области.

В работе [7] рассмотрена краевая задача для уравнения четвертого порядка вида

$$u_{xxxx} - u_{tt} = f(x, t).$$

В работе [8] была решена задача с начальными и граничными условиями для уравнения колебания балки вида

$$a^2 u_{xxxx} + u_{tt} = 0,$$

в которой балка длины l , зажата на концах, в массивные тиски.

В работе [9] рассмотрена краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами.

В работах [10-14] рассмотрены краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени.

В работах [15-18] рассмотрены краевые задачи для уравнения с кратными характеристиками в полуграниченных областях.

Краевые задачи для уравнений четвертого порядка, содержащее третью производную по времени мало изучены [19-22].

Постановка задач

В областях $D^+ = \{(x, y): 0 < x < p, 0 < y < +\infty\}$ и $D^- = \{(x, y): 0 < x < p, -\infty < y < 0\}$ рассмотрим уравнение

$$L[u] \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0, \quad (1)$$

где $p > 0$ - действительное число, и для него исследуем следующие задачи.

Задача A_1 . Найти решение уравнения (1) в области D^+ из класса $u(x, y) \in C_{x,y}^{4,3}(D^+) \cap C_{x,y}^{3,2}(D^+ \cup \Gamma_1)$, ограниченное при $y \rightarrow +\infty$, равномерно по x и $u_{xx} \in L_2(D^+)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(0, y) = u_{xx}(0, y) = u_x(p, y) = u_{xxx}(p, y) = 0, \quad 0 \leq y < +\infty, \quad (2)$$

$$u_y(x, 0) = \psi_1(x), \quad u_{yy}(x, 0) = \psi_2(x), \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} u_{yy}(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad (3)$$

где $\Gamma_1 = \partial D^+$ -граница области D^+ , $\psi_1(x) \in C^4[0, p]$, $\psi_2(x) \in C^2[0, p]$ - заданные функции, причем

$$\psi_1(0) = \psi_1'(p) = \psi_1''(0) = \psi_1'''(p) = 0, \quad (4)$$

$$\psi_2(0) = \psi_2'(p) = 0.$$

Задача A_2 . Найти решение уравнения (1) в области D^- из класса $u(x, y) \in C_{x,y}^{4,3}(D^-) \cap C_{x,y}^{3,2}(D^- \cup \Gamma_2)$, ограниченное при $y \rightarrow -\infty$, равномерно по x и $u_{xx} \in L_2(D^-)$, удовлетворяющее краевому условию (2) при $-\infty < y \leq 0$ и

$$u_{yy}(x, 0) = \psi_3(x), \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} u_{yy}(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad (5)$$

где $\Gamma_2 = \partial D^-$ - граница области D^- , $\psi_3(x) \in C^2[0, p]$ - заданная функция, причем

$$\psi_3(0) = \psi_3'(p) = 0. \quad (6)$$

Единственность решения

Теорема 1. Если задачи A_1 и A_2 имеют решения, то они единственны.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A_1 (A_2) имеет два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда функция $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в D^+ (D^-).

Для этого уравнение (1) умножим на u , тогда получим

$$uL[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x}(uu_{xxx} - u_x u_{xx}) - \frac{\partial}{\partial y}\left(uu_{yy} - \frac{1}{2}u_y^2\right) + u_{xx}^2 = 0. \quad (7)$$

Интегрируя тождество (7) по области $D_d = \{(x, y): 0 < x < p, \quad 0 < y < d\}$, где $d > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^p \int_0^d \left[\frac{\partial}{\partial x}(u \cdot u_{xxx} - u_x \cdot u_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-u \cdot u_{yy} + \frac{1}{2}u_y^2\right) \right] dx dy + \int_0^p \int_0^d u_{xx}^2 dx dy = 0, \\ \int_0^d [u(p, y)u_{xxx}(p, y) - u(0, y)u_{xxx}(0, y)] dy - \\ - \int_0^d [u_x(p, y)u_{xx}(p, y) - u_x(0, y)u_{xx}(0, y)] dy - \\ - \int_0^p [u(x, d)u_{yy}(x, d) - u(x, 0)u_{yy}(x, 0)] dx + \\ + \frac{1}{2} \int_0^p [u_y^2(x, d) - u_y^2(x, 0)] dx + \iint_{D_d} u_{xx}^2 dx dy = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Если $d \rightarrow +\infty$, то $D_d \rightarrow D^+$. Учитывая однородные краевые условия задачи A_1 , т.е. $\psi_i(x) = 0$, $i = 1, 2$, и свойства функции $u(x, y)$ при $y \rightarrow +\infty$, а также, что $u_{xx} \in L_2(D^+)$, из (8) получаем

$$\frac{1}{2} \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_0^p u_y^2(x, d) dx + \iint_{D^+} u_{xx}^2 dx dy = 0.$$

Из второго слагаемого имеем

$$u_{xx} = 0 \Rightarrow u(x, y) = x \cdot f_1(y) + f_2(y), \quad (x, y) \in D^+ \cup \Gamma_1.$$

где $f_1(y)$, $f_2(y)$ – произвольные функции, удовлетворяющие всем условиям задач. Полагая $x = 0$, имеем

$$u(0, y) = f_2(y) = 0 \Rightarrow f_2(y) = 0,$$

а $x = p$, имеем

$$u_x(p, y) = f_1(y) = 0.$$

Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$, в $D^+ \cup \Gamma_1$.

Интегрируя тождество (7) по области $D_c = \{(x, y): 0 < x < p, \quad -c < y < 0\}$, $c > 0$ учитывая однородные краевые условия задачи A_2 и свойства функции $u(x, y)$ при $y \rightarrow -\infty$, а также что $u_{xx} \in L_2(D^-)$, получим

$$\frac{1}{2} \int_0^p u_y^2(x, 0) dx + \iint_{D^-} u_{xx}^2 dx dy = 0.$$

Отсюда следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в $D^- \cup \Gamma_2$.

4. Существование решения

С целью доказательства существования решения, задача A_1 (A_2) рассмотрим следующую вспомогательную задачу: найти нетривиальное решение уравнения (1), удовлетворяющие условиям задач и представимое в виде

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y). \quad (9)$$

Подставляя (9) в уравнение (1) и разделяя переменные, имеем следующую задачу, по переменной X :

$$\begin{cases} X^{(4)}(x) - \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X'(p) = X''(0) = X'''(p) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где λ параметр разделения.

Теперь найдем собственные значения и собственные функции (10). Сначала определим знак λ , для этого умножим уравнение в задаче (10) на X и проинтегрируем, с учетом граничных условий получим

$$\begin{aligned} X X'''|_0^p - X' X''|_0^p + \int_0^p (X'')^2 dx &= \lambda \int_0^p X^2 dx, \\ \int_0^p (X'')^2 dx &= \lambda \int_0^p X^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда, $\lambda \geq 0$.

Пусть $\lambda = 0$, тогда общее решение уравнение в задаче (10) имеет вид:

$$X(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4, \quad (11)$$

где C_i — произвольные постоянные. Учитывая граничные условия задачи (10), получим

$$\begin{cases} X(0) = C_4 = 0, \\ X''(0) = C_2 = 0, \\ X(p) = C_1 p^3 + C_2 p^2 + C_3 p + C_4 = 0, \\ X''(p) = 6C_1 p + 2C_2 = 0, \end{cases}$$

легко можно убедиться из системы: $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Значит, при $\lambda = 0$ задача (10), имеет только нулевое решение. Отсюда получим, что $\lambda > 0$.

Тогда общее решение уравнения (10) при $\lambda > 0$, имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt[4]{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt[4]{\lambda} x} + C_3 \cos \sqrt[4]{\lambda} x + C_4 \sin \sqrt[4]{\lambda} x, \quad (12)$$

где C_i — произвольные постоянные. Учитывая условия задачи (10), получим систему

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ X''(0) = C_1 + C_2 - C_3 = 0, \\ X'(p) = C_1 e^{\sqrt[4]{\lambda} p} - C_2 e^{-\sqrt[4]{\lambda} p} - C_3 \sin \sqrt[4]{\lambda} p + C_4 \cos \sqrt[4]{\lambda} p = 0, \\ X'''(p) = C_1 e^{\sqrt[4]{\lambda} p} - C_2 e^{-\sqrt[4]{\lambda} p} - C_3 \sin \sqrt[4]{\lambda} p - C_4 \cos \sqrt[4]{\lambda} p = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Система (13) имеет нетривиальное решение при $\Delta = 0$, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ e^{\sqrt[4]{\lambda} p} & -e^{-\sqrt[4]{\lambda} p} & -\sin \sqrt[4]{\lambda} p & \cos \sqrt[4]{\lambda} p \\ e^{\sqrt[4]{\lambda} p} & -e^{-\sqrt[4]{\lambda} p} & -\sin \sqrt[4]{\lambda} p & -\cos \sqrt[4]{\lambda} p \end{vmatrix} = -4 \cos \sqrt[4]{\lambda} p \cdot \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} p = 0.$$

Так как $\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} p \neq 0$, тогда $\cos \sqrt[4]{\lambda} p = 0$, откуда,

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2p} (2n-1) \right)^4, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Легко можно вычислить коэффициенты системы (13), т.е. $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 \neq 0$.

Эти числа (14) являются собственными значениями задачи (10), а соответствующие им собственные функции имеют следующий вид:

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \frac{\pi}{2p} (2n-1)x. \quad (15)$$

Известно [23], что система собственных функций (15) задачи (10) является полной и ортонормированной в $L_2(0, p)$.

Сначала рассмотрим задачу A_1 . Из (9), для $Y_n(y)$ имеем следующую задачу:

$$\begin{cases} Y_n'''(y) - \lambda_n Y_n(y) = 0, \\ Y_n'(0) = \psi_{1n}, \\ Y_n''(0) = \psi_{2n}, \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} Y_n''(y) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{где } \psi_{in} = \int_0^p \psi_i(\xi) X_n(\xi) d\xi, \quad i = 1, 2.$$

Общее решение уравнения в задаче (16) имеет вид

$$Y_n(y) = C_{1n} e^{k_n y} + e^{-\frac{1}{2} k_n y} \left(C_{2n} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n y \right) + C_{3n} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n y \right) \right), \quad (17)$$

где $k_n = \sqrt[3]{\lambda_n}$, а $C_i, i = \overline{1, 3}$ пока неизвестные постоянные.

Удовлетворив условиям задачи (16), из (17) имеем

$$\begin{cases} C_{1n} = 0, \\ C_{2n} = -\frac{\psi_{1n}}{k_n} - \frac{\psi_{2n}}{k_n^2}, \\ C_{3n} = \frac{1}{\sqrt{3}k_n}\psi_{1n} - \frac{1}{\sqrt{3}k_n^2}\psi_{2n}, \end{cases} \quad (18)$$

где ψ_{1n} и ψ_{2n} - коэффициенты Фурье функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, т.е.

$$\psi_{1n} = \int_0^p \psi_1(\xi) X_n(\xi) d\xi, \quad \psi_{2n} = \int_0^p \psi_2(\xi) X_n(\xi) d\xi.$$

В дальнейшем максимальное значение всех найденных положительных известных чисел в оценках будем обозначать через M .

Интегрируя по частям $\psi_1(x)$ четыре раза, $\psi_2(x)$ два раза и принимая во внимание условие (4), получим оценки:

$$|\psi_{1n}| \leq M \frac{|\Psi_{1n}|}{n^4}, \quad |\psi_{2n}| \leq M \frac{|\Psi_{2n}|}{n^2},$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{1n} &= \int_0^p \psi_1^{(4)}(\xi) X_n(\xi) d\xi, \\ \Psi_{2n} &= \int_0^p \psi_2''(\xi) X_n(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Учитывая эти оценки, из (18) получим

$$\begin{aligned} |C_{2n}| &\leq \frac{|\psi_{1n}|}{|k_n|} + \frac{|\psi_{2n}|}{|k_n^2|} \leq M \frac{|\Psi_{1n}|}{n^{16/3}} + M \frac{|\Psi_{2n}|}{n^{14/3}}, \\ |C_{3n}| &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{|\psi_{1n}|}{|k_n|} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{|\psi_{2n}|}{|k_n^2|} \leq M \frac{|\Psi_{1n}|}{n^{16/3}} + M \frac{|\Psi_{2n}|}{n^{14/3}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение задача A_1 имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \left(e^{-\frac{1}{2}k_n y} \left(C_{2n} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n y\right) + C_{3n} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n y\right) \right) \right). \quad (20)$$

Докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (20). Учитывая (19) получим оценку ряда (20) в виде

$$|u(x, y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |X_n(x)| (|C_{2n}| + |C_{3n}|) \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |X_n(x)| \left(\frac{|\Psi_{1n}|}{n^{16/3}} + \frac{|\Psi_{2n}|}{n^{14/3}} \right) < \infty.$$

Отсюда следует, что ряд (20) сходится абсолютно и равномерно.

Теперь докажем, что производные ряда (20) входящие в уравнение (1), также сходятся абсолютно и равномерно в области $D^+ \cup \Gamma_1$. Для этого вычисляем производные по y из (20) и учитывая (19), имеем

$$\left| \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} k_n^3 (|C_{2n}| + |C_{3n}|) |X_n(x)| \leq M \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Psi_{1n}|}{n^{4/3}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Psi_{2n}|}{n^{2/3}} \right).$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и Бесселя, получим

$$\left| \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Psi_{1n}|}{n^{4/3}} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{2n}|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}} \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Psi_{1n}|}{n^{4/3}} + M \sqrt{\frac{2}{p}} \sqrt{\frac{1}{n^{4/3}}} \|\Psi_{2n}\| < \infty,$$

так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{2n}|^2 = \frac{2}{p} \|\Psi_{2n}\|_{L_2(0,p)}^2.$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$, сходится абсолютно и равномерно. Абсолютная и равномерная сходимость четвертой производной по x ряда (20) следует из равенства $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ и доказанного выше.

Теперь рассмотрим задачу A_2 . Из (9), для $Y_n(y)$ имеем следующую задачу:

$$\begin{cases} Y_n'''(y) - \lambda_n Y_n(y) = 0, \\ Y_n''(0) = \psi_{3n}, \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} Y'(y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} Y''(y) = 0, \end{cases}$$

$$\text{где } \psi_{3n} = \int_0^p \psi_3(\xi) X_n(\xi) d\xi.$$

Следовательно, в (17) необходимо считать, что $C_{1n} = \frac{\psi_{3n}}{k_n^2}$, $C_{2n} = C_{3n} = 0$. Тогда функция (17) имеет вид

$$Y_n(y) = C_{1n} e^{k_n y},$$

ψ_{3n} - коэффициент Фурье функций $\psi_3(x)$, т.е.

$$\psi_{3n} = \int_0^p \psi_3(\xi) X_n(\xi) d\xi.$$

Принимая во внимание условие (6), интегрируя по частям $\psi_3(x)$ два раза получим оценку

$$|C_{1n}| \leq M \frac{|\Psi_{3n}|}{n^{14/3}}, \quad (21)$$

где

$$\Psi_{3n} = \int_0^p \psi_3''(\xi) \sin\left(\frac{\pi}{2p}(2n-1)\xi\right) d\xi.$$

Теперь в силу (15), решение задачи A_2 имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} e^{k_n y} X_n(x). \quad (22)$$

Докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (22). Учитывая (21), из (22) получим

$$|u(x, y)| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Psi_{3n}|}{n^{14/3}} < \infty.$$

Отсюда следует, что ряд (22) сходится абсолютно и равномерно.

Теперь докажем, что производные ряда (22) входящие в уравнение (1), также сходятся абсолютно и равномерно в области $D^- \cup \Gamma_2$. Для этого вычисляем производные по y и учитывая (21), имеем

$$\left| \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} k_n^3 (|C_{1n}|) |X_n(x)| \leq M \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Psi_{3n}|}{n^{2/3}} \right).$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и Бесселя, получим

$$\left| \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right| \leq M \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{3n}|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}} \leq M \sqrt{\frac{1}{n^{4/3}}} \|\Psi_{3n}\| < \infty,$$

так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{3n}|^2 = \frac{2}{p} \|\Psi_{3n}\|_{L_2(0,p)}^2.$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$, сходится абсолютно и равномерно. Абсолютная и равномерная сходимость четвертой производной по x ряда (22) следует из равенства $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ и доказанного выше.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Если функции $\psi_1(x) \in C^4[0, p]$, $\psi_i(x) \in C^2[0, p]$, $i = 2, 3$, и выполняются условия (4) и (6), то решения задачи A_1 и A_2 существуют, и представляются в виде (20) и (22) соответственно.

Литература

1. Турбин М.В. Исследование начально краевой задачи для модели движения жидкости Герше - Балки. *Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат.* -2013. № 2. - С. 246-257.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.-М.: Мир,1977.-622 с.
3. Шабров С.А. Об оценках функций влияния одной математической модели четвертого порядка. *Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат.* -2015.20(2) - С. 168-179.
4. Benney D.J., Luke J.C Interactions of permanent waves of finite amplitude. *J. -Math.*

Phys. -1964. 43, -P.309-313. doi.org/10.1002/sapm1964431309

5. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент. «Фан». 2000.-144 с.
6. Аманов Д, Мурзамбетова М.Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом. *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки*, -2013, выпуск 1.-С. 3–10. DOI: 10.20537/vm130101.
7. Аманов Д., Бекиев А.Б., Отарова Ж.А. Краевая задача для уравнения четвертого порядка. *Узб.мат.журнал.* -2015, -№4. -С.11-18.

8. Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки.* - 2015, том 19, № 2.-С. 311–324. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1406>
9. Иргашев Б.Ю. Краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами . *Бюллетень Института математики.* -2019, -№6. -С.23-29.
10. Dzhuraev T.D., Apakov Yu.P. On the theory of the third- order equation with multiple characteristics containing the second time derivative. *Ukrainian Mathematical Journal* .- 2010.-62, -pp.43–55. <https://doi.org/10.1007/s11253-010-0332-8>
11. Apakov Yu.P., Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics. *Nonlinear Analysis: Modeling and Control.* Vilnius, 2011. –Vol.16.-No3. -pp. 255–269. DOI:10.15388/NA.16.3.14092
12. Apakov Yu. P. On the solution of a boundary-value problem for a third-order equation with multiple characteristics. *Ukrainian Mathematical Journal.* -2012.- 64 (1), -pp.1–11. <https://doi.org/10.1007/s11253-012-0625-1>
13. Apakov Yu. P. On unique solvability of boundary-value problem for a viscous transonic equation. *Lobachevskii Journal of Mathematics,* -2020.-41, -pp.1754–1761. <https://doi.org/10.1134/S1995080220090036>
14. Apakov Yu.P. , Umarov R.A. Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms Construction of the Green's Function. *Lobachevskii Journal of Mathematics,* -2022.-43,-pp.738–748. DOI: 10.1134/S199508022206004X.
15. Апаков Ю.П. К решению краевых задач для уравнения в неограниченных областях . *Доклады Академии Наук Республики Узбекистан.* –Ташкент, 2006. –№3. –С. 17-20.
16. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в неограниченных областях . *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН.* –Нальчик, 2008. - №2(22). –С. 147-151.
17. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Краевые задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в бесконечной области . *Узбекский математический журнал.* 2009, №4,- С. 21-28.
18. Apakov Y.P., Hamitov A.A. On solution of the boundary value problems posed for an equation with the third-order multiple characteristics in semi-bounded domains in three dimensional space. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana,* 2023, Vol.29,58. pp.2-14. <https://doi.org/10.1007/s40590-023-00523-1>
19. Аманов Д., Скоробогатова Э.Р. Краевые задачи для уравнения четвёртого порядка. *Вестник КазНУ сер.мат.,мех., инф.* -2009 г .-№ 4(63).-С.16-20.
20. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On a problem for a fourth-order with multiple characteristics containing the third time derivate. *Lobachevskii Journal of Mathematics,* 2023 Vol. 44, No. 8, pp.3218-3224. DOI:10.1134/S1995080223080061
21. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On a boundary problem for the fourth order equation with the third derivative with respect to time. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series,* No.4(112), 2023, pp.30-40. DOI:10.31489/2023M4/30-40
22. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On the solution of a boundary problem for a fourth order equation containing a third time derivative in semi- bounded domains. *Uzbek Mathematical Journal,* 2024, Volume 68 , Issue 3, pp 5-11. DOI: 10.29229 / uzmj. 2024-3-1
23. Апаков Ю. П., Умаров Р. А. О полноте собственных функций краевой задачи с несимметричными условиями для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Международная научная конференция “Неклассические уравнения математической физики”, Ташкент. 24–26 октября 2024.

O'NG TOMONI NOMA'LUM TOR TEBRANISH TENGLAMA UCHUN TESKARI MASALA

Muzaffar Azizov, Kamolaxon Rasulova

Farg'ona Davlat Universiteti, Murabbiylar ko'chasi.19, 150100, Farg'ona O'zbekiston

2025-yil 20-noyabrda berilgan; 2025 yil. 10-dekabr chop etish uchun qabul qilingan

Annotatsiya: Ushbu maqolada o'ng tomoni noma'lum funksiyadan iborat bo'lgan tor tebranish tenglamasi uchun to'g'ri to'rtburchakda lokal masala bayon qilingan va o'rganilgan hamda uning yechimining yagonaligi va mavjudligi haqidagi teoremlar spektral usul bilan isbotlangan.

Kalit so'zlar: To'g'ri to'rtburchakli soha, tor tebranish tenglamasi, teskari masala, lokal masala.

Аннотация: В данной статье рассмотрена и исследована локальная задача для уравнения колебаний струны в прямоугольной области, правая часть которого содержит неизвестную функцию. Теоремы о существовании и единственности решения доказаны спектральным методом.

Ключевые слова: прямоугольная область, уравнение колебаний струны, обратная задача, локальная задача.

Annotation: In this article, a local problem for the string vibration equation in a rectangular domain, whose right-hand side contains an unknown function, is formulated and studied. The existence and uniqueness theorems for its solution are proved by means of the spectral method.

Keywords: rectangular domain, string vibration equation, inverse problem, local problem.

KIRISH

To'g'ri to'rtburchakli sohada o'ng tomoni noma'lum bo'lgan tor tebranish tenglamasini o'rganish nazariy va amaliy jihatdan muhim ahamiyatga ega. Bunday tenglamalar ko'plab fizik jarayonlarni ifodalaydi. Masalan, mexanik va elektromagnit tebranishlar, akustika, geofizika, issiqlik o'tkazuvchanligi va boshqa muhitlarda to'liqlar tarqalishini ifodalashda uchraydi. Amaliy masalalarda tizimga ta'sir etuvchi manba funksiyasi yoki kuch ta'siri ko'pincha noma'lum bo'ladi. Shuning uchun bu manba funksiyasini ma'lum o'lchashlar asosida qayta tiklash dolzarb hisoblanadi.

Ushbu ishda qarayotgan masala klassik tor tebranish tenglamasi uchun teskari masala bo'lib, boshlang'ich va chegaraviy shartlar hamda oxirgi vaqtda berilgan sharti orqali $u(x,t)$ va $f(x)$ funksiyalarini aniqlash talab qilinadi. Bu turdagi masalalar konstruksiyalar mustahkamligini aniqlash, turli signallarni qayta ishlash, geofizik tadqiqotlarda yer osti qatlamlaridagi manbalarni tiklash kabi amaliy sohalarda qo'llaniladi.

So'nggi yillarda to'liqlar tenglamasi va unga o'xshash giperbolik tenglamalar uchun

teskari masalalar bo'yicha keng qamrovli tadqiqotlar olib borilgan. Masalan, I.Knowles va M.Yamamoto [1], V.G.Romanov [2] hamda O.Imanuvilov va M.Yamamoto [3] ishlarida to'liqlar tenglamasining o'ng tomonini chegaraviy shartlar asosida aniqlashga oid mavjudlik, yagonalik va turg'unlik masalalari tahlil qilingan. A.Hasanov [4] ishida x va t bo'yicha ajraluvchi manba funksiyalarini tiklash usullari o'rganilgan. Shuningdek, teskari masalalar bo'yicha A.K.Urinov va M.S.Azizovlar [6] ishda to'rtinchi tartibli xususiy hosilali tenglama uchun o'ng tomoni noma'lum bo'lgan chegaraviy masalani ko'rib chiqib, unda Furiye usuli yordamida yechimni qurish va yagonalik teoremlarini isbotlashgan. D.A.Tursunov va hammualliflari [7] xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun teskari masalaning yechish shartlarini tekshirgan. R.R.Ashurov va R.T.Zunnunov [8] esa aralash tipdagi tenglamalarda kasr tartibli hosila qatnashgan teskari masalalarni o'rganishgan. Bundan tashqari, E.Azizbayov [9] giperbolik tenglama uchun noma'lum koeffitsientni integral shartlar asosida aniqlash masalasini tahlil qilgan, D.K.Durdiyev va T.R.Suyarov [10] ishda ikki o'lchovli to'liqlar tenglamasi uchun

teskari koeffitsient masalasini ko'rib chiqqan. Ushbu ishlar teskari masalalarni yechishning turli usullari va ularning turg'unligini ta'minlash yo'llarini ko'rsatadi. Shu asosda bizning ishimiz to'g'ri to'rtburchakli sohada tor tebranish tenglamasi uchun $u(x,t)$ va $f(x)$

funksiyalarini aniqlashga qaratilgan. Bu masalaning ahamiyati shundaki, bunday turdagi teskari masalalarni o'rganish orqali fizik jarayonlarda manba funksiyasini qayta tiklash, signallarni tahlil qilish va qurilmalarni loyihalash imkoniyatlari kengayadi.

ASOSIY QISM.

$\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p, 0 < t < T\}$ to'g'ri to'rtburchakli sohada

$$Lu \equiv u_{tt} - a^2 u_{xx} = Q(t) f(x) \quad (1)$$

tenglamani qaraylik, bu yerda p va T - berilgan haqiqiy musbat sonlar, $Q(t)$ - berilgan ma'lum funksiya, $u = u(x,t)$ va $f(x)$ - lar esa noma'lum funksiyalar.

Masalaning qo'yilishi.

Teskari masala. $\bar{\Omega}$ sohada shunday $u(x,t)$ va $f(x)$ funksiyalar aniqlansinki, $u(x,t) \in C_{x,t}^{1,1}(\bar{\Omega}) \cap C_{x,t}^{2,2}(\Omega)$, $f(x) \in C(0,p) \cap L[0,T]$, bo'lib, ular birgalikda (1) tenglamani va $u(x,t)$ esa ushbu

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq p, \quad (2)$$

$$u_t(x,0) = \varphi_2(x), \quad 0 < x < p, \quad (3)$$

boshlang'ich shartlarni hamda

$$u(0,t) = 0, \quad u(p,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (4)$$

$$u(x,T) = \varphi_3(x), \quad 0 \leq x \leq p \quad (5)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ - berilgan ma'lum funksiyalar.

Masala yechimining yagonaligi.

Quyidagi teorema o'rinli:

Teorema. Agar T , p sonlar va $Q(t) \in C^2[0,T]$, $Q''(t) \in L(0,T)$, $Q''(t)$ funksiya $[0,T]$ ishorasini o'zgartirmaydigan bo'lib u uchun shunday $\delta_0 = \text{const} > 0$ son mavjud bo'lsinki,

$$\lambda_n \int_0^T Q(\tau) \sin a \lambda_n (T - \tau) d\tau \geq \delta_0 \quad (6)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin, u holda (1)-masala bittadan ortiq yechimga ega bo'lmaydi, bu yerda

$$\delta_0 = \left| \frac{Q(T)}{a} \right| - \frac{1}{a} \sqrt{Q^2(0) + \frac{p^2}{a^2 \pi^2} Q'^2(0) - \frac{p}{a^2 \pi} |Q'(T) - Q'(0)|} \neq 0. \quad \lambda_n = n\pi/p, \quad n \in N.$$

Isbot. Teskaridan faraz qilamiz. Qo'yilgan masala $f_1(x)$, $f_2(x)$ va $u_1(x,t)$ $u_2(x,t)$ yechimlarga ega bo'lsin. U holda, ularning farqini

$$f_1(x) - f_2(x) = f_0(x), \quad (7)$$

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t) \quad (8)$$

deb olsak $u(x,t)$ va $f_0(x)$ funksiyalar birgalikda

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = Q(t) f_0(x), \quad (9)$$

tenglamani, $u(x, t)$ funksiya esa (2), (3), (4) va (5) shartlarga mos bir jinsli shartlarni qanoatlantiradi.

Ma'lumki,

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{p}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

sistema $L_2(0, p)$ fazoda to'la ortonormallangan sistemani tashkil qiladi.

Quyidagi funktsiyani qaraymiz:

$$q_n(t) = \int_0^p u(x, t) X_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

(11) funktsiyani

$$q_{n,\varepsilon}(t) = \int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u(x, t) X_n(x) dx, \quad 0 < \varepsilon < p, \quad (\varepsilon, p - \varepsilon) = \emptyset \quad (12)$$

ko'rinishida yozib olamiz.

(12) tenglikni t bo'yicha ikki marta differensiallab, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$q''_{n,\varepsilon}(t) = \int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u_{tt}(x, t) X_n(x) dx.$$

(9) tenglamadan foydalanib oxirgi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$q''_{n,\varepsilon}(t) = a^2 \int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u_{xx}(x, t) X_n(x) dx + Q(t) \int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} f_0(x) X_n(x) dx. \quad (13)$$

(13) tenglikni o'ng tarafidagi birinchi integralni ikki marta bo'laklab, so'ngra undan $\varepsilon \rightarrow 0$ limitga o'tib, quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q''_{n,\varepsilon}(t) &= a^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [X_n(p - \varepsilon) u_x(p - \varepsilon, t) - X_n(\varepsilon) u_x(\varepsilon, t)] - \\ &\quad - a^2 \lambda_n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [X'_n(p - \varepsilon) u(p - \varepsilon, t) - X'_n(\varepsilon) u(\varepsilon, t)] - \\ &\quad - a^2 \lambda_n^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u(x, t) X_n(x) dx + Q(t) \int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} f_0(x) X_n(x) dx. \end{aligned}$$

Bu ifodadan (4) chegaraviy shartlarga mos bir jinsli chegaraviy shartlardan va $X_n(x)$ funktsiyaning xossalarida foydalanib, quyidagi tenglikni olamiz:

$$q''_n(t) = -a^2 \lambda_n^2 \int_0^p u(x, t) X_n(x) dx + Q(t) \int_0^p f_0(x) X_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Oxirgi tenglikdan (11) tenglikni e'tiborga olib, quyidagi oddiy differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$q''_n(t) + a^2 \lambda_n^2 q_n(t) = Q(t) \int_0^p f_0(x) X_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Bu tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishga ega:

$$q_n(t) = C_{1n} \cos a \lambda_n t + C_{2n} \sin a \lambda_n t + \frac{f_n}{a \lambda_n} \int_0^t Q(\tau) \sin a \lambda_n (t - \tau) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

bu yerda C_{1n} va C_{2n} - ixtiyoriy o'zgarmas sonlar, $f_n = \int_0^p f_0(x) X_n(x) dx$

Endi C_{1n} , C_{2n} va f_n koeffisientlarni aniqlaymiz. Buning uchun (15) umumiy yechimni (2), (3) boshlang'ich va (5) chegaraviy shartlarga mos bir jinsli shartlardan, (11) tenglikka asosan hosil qilingan

$$q_n(0) = 0, \quad q_n'(0) = 0, \quad q_n(T) = 0 \quad (16)$$

shartlarga bo'ysindiramiz. Natijada (16) ning dastlabki shartidan $C_{1n} = 0$, $C_{2n} = 0$ ekanligi kelib chiqadi. (16) ning uchinchi shartiga asosan esa

$$\frac{f_n}{a\lambda_n} \int_0^T Q(\tau) \sin a\lambda_n(T - \tau) d\tau = 0,$$

tenglikka ega bo'lamiz. Hosil bo'lgan bu tenglikdan $\lambda_n \neq 0$ bo'lganligi uchun

$$f_n \cdot \lambda_n \int_0^T Q(\tau) \sin a\lambda_n(T - \tau) d\tau = 0,$$

Tenglikni hosil qilamiz. Budan esa (6), shartga asosan $f_n = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Yuqoridagilarga ko'rinadiki, $q_n(t) = 0$, $\forall t \in [0, T]$. U holda, (11) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\int_0^p u(x, t) X_n(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Demak, $u(x, t)$ funksiya (10) to'la sistemadagi barcha funksiyalar bilan ortogonal ekan. Bu esa $u(x, t)$ funksiya Ω sohaning deyarli hamma joyida $u(x, t) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. $u(x, t) \in C_{x,t}(\overline{\Omega})$ ekanligidan va (2)-(5) shartlarga mos bir jinsli shartlardan $u(x, t) \equiv 0$ ($x, t \in \overline{\Omega}$) ekanligi kelib chiqadi. Ushbu mulohazalarni

$$f_n = \int_0^p f_0(x) X_n(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

tenglik uchun ham takrorlab, $f_0(x) \equiv 0$ ekanligini topamiz.

Buni e'tiborga olsak, (7) va (8) tengliklardan $f_1(x) = f_2(x)$, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ tengliklar kelib chiqadi. Bu esa (1) masala yechimga ega bo'lsa, u yagona bo'lishini bildiradi. 1-teorema isbotlandi.

Izoh. (6) tengsizlik o'rinli bo'lishini ta'minlovchi T , p va $Q(t)$ lar to'plami bo'sh emas. T va p ni tanlab olish mumkin, bu yerda a – berilgan son.

(6) integralni ikki marta bo'laklab quyidagi ko'rinishga ega bo'lamiz:

$$\Delta = \lambda_n \int_0^T Q(\tau) \sin a\lambda_n(T - \tau) d\tau = \frac{1}{a} Q(T) - \frac{1}{a} Q(0) \cos a\lambda_n T - \frac{1}{a^2 \lambda_n} Q'(0) \sin a\lambda_n T - \\ - \frac{1}{a^2 \lambda_n} \int_0^T Q''(\tau) \sin a\lambda_n(T - \tau) d\tau.$$

Endi berilgan ifodadagi integralni hisoblashda o'rta qiymat haqidagi teoremadan foydalanamiz,

$$\Delta = \frac{1}{a} Q(T) - \frac{1}{a} Q(0) \cos a\lambda_n T - \frac{1}{a^2 \lambda_n} Q'(0) \sin a\lambda_n T - \frac{1}{a^2 \lambda_n} \sin a\lambda_n (T - t_0) \int_0^T Q''(\tau) d\tau,$$

yoki

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{a} Q(T) - \frac{1}{a} \sqrt{Q^2(0) + \frac{1}{a^2 \lambda_n^2} Q'^2(0)} \times \\ &\left[\frac{Q(0)}{\sqrt{Q^2(0) + \frac{1}{a^2 \lambda_n^2} Q'^2(0)}} \cos a\lambda_n T + \frac{\frac{1}{a\lambda_n} Q'(0)}{\sqrt{Q^2(0) + \frac{1}{a^2 \lambda_n^2} Q'^2(0)}} \sin a\lambda_n T \right] - \\ &-\frac{1}{a^2 \lambda_n} \sin a\lambda_n (T - t_0) [Q'(T) - Q'(0)]. \\ \sin \alpha &= \frac{Q(0)}{\sqrt{Q^2(0) + \frac{1}{a^2 \lambda_n^2} Q'^2(0)}}, \quad \cos \alpha = \frac{\frac{1}{a\lambda_n} Q'(0)}{\sqrt{Q^2(0) + \frac{1}{a^2 \lambda_n^2} Q'^2(0)}} \end{aligned}$$

belgilash kiritsak ohirgi tenglik

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{a} Q(T) - \frac{1}{a} \sqrt{Q^2(0) + \frac{1}{a^2 \lambda_n^2} Q'^2(0)} [\sin \alpha \cos a\lambda_n T + \cos \alpha \sin a\lambda_n T] - \\ &-\frac{1}{a^2 \lambda_n} \sin a\lambda_n (T - t_0) [Q'(T) - Q'(0)]. \end{aligned}$$

Yoki

$$\begin{aligned} |\Delta| &= \left| \frac{Q(T)}{a} \right| - \frac{1}{a} \sqrt{Q^2(0) + \frac{1}{a^2 \lambda_n^2} Q'^2(0)} \cdot |\sin(\alpha + a\lambda_n T)| - \frac{1}{a^2 \lambda_n} |\sin a\lambda_n (T - t_0)| \cdot |Q'(T) - Q'(0)| \geq \\ &\geq \left| \frac{Q(T)}{a} \right| - \frac{1}{a} \sqrt{Q^2(0) + \frac{1}{a^2 \lambda_n^2} Q'^2(0)} - \frac{1}{a^2 \lambda_n} |Q'(T) - Q'(0)| \geq \\ &\geq \left| \frac{Q(T)}{a} \right| - \frac{1}{a} \sqrt{Q^2(0) + \frac{p^2}{a^2 \pi^2} Q'^2(0)} - \frac{p}{a^2 \pi} |Q'(T) - Q'(0)| = \delta_0. \end{aligned}$$

Masala yechimning mavjudligi.

Masala yechimining mavjudligini ko'rsatish uchun o'zgaruvchilarni ajratish usulidan foydalanamiz.

2-teorema.

Agar $\varphi_1(x), \varphi_3(x) \in C^3[0, p] \cap C^4(0, p)$, $\varphi_1^{(3)}(x), \varphi_3^{(4)}(x) \in L_2(0, p)$, $\varphi_1^{(2i)}(0) = \varphi_1^{(2i)}(p) = 0$, $\varphi_3^{(2i)}(0) = \varphi_3^{(2i)}(p) = 0$, $i = \overline{0, 2}$, $\varphi_2(x) \in C^2[0, p] \cap C^3(0, p)$, $\varphi_2^{(3)}(x) \in L_2(0, p)$, $\varphi_2^{(2i)}(0) = \varphi_2^{(2i)}(p) = 0$, $i = \overline{0, 1}$ shartlar bajarilsa, masalaning yechimi mavjud.

Isbot. Avval (1) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning (4) shartlarni qanoatlantiruvchi trivial bo'lmagan yechimlarini topamiz. Bunday yechimni quyidagi ko'rinishda qidiramiz.

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (17)$$

(17) ifodani (1) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaga qo'yib, o'zgaruvchilarni ajratib, quyidagi tenglikni olamiz:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Oxirgi tenglikni o'ng tomoni faqat x o'zgaruvchiga, chap tomoni esa faqat t o'zgaruvchiga bog'liq, bundan ko'rinadiki, bu tenglik o'zgarmas songa teng. Uni $-\lambda^2$ o'zgarmas songa tenglab, $X(x)$ va $T(t)$ funksiyalarga nisbatan quyidagi oddiy differensial tenglamalarni hosil qilamiz:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < p; \quad (18) \quad T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (19)$$

(18) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda aniqlanadi.

$$X(x) = m_1 \cos \lambda x + m_2 \sin \lambda x, \quad (20)$$

bu yerda $m_j, j = \overline{1, 2}$ - ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

(4) chegaraviy shartlardan (17) ga asosan quyidagi shartlar kelib chiqadi:

$$X(0) = X(p) = 0,$$

(20) yechimni oxirgi shartlarga bo'ysindirib, trivial bo'lmagan quyidagi yechimlarni topamiz:

$$X_n(x) = m_{2n} \sin \frac{n\pi}{p} x, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

bu yerda $m_{2n} = \text{const} \neq 0, n \in N$ - ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

(21) da $m_{2n} = \sqrt{2/p}, n \in N$ deb olsak, (10) ko'rinishidagi to'la ortonormal sistemaga ega bo'lamiz.

(19) tenglamaning $\lambda = \lambda_n$ ga mos trivial bo'lmagan yechimini $T_n(t)$ bilan belgilasak, (1) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning (4) shartlarni qanoatlantiruvchi sanoqli sondagi $T_n(t) X_n(x)$ ko'rinishidagi yechimlarga ega bo'lamiz.

Endi qo'yilgan masalani yechimini quyidagi qator ko'rinishida qidiramiz:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cdot X_n(x). \quad (22)$$

(28) qatorni (1) tenglamaga qo'yib quyidagi tenglamani olamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n''(t) + a^2 \lambda_n^2 u_n(t)] X_n(x) = Q(t) f(x). \quad (23)$$

(23) tenglamani o'ng tarafidagi $f(x)$ funksiyani $(0, p)$ intervalda $\{X_n(x)\}$ sistema bo'yicha Fure qatoriga yoyamiz:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot X_n(x), \quad (24)$$

bu yerda $f_n = \int_0^p f(x) X_n(x) dx, n = 1, 2, \dots$

(24) ni (23) tenglamaga qo'yib quyidagi differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$u_n''(t) + a^2 \lambda_n^2 u_n(t) = f_n \cdot Q(t), \quad n = 1, 2, \dots. \quad (25)$$

(25) tenglamaning umumiy yechimini o'zgarmaslarni variatsialash usuli bilan topamiz:

$$u_n(t) = \varphi_{1n} \cos a \lambda_n t + \varphi_{2n} \sin a \lambda_n t + \frac{f_n}{a \lambda_n} \int_0^t Q(\tau) \sin a \lambda_n (t - \tau) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

bu yerda φ_{1n} va φ_{2n} - ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

(26) va (10) larni (22) qatorga qo'yib, (1) tenglamaning yechimini hosil qilamiz:

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \varphi_{1n} \cos a\lambda_n t + \varphi_{2n} \sin a\lambda_n t + \frac{f_n}{a\lambda_n} \int_0^t Q(\tau) \sin a\lambda_n (t - \tau) d\tau \right\} \sin \lambda_n x \quad (27)$$

(27) yechimni (2), (3) va (5) shartlarga bo'ysundirib φ_{1n} , φ_{2n} va f_n koeffisientlarini topamiz.

$$\varphi_{1n} = \int_0^p \varphi_1(x) X_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (28)$$

$$\varphi_{2n} = \frac{1}{a\lambda_n} \int_0^p \varphi_2(x) X_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (29)$$

$$\varphi_{3n} = \int_0^p \varphi_3(x) X_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (30)$$

bo'lib, f_n koeffisient quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$f_n = \frac{a\lambda_n^2 [\varphi_{3n} - \varphi_{1n} \cos a\lambda_n T - \varphi_{2n} a \sin \lambda_n T]}{\lambda_n \int_0^T Q(\tau) \sin a\lambda_n (T - \tau) d\tau}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (31)$$

Shunday qilib, (27) qatorning koeffisientlari (28), (29), (30) va (31) tengliklar bilan aniqlanib, uning o'zi va undan t bo'yicha ikki marta, x bo'yicha ikki marta hadlab hosila olishdan hosil bo'lgan qator $\bar{\Omega}$ da tekis yaqinlashsa, u holda (27) qatorning yig'indisi qo'yilgan masalaning yechimi bo'ladi.

Lemma. $\forall t \in [0, T]$ ba $n = 1, 2, \dots$ bo'lganda quyidagi baholar o'rinli bo'ladi:

$$|u_n(t)| \leq [\varphi_{1n} + |\varphi_{2n}|] + C_1 (a\lambda_n)^{-1} |\bar{f}_n| \|Q\|_{L(0,T)}, \quad (32)$$

$$|u'_n(t)| \leq a\lambda_n [\varphi_{1n} + |\varphi_{2n}|] + C_2 |\bar{f}_n| \|Q\|_{L(0,T)},$$

$$|u''_n(t)| \leq a^2 \lambda_n^2 [\varphi_{1n} + |\varphi_{2n}|] + a\lambda_n C_3 |\bar{f}_n| \|Q\|_{L(0,T)} + C_4 |\bar{f}_n| \|Q\|_{C(0,T)},$$

bu yerda C_j , $j = \overline{1, 4}$ - musbat o'zgarmas sonlar, $\bar{f}_n$ sifatida (31) formulaning surati nazarda tutilmoqda.

Isbot. (26) tenglik bilan aniqlanadigan $u_n(t)$ funksiyani baholaymiz. Avvalambor (26) ning uchinchi hadini baholaymiz. Bunda

$$\begin{aligned} (a\lambda_n)^{-1} |f_n| \left| \int_0^t Q(\tau) \sin a\lambda_n (t - \tau) d\tau \right| &\leq \frac{|\bar{f}_n|}{a\lambda_n \delta_0} \left| \int_0^t Q(\tau) d\tau \right| \leq \frac{|\bar{f}_n|}{a\lambda_n \delta_0} \int_0^t |Q(\tau)| d\tau = \\ &= C_1 (a\lambda_n)^{-1} |\bar{f}_n| \|Q\|_{L(0,T)}, \quad C_1 = \frac{1}{\delta_0} \end{aligned}$$

U holda (26) uchun

$$|u_n(t)| \leq [\varphi_{1n} + |\varphi_{2n}|] + C_1 (a\lambda_n)^{-1} |\bar{f}_n| \|Q\|_{L(0,T)}.$$

o'rinli bo'ladi. Yuqoridagi kabi, $u'_n(t)$ va $u''_n(t)$ larni ham baholashimiz mumkin. Lemma isbotlandi.

Endi (27) qatorni va

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} a^2 \lambda_n^2 u_n(t) \cdot X_n(x), \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} a^2 \lambda_n^2 u_n(t) \cdot X_n(x) + Q(t) \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \cdot X_n(x), \quad (34)$$

qatorlarni tekis yaqinlashishga tekshiramiz. Avval (33) qatorni tekshiraylik. Buning uchun unga mos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^2 \lambda_n^2 |u_n(t)|. \quad (35)$$

mojarant qatorni tuzamiz. Lemmadagi (32) tenglikni e'tiborga olib va o'zgarmaslarni qoldirib yozsak, quyidagi qator hosil bo'ladi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a^2 \lambda_n^2 |\varphi_{1n}| + a^2 \lambda_n^2 |\varphi_{2n}| + a^2 \lambda_n^2 \cdot |\bar{f}| \right].$$

Demak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a^2 \lambda_n^2 |\varphi_{1n}| + a^2 \lambda_n^2 |\varphi_{2n}| \right], \quad (36)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{a} \cdot |\bar{f}| \quad (37)$$

Qatorlarning yaqinlashuvchiligini isbotlashimiz kerak. Buning uchun (28) ni uch marta, (29) ni esa ikki marta bo'laklab, 2-teoremda $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ funksiyalarga qo'yilgan shartlarni hisobga olsak,

$$\varphi_{1n} = \sqrt{\frac{2}{p}} \left(\frac{p}{\pi n} \right)^3 \int_0^p \varphi_1^{(3)}(x) \cos \frac{\pi n}{p} x dx,$$

$$\varphi_{2n} = - \sqrt{\frac{2}{p}} \left(\frac{p}{\pi n} \right)^3 \int_0^p \varphi_2^{(2)}(x) \sin \frac{\pi n}{p} x dx,$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Hosil bo'lgan oxirgi tengliklarni

$$\varphi_{1n} = \left(\frac{p}{\pi} \right)^3 \frac{\varphi_{2n}^{(3)}}{n^3}, \quad \varphi_{2n} = - \left(\frac{p}{\pi} \right)^3 \frac{\varphi_{1n}^{(2)}}{n^3}, \quad (38)$$

ko'rinishida yozib olamiz, bu yerda

$$\varphi_{2n}^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p \varphi_1^{(3)}(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx, \quad \varphi_{1n}^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p \varphi_2^{(2)}(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx.$$

(38) ni (36) ga qo'yib, quyidagi natijaga kelamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^2 \left[\frac{|\varphi_{1n}^{(2)}|}{n} + \frac{|\varphi_{2n}^{(3)}|}{n} \right]. \quad (39)$$

Bu qatorning yaqinlashuvchanligi

$$\frac{|\varphi_{1n}^{(2)}|}{n} \leq \frac{1}{2} \left[\left(\varphi_{1n}^{(2)} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \right], \quad \frac{|\varphi_{2n}^{(3)}|}{n} \leq \frac{1}{2} \left[\left(\varphi_{2n}^{(3)} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \right],$$

Elementar tengsizliklarga asosan kelib chuvchi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\varphi_{1n}^{(2)} \right)^2 + \left(\varphi_{2n}^{(3)} \right)^2 \right], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

qatorlarning yaqinlashishidan kelib chiqadi.

Birinchi qatorning yaqinlashuvchanligi bo'lakli uzluksiz bo'lgan $\varphi_1^{(3)}(x)$, $\varphi_2^{(2)}(x)$ funksiyalar uchun Bessel tengsizligidan kelib chiqadi. Ikkinchi umumlashgan garmonik $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

qator bo'lib, $\alpha > 1$ bo'lgani uchun yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, (36) qator yaqinlashadi. Endi (37) qatorning yaqinlashuvchiligini ko'rsatishda (31) tenglik suratini (37) ga qo'yib, quyidagi majorant qatorni hosil qilamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda_n^3 |\varphi_{3n}| + \lambda_n^3 |\varphi_{1n}| + \lambda_n^3 |\varphi_{2n}| \right]. \quad (40)$$

(40) qatorni yaqinlashuvchiligini isbotlash uchun (28) va (30) ni to'rt marta (29) ni uch marta, bo'laklab, 2-teoremada $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ va $\varphi_3(x)$ funksiyalarga qo'yilgan shartlarni hisobga olsak, (40) qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left| \varphi_{3n}^{(4)} \right| + \left| \varphi_{1n}^{(4)} \right| + \left| \varphi_{2n}^{(3)} \right| \right] \frac{1}{n} \quad (41)$$

ko'rinishini oladi, bu yerda

$$\varphi_{1n}^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p \varphi_1^{(4)}(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx, \quad \varphi_{2n}^{(3)} = -\sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p \varphi_2^{(3)}(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx,$$

$$\varphi_{3n}^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p \varphi_3^{(4)}(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx.$$

(41) qatorning yaqinlashishini huddi (39) qatorning yaqinlashishi kabi ko'rsatish mumkin. Demak, (37) qator yaqinlashadi. U holda, (35) majorant qator tekis yaqinlashadi.

Demak, $\overline{\Omega}$ sohada (33) va (27) qatorlar absolyut va tekis yaqinlashadi. (34) dagi ikkinchi qatorning absolyut va tekis yaqinlashishi (37) qatorning yaqinlashishidan kelib chiqadi. U holda, (34) qator ham $\overline{\Omega}$ da absolyut va tekis yaqinlashadi. Shunday qilib,

agar 1 va 2 teoremlar shartlari bajarilsa, (27), (33) va (34) qatorlar absolyut va tekis yaqinlashadi. U holda bu qatorlar birgalikda (1) tenglamani qanoatlantiradi va (27) ning yig'indisi (2)-(5) shartlarni qanoatlantiradi ya'ni qo'yilgan masalaning yechimi bo'ladi, bunda $f(x)$ - (24) ko'rinishidagi funksiya bo'lib, f_n esa (31) tenglik bilan aniqlanadi. *Teorema isbotlandi.*

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. I. Knowles, M. Yamamoto. Determination of source terms in the wave equation using boundary measurements. SIAM Journal on

Applied Mathematics, 53(6), 1600–1616 (1993).

2. V.G. Romanov. Inverse Problems of Mathematical Physics. VNU Science Press, Utrecht, 1987.

3. O. Imanuvilov, M. Yamamoto. Determination of a source term in a wave equation by boundary measurements. *Applicable Analysis*, 70(1-2), 51–65 (1998).
4. A. Hasanov. Inverse source problems for hyperbolic equations and their applications. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 21(3), 446–464 (2013).
5. A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin. *Solutions of Ill-posed Problems*. Winston & Sons, Washington, DC, 1977.
6. A.K. Urinov, M.S. Azizov. Boundary Value Problems for a Fourth Order Partial Differential Equation with an Unknown Right-hand Part. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42(3), 632–640 (2021).
7. D.A. Tursunov, K.G. Kozhobekov, A.O. Mamytov, B.E. Matieva. Solvability of One Class of Inverse Problem for Partial Differential Equations. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 45, 3453–3462 (2024).
8. R.R. Ashurov, R.T. Zunnunov. Inverse Problem for Determining the Order of the Fractional Derivative in Mixed-Type Equations. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42, 2714–2729 (2021).
9. E. Azizbayov. Inverse coefficient identification problem for a hyperbolic equation with nonlocal integral condition. *Turkish Journal of Mathematics*, 46(4), 1243–1255 (2022).
10. D.K. Durdiev, T.R. Suyarov. Inverse coefficient problem for the 2D wave equation with initial and nonlocal boundary conditions. *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 26(2), 5–25 (2024).

PNEVMOTRANSPORTI VENTILYATORI PARRAKLI DISKI MASSASINI ENGILLATISH, VENTILYATOR ISH SAMARADORLIGIGA TA'SIRI

X. Ismoilov, M. Namozova, S. Axmadjonova

Z. M. Bobur nomidagi Andijon davlat universiteti, O'zbekiston, 170100, Andijon sh, Universitet ko'chasi 129 uy

2025-yil 22-noyabrda berilgan; 2025 yil. 15-dekabr chop etish uchun qabul qilingan.

Annotatsiya. Maqolada aerodinamik tizimlar, shuningdek pnevmotransport ham energiyani ventilyator vositasida sarflashiga bog'liqligi o'rganilgan. Ventilyator energiya sarfi uning ishchi qismlari parragi, parrak qanot qismi, qanotni joylashish gradusi, parrakni qobiqda qanday joylashishiga bog'liq. Bulardan tashqari, parrak massasi ham ventilyator quvvatga va elektr energiya sarfiga katta ta'siri ko'rsatishi mumkin. Ishda ventilyator parragi massasini kamaytirish usulari, uning quvvatiga va elektr energiya sarfiga ta'siri nazariy va tajriba yo'li bilan asoslangani keltirilgan.

Kalit so'zlar: Pnevмотransпорт, ko'ndalang kesim yuzasi, quvur, paxta, ventilyator, aerodinamik kuch, siklon, paxta g'arami, havo sarfi, parrak, parrak massasi, termoreaktiv polimer.

Аннотация: В статье исследована зависимость энергопотребления аэродинамических систем, а также пневмотранспорта от расхода энергии с помощью вентилятора. Энергопотребление вентилятора зависит от его рабочих элементов: рабочего колеса, лопаток колеса, угла установки лопаток, а также от расположения рабочего колеса в корпусе. Кроме того, масса лопаток также может оказывать значительное влияние на мощность вентилятора и потребление электрической энергии. В работе приведены теоретические и экспериментальные обоснования методов снижения массы лопаток вентилятора и их влияния на его мощность и потребление электроэнергии.

Ключевые слова: Пневмотранспорт, поперечное сечение продукта, производство, хлопок, вентилятор, динамическая сила, циклон, хлопковая масса, расход воздуха, диска, масса диска, терморезактивный полимер.

Abstract: The article examines the dependence of energy consumption in aerodynamic systems, as well as pneumatic transport, on energy usage through a fan. The fan's energy consumption depends on its working components, including the impeller, the blade airfoil section, the blade installation angle, and the positioning of the impeller within the casing. In addition, the mass of the impeller blades can significantly affect the fan power and electrical energy consumption. The study presents theoretical and experimental justifications of methods for reducing the mass of fan blades and their influence on fan power and electrical energy consumption.

Key words: Pneumotransport, cross-sectional area, pipe, cotton, fan, aerodynamic force, cyclone, cotton drum, air flow rate, blade, blade mass, thermoreactive polymer.

KIRISH.

Pnevмотransportning asosiy kamchiliklaridan biri uning energiya sarfi yuqori bo'lib, unda faqatgina ventilyator elektr energiya sarf qiladi. Elektr toki manbai ventilyatorning elektr yuritkichi, ya'ni motoriga ulangan. Boshqa elementlar, masalan, quvur, tosh tutkichdagi tirqishlar, separatorning tashqaridan havo so'rishi, chig'anoqlar, siklon kabilarning aerodinamik qarshiligi sababli sarf bo'ladigan bosim, quvvat va elektr energiyasi ventilyator motori zimmasiga tushadi [1,2]. Shuning uchun, barcha aerodinamik tizimlar, shuningdek pnevmotransport ham energiyani ventilyator vositasida sarflaydi. Bu degani, pnevmotransport sarflaydigan quvvat va elektr energiyasi sarfi-bu ventilyator sarflaydigan quvvat va elektr energiyasi sarfi hisoblanadi. Shuning uchun, pnevmotransport elektr

energiyasi sarfini kamaytirish uchun ventilyator elektr energiyasi sarfini kamaytirish kerak bo'ladi.

Undan tashqari pnevmotransport ventilyatori ishchi qismlari parragi, parrak qanot qismi, qanotni joylashish gradusi, parrakni qobiqda qanday joylashishi, hamda, ventilyator parragi massasini ham ventilyator sarflaydigan quvvat va elektr energiyasi sarfiga ta'sir ko'rsatadi[3,4].

MATERIAL VA USULLAR.

Ventilyator elektor energiyasi sarfi uning quvvati sarfi ko'rinishida namoyon bo'ladi va uni quyidagi tenglama yordamida aniqlash mumkin:

$$N = I \cdot U = \frac{Q \cdot P}{\eta} \quad (1)$$

Shuningdek, quvvatning quyidagi tenglamasi ham mavjud:

$$N = M \cdot \omega \quad (2)$$

Ventilyator parragining qarshilik momenti parrakning J_n inersiya moment va qarshilik kuchlarining J_q inersiya momentlari yig'indisiga teng:

$$M = J_n + J_q \quad (3)$$

Ventilyator parragining inersiya momenti uning massasi m va tezligi v ga quyidagicha bog'liq[5]:

$$J_n = m \frac{v^2}{2} \quad (4)$$

Bu tenglamaga ko'ra, parrak massasi qanchalik katta bo'lsa, ventilyator energiya sarfi ham shunchalik yuqori, aksincha bo'lsa, past bo'ladi. Ya'ni, parrak massasini kamaytirish ventilyator va oqibatda pnevmotransport energiya sarfini kamayishiga olib keladi.

Yuqoridagilarga ko'ra ventilyator parragi masasining ventilyator energiya sarfiga ta'sirini aniqlash va kichik massaga ega, mustahkamligi yuqori bo'lgan parrak konstruksiyasini amaliy tadqiqodlar orqali ishlab chiqishga harakat qilamiz.

NATIJALAR VA MUHOKAMA.

Amaliy tadqiqodlar Namangan To'qimachilik sanoati instituti Tabiiy tolalarni dastlabki ishlash texnologiyasi ilmiy laboratoriyasi va Namangan shaxri, "Ven-kon air engineering" xususiy korxonasida amalga oshirdik. Ilmiy izlanishlar parallel ikkita yuqori bosimga ishlovchi markazdan qochma ventilyatorlarda amalga oshirildi. Birinchi ventilyator yuritkichi 4 kVt quvvatli 3000 ayl/min tezlikda aylanuvchi(chang ventilyatori), uzunligi 26 mgacha uzaytiriladigan quvurlar tizimiga ulangan, hamda, VS-8M yuritkichi 30 kVt quvvatli 1500 ayl/min tezlikda aylanuvchi ventilyatorlarda amalga oshirildi.

Birinchi bo'lib, 26 m quvurlar tizimiga ega bo'lgan pnevmotransport tizimi yig'ildi(1-rasm). Tadqiqot ob'yekti sifatida ventilyator parragi belgilandi. Solishtirish uchun amaldagi ventilyator parragi va kompozit materialdan quyib, tayyorlangan parrak olindi.



1-rasm. 26 m quvurlar tizimiga ega bo'lgan pnevmotransport

Bu parrakni tayyorlash uchun amaldagi parrakni andoza qilib olib, maxsus qolip tayyorlandi. Tadqiqot uchun Andijon mashinasozlik institutida 2021-2023 yillarda bajarilgan UZB-Ind-2021-85-sonli "Nano-termoplast (polipropilen), reaktoplast (epoksid smolasi asosida), nano o'lchamdagi to'ldiruvchilar bilan boyitilgan polimer kompozit materiallar va qoplamalarini mexanik xamda tribologik xossalarini takomillashtirish" mavzusida O'zbekiston-Hindiston hamkorligidagi xalqaro ilmiy-amaliy loyixada eng mustaxkam, antifriksion yeyilishbardoshligi eng yaxshi, deb topilgan sinov namunalaridan biri olindi.

ED-20 ga asoslangan suyuqlik kompozitsiyalarini, silliq bo'lmagan yuzaga sepush, shpatel va cho'tka yordamida surtish, tayyorlangan GKPM suyuqlikka botirib olish yoki quyish usuli orqali qo'llash tavsiya etilgan. Kerakli materiallar miqdori polimer massasidan havo pufakchalarini olib tashlash uchun 60-80°C gacha qizdiriladi, keyin 50-60°S haroratda, ehtiyotkorlik bilan aralashtirib, plastiklashtiruvchi DBF qo'shiladi. Agar kerak bo'lsa, sinchlovchi va kukunsimon to'ldiruvchilar qo'shiladi. Eng so'nggida, surtishdan oldin, polietilen poliamin PEPA qotiruvchi hona haroratida 10 massa qismda qo'shiladi. Yuqori sifatli qoplamani olish, qoplamalar yuzalarga bir hil qalinlikda qotishini ta'minlash uchun namunalar hona haroratida 0,5-1 soat davomida maxsus stendga solib aylantiriladi. Keyin epoksid kompozitlar 1,5-2 soat davomida 35-40°S haroratda qattiq holatga keltiriladi.

1-jadval: Antifriksion yeyilishbardosh qoplamalar uchun geterokompozit materiallar tarkibi va mexanik hossalari

Qoplamalar uchun kompozitlar tarkibi va xususiyati	Tarkibiy massa qism				
	1-namuna	2-namuna	3-namuna	4-namuna	5-namuna
1	2	3	4	5	6
ED-20	100	100	100	100	100
DBF	10	10	10	10	10
PEPA	10	10	10	10	10
Grafit	2,0	2,25	2,5	2,75	3,0
Angren Kaolini	20	25	30	40	50
IQICH chiqindisi	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
1	2	3	4	5	6
Xlorlangan polietilen	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
Mikromustahkamlik N_m , MPa	210	216	212	205	195
Adezion mustahkamlik (na otziv) σ_{ad} , MPa	32,5	33,2	28,2	26,6	25,1
Zarbiy mustahkamlik σ_{ud}	22	25,2	28,1	31,1	32,2

Bu namunalardan ventilyator parragini quyish uchun 5-namuna olindi.

Korxonaning quyish sexida tayyorlangan suyuqlik qolipga quyilib, 1 sutka quritishga qo'yildi. Parrak bir kunda quridi, lekin mustahkamlikni oshirish maqsadida yana uch kun o'tkazildi (2-rasm)

Kompozit polimer materialda quyilgan parrakning orqa tomoni chilangarlik

uskunasida yo'nildi, silliqlash uskunasida silliqlandi, markazlandi (sentrovka), muvozanatlandi (balansirovka qilindi). Parrakning ishchi yuzasi bolgarkada, uning parragi yetmaydigan joylari qo'lda silliqlandi.

Mavjud parrak alyuminiydan quyilgan bo'lib, uning masasi o'lchandi $m_p=12$ kg chiqdi. Polimerdan tayyorlangan parrak massasi o'lchandi, uning massasi $m_{pp}=5,97$ kg chiqdi.



2-rasm. Chap tomonda kompozit polimer materialda quyilgan parrak va o'ng tomonda unga ishlov berish jarayoni.

Demak, parrak massasi 2 barobarga kamaygan. Bu holat parrak qarshilik momentining ham 2 barobar kamayishini ta'minlaydi, bundan ventilyator energiya sarfi kamayadi.

2-jadval

Aerodinamik o'lchovlar natijalari

No	Ventilyator xolati	Tok kuchi (A)	Kuchlani sh (V)	Quvvat wt	Chastot a Gs	Statik bosim (R)	Dinamik bosim (R)	Tezlik m/s
Mavjud parrakdagi olchovlar								
1	Ventilyator quvurchasi yopiq xolatda(0,20 m)	2,7	380	1,53	50	5250		
	0,20 m	7,9	380	4,47	50	3350	1880	56
	6,70 m	7,9	380	4,47	50	2800	1810	55
	25,6 m	7,9	380	4,47	50	1180	1620	52

Ventilyator o'lchov parametrorlarini olish uchun pnevmotransport quvuri trassasining 3 ta joyidan pito naychasi sig'adigan qilib teshildi. 1-teshik ventilyator bo'g'zidan 0,20 m uzoqlikda, 2-teshik 6,70 metrda va 3-teshik 25,5 metr masofada teshildi. Qurilma elektr yuritkichi 380 V li tok manbaiga inverter

qurilmasi orqali ulandi va undan tok kuchi va kuchlanish o'zgarishi kuzatib borildi. Quvurdagi so'rilayotgan havoning tezligi elektron anemometr, havo bosimi esa pito naychali elektron mikromanometr yordamida o'lchandi.

Quvur dimetriga bog'liq ravishda havo oqimi tezligi va sarfi hisoblab topildi hamda tegishli jadvalga kiritildi (2-jadval).

Polimer parrak ventilyatorga qo'yildi, extiyotkorlik yuzasidan invertordan asta-sekin yuritkich aylanishi ko'tarib borildi. Avvaliga ventilyator muamosiz ishlay boshladi. Lekin, yuritkich aylanishlar soni 1500 ayl/minutdan o'tgach ventilyatorni ishlashi o'zgarib parrak parchalanib ketdi. O'lchovlarni olish imkoni bo'lmadi.

Amalga oshirilgan tadqiqotlarimiz ijobiy natija bilan tugamadi. Ammo, ilmda salbiy natija ham natija sifatida baholanadi. Bundan - chiqaradigan xulosa shundan iboratki, yangi polimer material katta yuklamaga chidamsiz, - ayniqsa, undan katta yuklanish bilan ishlaydigan ishchi qism va detallarni tayyorlash maqsadga muvofiq emas.

Navbatdagi tadqiqotlarda laboratoriya sharoitida o'rganilgan yangi kompozit paliimer materialni metall parrakka qoplama va parrakni bir qismini quyish orqali massasini yengilatib ishlatib ko'rishni maqsad qildik. Bunda, paxta sanoatida ko'p foydalaniladigan VS-8M ventilyatori parrakli diskni tadqiqot ob'yekti sifatida olindi. 3-rasmda VS-8M ventilyatori va uning parragi umumiy ko'rinishi keltirilgan.

Tadqiqot uchun 2 ta bir xil parrakli disk olindi. Parrakli disk po'latdan yasalgan bo'lib, o'lchanganda uning massasi $m_{vsp}=40$ kg chiqdi. Diskning biri balansirovka qilindi va ventilyatorga o'rnatildi. Ikkinchi parrakli disk kompozit material bilan qoplash uchun ajratildi.

Avvalgi tajribalarda qo'yilgan maqsad va ulardan olingan natijalar asosida yangi tajribalar oldiga parrakli diskka qoplama berishdan oldin uni yengillatish vazifasi qo'yildi.

Parrakli diskni yengillatishning quyidagi usullarini tavsiya etish mumkin:

1. *Parrakli diskni yengil(zichligi past bo'lgan) konstruksion materiallardan tayyorlash;*

- alyuminiy qotishmalari;
- magniyli (rux + alyuminiy) qotishmalari;
- titanli qotishmalar;
- kompozitsion materiallar.

2. *Parrakli diskni yuqori qattqlikka ega bo'lgan, toblangan po'latdan olingan yupqa listlardan tayyorlash* (bunda materialning

qimmatligi uning kam sarflanishi bilan kompensatsiyalanadi);



3-rasm. Chap tomonda xarakatlanuvchi VS-8M va o'ng tomonda ventilyator ishchi parragi ko'rinishi.

3. *Tarkibli konstruksiyalarni qo'llash:*

- po'lat karkas + kompozitsion material qoplamasi;
- po'lat karkas + yengil metallar qoplamasi va boshqalar.

4. *Maxsus, yengil, qattiq va mustahkam yangi konstruksion materiallar ishlab chiqish.*

Biz, o'z tadqiqotlarimizda parrakli diskni yengillatishning po'lat karkas + kompozitsion material qoplamasini qo'llash usullaridan foydalandik.

Ventilyator parrakli diskini yengillatish maqsadida parrakli diskning yuk kam tushadigan qismlarini kesib olish loyihasi ishlab chiqildi. Loyiha sxemasi 4-rasm chap tomonida keltirilgan.

Sxemada keltirilgan figuralar o'rni kesib olinadi va bu tadbir uning umumiy shaklini saqlab qoladi hamda disk mustahkamligining talab qilingan chegaralardan pasayishiga yo'l qo'ymaydi. Shuningdek, bunda, parraklarning butunligi to'liq saqlandi va kesish faqat orqa disk hisobidan amalga oshiriladi.

Parrakli diskning ajratilgan qismlari lazerli uskunada kesib olindi va disk yuzasi perforatsiya qilingan yuza ko'rinishiga keldi (4 - o'rtadagi rasm).

Navbatdagi bosqichda, parrakli disk tushadigan qolip tayyorlandi va parraklar yuqorida qoladigan holatda disk qolipga o'rnatildi. Avvaldan tayyorlab qo'yilgan kompozit suyuqlik asta-sekinlik bilan disk ustidan uning yuzasi 1-1.5 mm botgunicha quyildi. Parrakning qolgan qismlari polimer bilan kompressorli purkagich yordamida qo'plandi (4 - o'ngdagi rasm). Qoplama mustahkam o'rnatilib, qotishi uchun 3 sutka xona xaroratida saqlandi.

So'ngra, diskning orqa tomoni silliqlash uskunasida, parrak tomoni esa bolgarka yordamida, oraliq joylari qo'lda jilvir qog'oz bilan ishlov berildi. Polimer material bilan

qoplangan va silliqlangan parrakli disk tortilganda, yangi parrakning massasi $m_{pmp}=31$ kg ga teng bo'ldi. Demak, parrak massasi 9 kgga kamaydi va



4-rasm. Chap tomonda parrak diskining lazerda kesish uchun chizma, markazda lazerda kesilgan parrak va o'ng tomonda polimer quyilgan parrakli disk ko'rinishi.

bu tadbir ventilyator energiya sarfining kamayishiga olib keladi.

So'ngra, ventilyator va 280 mm diametrlilik quvurlardan tashkil topgan aerodinamik uskuna 3-rasmdagi sxema asosida terildi. Aerodinamik parametrlarni boshqarish uchun, ventilyatorning 11 kVt quvvatga ega bo'lgan elektr yuritkichi elektr toki manbaiga inverter vositasida ulandi. Havo oqimi parametrlarini kuzatib borish uchun ventilyatordan oldin quvurga statsionar elektron mikromanometr

o'rnatildi. Quvurning turli nuqtalaridagi havo bosimini pito naychali elektron mikromanometr, quvur boshidagi havo tezligini o'lchash uchun esa elektron anemometrdan foydalanildi.

Dastlab, mavjud parrakli disk o'rnatilgan ventilyator sinovdan o'tkazildi (3-jadval). So'ngra, ventilyator parrakli diski yechib olinib, o'rniga engillashtirilgan kompozit material qoplangan parrakli disk o'rnatildi.

3-jadval

Aerodinamik o'lchovlar natijalari

No	Ventilyator xolati	Tok kuchi (A)	Kuchlanish (V)	Quvvat kVt	Chas tota Gs	Statik bosim (R)	Dinamik bosim (R)	Tezlik m/s	Havo sarfi, m ³ /s	Ventilyator FIK
Mavjud parrakli diskdagi o'lchovlar										
1	Ventilyator patrubkasi yopiq xolatda(0,20 m)	18	380	6.8	50	2550			-	-
	0,20 m	21	380	8.0	50	2280	399.7	25.8	1.58	0.53
	6.7 m	21	380	8.0	50	2078	381.0	25.2	1.55	0.45
	25.6 m	21	380	8.0	50	1750	331.4	23.5	1.45	0.35

Olingan natijalar 4-jadvalda berilgan. Natijalarga qaralsa, parrakli diskning yengillatilishi va unga kompozit material qoplanishi ventilyator xosil qiladigan nominal bosimni 70 Paga oshirish va buning uchun sarf

qilinadigan nominal quvvatni 0.7 kVt/soatga kamaytirish imkonini beradi. Shuningdek, ventilyator patrubkasi ochilgach, quvvat sarfi amaldagi parrakda 8 kVt/soatni, engillashtirilgan palimer qoplamali parrakda

6.8 kVt/soatga pasaygani, bosim 2679.7 Padan engillashtirilgan palimer qoplamali parrakda 2715 Paga, ventilyatorning foydali ish koeffitsiyenti 0.53 dan 0.64 ga oshgani ko'rinadi. Quvvur uzunligining o'zgarishi oqim parametrlarining deyarli bir xilda pasayib

borishiga olib kelmoqda. Bu holatlar, parrakni yengillatish va unga kompozit qoplama berish ventilyator quvvat sarfini 10.3% ga kamaytirish, u hosil qiladigan to'liq bosimni 1.3% oshirish imkonini beradi.

4-jadval

Aerodinamik o'lchovlar natijalari

Ventilyator xolati		Tok kuchi (A)	Kuch la nish (V)	Quv vat kVt	Chas tota Gs	Statik bo sim (R)	Dina mik bosim (R)	Tez lik, m/s	Havo sarfi, m ³ /s	Ventil yator FIK
Kompozit polimer material qoplangan parrakli disk bilan										
Ventilyator patrubbasi yopiq xolatda(0,20 m)		16	380	6.1	50	2620	-	-	-	
	0,20 m	18	380	6.8	50	2310	405.0	26.0	1.59	0.64
	6.7 m	18	380	6.8	50	2090	386.0	25.4	1.56	0.57
	25.6 m	18	380	6.8	50	1790	345.2	24.0	1.48	0.42

XULOSA.

Yangi polimer materialdan tayorlangan 2 barobarga engillashtirgan parrak katta yuklamaga chidamsiz, ayniqsa, undan katta yuklanish bilan ishlaydigan ishchi qism va detallarni tayyorlash maqsadga muvofiq emas.

Ventilyator parragi ishchi yuzasining g'adir-budirligi uning ish unumiga katta ta'sir qiladi. Ventilyator parragini ishchi yuzasining g'adir-budirligini termoreaktiv kompozit polimer material bilan qoplash orqali siliqlash ventilyator ish unumini ortishiga olib keladi

Parrakli diskning massasi ventilyator energiya sarfiga katta ta'sir ko'rsatadi. ventilyator parragini yengillatish va unga kompozit qoplama qoplash ventilyator quvvat sarfini kamaytirish, u hosil qiladigan to'liq bosimni oshirish imkonini beradi. Xususan, ventilyator parragini 22.5% ga yengillatilishi sarf qilinadigan nominal quvvatni 0.7 kVt/soat (10.3%)ga kamaytirish imkonini beradi. Demak,u hosil qiladigan to'liq bosimni 1.3% oshganini ko'rishimiz mumkin.

Kelajakdada mustahkamligi yuqori bo'lgan o'ta engil termoreaktiv kompozit polimer materyaldan foydalanib, ayrodinamik

uskunalarni qisimlarini tayorlash maqsad qilingan.

ADABIYOTLAR

- [1] Мурадов Р., Саримсаков О., Хусанов С. Внутризаводская пневмотранспортировка хлопка-сырца: состояние, проблемы и перспективы. Журнал «Механика муаммолари», 2014, №2
- [2] «Ўзпахтасаноат» АБ, “Пахтани дастлабки қайта ишлаш” (Первичная обработка хлопка),Т.,«Мехнат», 2002г.
- [3] Саримсаков О. Пахтани пневмотранспортга узатиш ва ҳаво ёрдамида ташиш жараёнини такомиллаштириш. Монография. «Наврўз» нашриёти, Наманган, 2019 й.
- [4] M.U. Toxirova, O.Sh. Sarimsaqov X. Ismoilov Pnevмотransport quvvuri kirish qismi aerodinamik qarshiligini kamaytirish FerPI Ilmiy-texnika jurnali 2022 y. Tom 26 №3. 94-99 b.
- [5] X. Ismoilov Pnevмотransport ventilyator parametrlarining parrak ishchi yuzasi silliqqligiga bog'liqligi haqida ADU Ilmiy habarnoma fizika-matematika tadqiqotlari jurnali 2025 y. Tom 7 №3. 102-107 b

ESTIMATION OF THE ACCURACY OF A THIRD-ORDER TAYLOR FORMULA-BASED APPROXIMATE METHOD FOR THE CAUCHY PROBLEM IN DYNAMICAL SYSTEMS

O.Kh. Abdullayev¹, O.S. Akhmedov², A.Kh. Abdullayev³

¹ Andijan state university, 170100 Andijan, Uzbekistan.

² Andijan branch of Kokand University, 170100 Andijan, Uzbekistan.

³ V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Sciences, 100174 Tashkent, Uzbekistan.

Submitted November 20, 2025; Accepted for publication December 10, 2025

Abstract. This paper discusses a third-order accurate scheme constructed on the basis of the Taylor formula to obtain an approximate solution of the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations. Examples are constructed using the obtained estimates to verify the accuracy of the approximate solution.

Keywords: Taylor formula, Cauchy problem, error estimate, dynamical systems, approximate solution.

Аннотация. В данной статье рассматривается точная схема третьего порядка, основанная на формуле Тейлора, для нахождения приближенного решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Приводятся примеры с использованием полученных оценок точности приближенного решения.

Ключевые слова: Формула Тейлора, задача Коши, оценка погрешности, динамические системы, приближенное решение.

Annotatsiya. Ushbu maqolada oddiy differensial tenglamalar sistemalari uchun Koshi masalasining taqribiy yechimini topish maqsadida Taylor formulasi asosida qurilgan uchinchi tartibli aniq sxema ko'rib chiqiladi. Taqribiy yechimning aniqligi uchun olingan baholardan foydalanib misollar quriladi.

Kalit so'zlar: Taylor formulasi, Koshi masalasi, xatolik bahosi, dinamik sistemalar, taqribiy yechim.

INTRODUCTION

It is needless to note the importance of estimating accuracy for approximate solutions of ODEs. Here we consider the problem [1]

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

where $x \in D \subset \mathbb{R}^d$ and D is a convex domain. In what follows, we assume that the function $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ is three times differentiable with continuous derivatives in D . The effectiveness and quality of the approximate solution method is determined by the achievable level of accuracy. If $x_*(t)$ is the exact solution and $\hat{x}(t)$ is an approximate solution of problem (1) ($0 \leq t \leq T$), then the accuracy is expressed by an inequality of the form $\sup_{0 \leq t \leq T} |x_*(t) - \hat{x}(t)| \leq Ce^{LT} h^s$ (2)

where L is the Lipschitz constant, h is the step size of the grid at which the approximate

solution is computed, and s is the order of accuracy of the method.

This study examines the approximate solution schemes based on the Taylor formula. With the rapid development of computer algebra systems, it has become possible to compute derivatives of a wide class of functions $f(x)$ automatically.

There is another important motivation for considering the Taylor method. Since the 1960s, numerical methods have been applied not only to obtain approximate solutions of dynamical systems, but also to study their qualitative properties, in particular to prove theorems describing prescribed properties. This requires a deductive mathematical proof of inequalities of the form (2) [4]. In this context, Taylor-based approximation methods are more convenient than Runge-Kutta methods [2,3,5,7].

AN APPROXIMATE SOLUTION SCHEME BASED ON THE TAYLOR FORMULA

For a continuous function $f(x)$ the solution of the Cauchy problem (1) exists and unique. However, estimating its interval of existence is not straightforward [6,8,9]. In this regard, we begin our analysis with the following assumption.

Assumption 1. The solution $x_*(t)$ to the Cauchy problem (1) exists on the segment $[0, T]$.

In numerical integration, as a rule, the values of the solution $x_*(t)$ are sought in a grid $\{t_0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T\}$. Here we restrict ourselves to a uniform grid $t_n = nh$, where

$$h = \frac{T}{N}, \quad N \in \mathbb{N}^+.$$

For an exact solution, we write the Taylor formula with accuracy $O(h^3)$:

$$x_*(t + nh) = x_*(t) + h\dot{x}_*(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}_*(t) + \frac{h^3}{6}\dddot{x}_*(t) + R_4(t, h),$$

where

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= f[x_*(t)], \quad \ddot{x}_*(t) = f'[x_*(t)]f[x_*(t)], \\ \dddot{x}_*(t) &= f''[x_*(t)]f[x_*(t)]f[x_*(t)] + f'[x_*(t)]f'[x_*(t)]f[x_*(t)]. \end{aligned}$$

Neglecting the remainder term, the following recurrence formula is generated for the residual solution:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n) + \frac{h^2}{2}(f'f)(x_n) + \frac{h^3}{6}(f''ff + f'f'f)(x_n).$$

In order to build the approximate solution, we introduce the following step function:

$$\sigma_t = \sigma(t) = \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor \cdot h.$$

We list the the following properties of this step function:

1. $nh \leq \sigma(t) < (n+1)h$, here $n = \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor$ (this property is equivalent to the definition);
2. $\sigma(\sigma(t)) = \sigma(t)$;
3. If $t \leq s < t + h$, so, then $\sigma(s) = \sigma(t)$.

Definition. The function

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x_0 + \int_0^t \left\{ f[\tilde{x}(\sigma_s)] + \right. \\ &\quad \left. + (s - \sigma_s)(f'f)[\tilde{x}(\sigma_s)] + \frac{(s - \sigma_s)^2}{2}(f''ff + f'f'f)[\tilde{x}(\sigma_s)] \right\} ds, \end{aligned} \quad (3)$$

is called the approximate solution to the problem (1).

Lemma. The equality $\hat{x}(nh) = x_n$ is holds for all $n > 0$.

The lemma is easily proved by induction in segments $[0, nh]$. Using this lemma, we reduce the problem to deriving inequalities $|x_*(t) - \hat{x}(t)|$ of type (2).

In order to effectively evaluate these derivatives of the exact solution $x_*(t)$ and the approximate solution $\hat{x}(t)$, it is required that their trajectories must remain within a certain compact set. Therefore, we assume as following.

Assumption 2. Let us given convex compact set K in $\mathbb{R}^d$. The values of the functions $x_*(t)$ and $\hat{x}(t)$ defined on the interval $[0; T]$, remain in the convex compact set K .

Based on compact K , Assumption 1 and Assumption 2 we have

$$M_0 = \max_{x \in K} |f(x)|, \quad M_1 = \max_{x \in K} \|f'(x)\|,$$

$$M_2 = \max_{x \in K} \|f''(x)\|, \quad M_3 = \max_{x \in K} \|f'''(x)\|.$$

In the existing literature, the accuracy of an approximate solution is often evaluated by assuming that the error is bounded by $|R_4(nh, h)|$. However, this assumption is incorrect, because $R_4(nh, h)$ characterizes only the truncation error of the Taylor expansion $x_*(t)$ and does not describe the error $x_*(t) - \hat{x}(t)$.

III. The main result

First, we estimate the derivative of the approximate solution. According to inequality (3), for $t \neq nh$ ($n = 1, 2, \dots, N-1$)

$$\dot{\hat{x}}(t) = f[\tilde{x}(\sigma_t)] + (t - \sigma_t)(f' f)[\tilde{x}(\sigma_t)] + \frac{(t - \sigma_t)^2}{2} (f'' ff + f' f' f)[\tilde{x}(\sigma_t)], \quad (4)$$

that is, the approximate solution $\hat{x}(t)$ is a cubic spline.

Taking into account that $0 \leq t - \sigma_t \leq h$, it follows from equality (4) that

$$|\dot{\hat{x}}(t)| \leq M_0 \left(1 + hM_1 + \frac{h^2}{2} (M_2 M_0 + M_1^2) \right),$$

holds.

Theorem [1]. Suppose that assumptions (1) and (2) are satisfied. Then the inequality

$$|x_*(t) - \hat{x}(t)| \leq \frac{e^{M_1 T} - 1}{6M_1} (A_0 + A_1 h + A_2 h^2) h^3 \quad (5)$$

holds, where

$$A_0 = 5M_0^2 M_1 M_2 + M_0 M_1^3 + M_0^3 M_3,$$

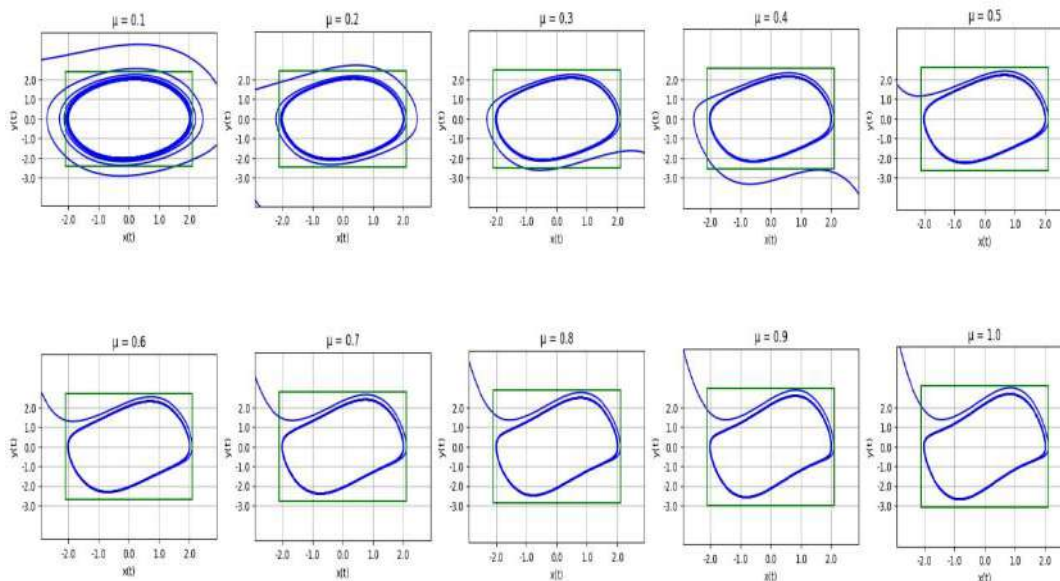
$$A_1 = \frac{1}{4} (M_0^3 M_2^2 + 4M_0^3 M_1 M_3 + 9M_0^2 M_1^2 M_2),$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (M_0^4 M_2 M_3 + M_0^3 M_1^2 M_3 + 2M_0^3 M_1 M_2^2 + 2M_0^2 M_1^3 M_2).$$

As an illustrative example of inequality (5), we consider the following Van der Pol oscillator:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x \end{cases} \quad (6)$$

where μ is a parameter. Taking $K = \left[(x, y) \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2.1, |y| \leq \text{MaxY} + 0.001 \right]$, we compute constants M_0, M_1, M_2, M_3 for system (6) and then determine the error bounds using inequality (5).



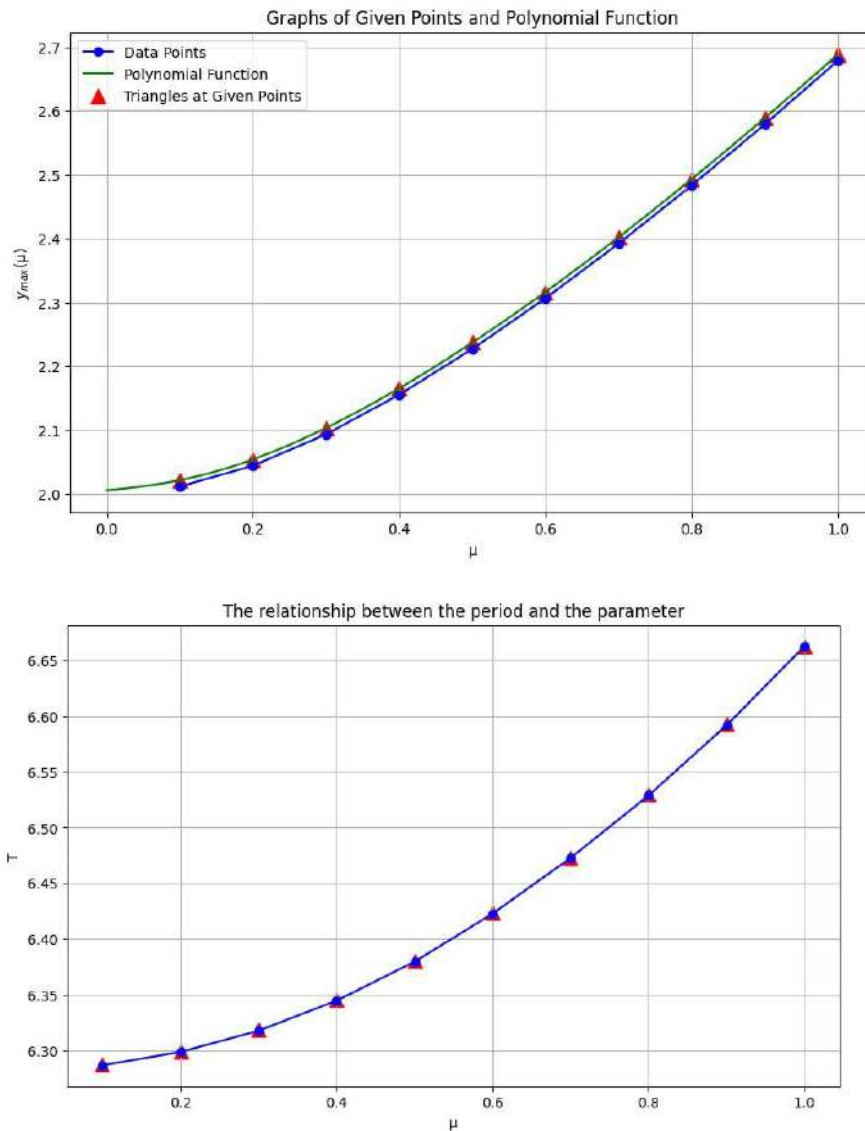
	μ	MaxX	MaxY	M_0 $-2.1 \leq x \leq 2.1$ $-\Delta - \text{MaxY} \leq y$ $\text{MaxY} + \Delta$	M_1	M_2	M_3	T_1	T_2	Xatolik
1	0.1	2.0001	2.0116	3.44491	2.12964	0.718523	0.34641	6.2867	6.2871	$7.05753 \cdot 10^{-39}$
2	0.2	2.0004	2.0442	4.05912	2.98222	1.44442	0.69282	6.2987	6.2988	$4.09018 \cdot 10^{-36}$
3	0.3	2.0009	2.0935	4.74375	3.92072	2.1836	1.03923	6.3177	6.3082	$3.30748 \cdot 10^{-33}$
4	0.4	2.0016	2.1554	5.49799	4.93663	2.94036	1.38564	6.3457	6.3457	$4.19409 \cdot 10^{-30}$
5	0.5	2.0025	2.2270	6.32302	6.03082	3.71809	1.73205	6.3807	6.3807	$8.98127 \cdot 10^{-27}$
6	0.6	2.0035	2.3063	7.22075	7.20637	4.5196	2.07846	6.4227	6.4231	$3.49511 \cdot 10^{-23}$
7	0.7	2.0047	2.3919	8.19331	8.46681	5.3474	2.42487	6.4727	6.4728	$2.67511 \cdot 10^{-19}$
8	0.8	2.0059	2.4830	9.24344	9.81633	6.20401	2.77128	6.5297	6.5296	$4.31302 \cdot 10^{-15}$
9	0.9	2.0072	2.5787	10.3729	11.2579	7.09149	3.11769	6.5927	6.5930	$1.55162 \cdot 10^{-10}$
10	1.0	2.0086	2.6784	11.5837	12.7947	8.01186	3.4641	6.6627	6.6627	0.0000135

Here period is calculated by the formula [10]

$$T = \frac{2\pi}{1 - \frac{\mu^2}{16} + \frac{17\mu^4}{3072} + \theta(\mu^6)}. \quad (7)$$

In the table, T_1 is the value computed by the computer, while T_2 is the value calculated using formula (7).

Below $(\mu, \max y(\mu))$ and (μ, T) tables are presented.



CONCLUSION

If a nonautonomous system is considered in a d -dimensional space, then we can interpret it as an autonomous system in the $(d + 1)$ – dimensional space. In particular, we can consider the following Cauchy problem:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(\xi, x), & x(0) = x_0 \\ \frac{d\xi}{dt} = 1, & \xi(0) = 0 \end{cases}.$$

Therefore, the difference between the exact and approximate solutions can be estimated by the same expression with the constant $\sqrt{M_0^2 + 1}$ instead of M_0

Funding

This research was carried out under Research Project No. FL-9524115148 of the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan

REFERENCES

1. Abdullaev, A.Kh., Azamov, A.A., Ruziboev, M.B. An Explicit Estimate for Approximate Solutions of ODEs Based on the Taylor Formula, Ural Mathematical Journal, 2024, Vol. 10(1), pp. 18-27.
2. Babenko K.I. Foundations of Numerical Analysis [Osnovy chislennogo analiza], Regul'yarnaya i haoticheskaya dinamika, Moscow/Izhevsk, 2002, 848 pp. (in Russian)
3. Berezin I.S., Zhidkov P.N. Computing Methods, Pergamon Press, 1965, Vol. 2, 464 pp.
4. Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons Ltd., UK, 2016, 544 pp.
5. Hairer E., Norsett S., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, Springer, Berlin/Heidelberg, 2008, XV+528 pp.
6. Hartman P. Ordinary Differential Equations, SIAM, 2002, XVIII+624 pp.
7. Kendall A.E. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, Inc., 1989, 693 pp.
8. Krilov V.I., Bobkov V.V., Monastirniy P.I. Computational Methods [Vychislitel'nye

Metody], Nauka, Moscow, 1977, Vol. II, 399 pp. (in Russian)

9. Milne W.E. The Remainder in Linear Methods of Approximation, Journal of Research of the National Bureau of Standards, 1949, Vol. 43, pp. 501-511.

10. Verhulst F. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, Berlin/Heidelberg, 1996

About the authors

Abdullaev Omadbek Kholmamat ugli

-Andijan state university, 170100 Andijan, Uzbekistan. Email:

abdullayevomadbek31@gmail.com.

Contacting phone number: +998975810506.

Odiljon Sokhibjonovich Akhmedov-

Andijan branch of Kokand University, 170100 Andijan, Uzbekistan. Email:

odiljon.axmedov@gmail.com. Contacting

phone number: +998935411826

Abdullaev Abdugani Kholmamat

ugli- athematics of Uzbekistan Academy of Sciences, 100174 Tashkent, Uzbekistan.

Email: abduganiax@mail.ru. Contacting

phone number: +998934426422

DIVIDING TEN PARTICIPANTS ON SOCIAL NETWORKS INTO A COMMUNITY USING MAXIMUM LIKELIHOOD

A. Abdulvokhidov, O. Samsaqov, R. Ma'rufjonov, M. Zokirjonov

Andijan state university, 170100 Andijan, Uzbekistan.

Issued on october 30, 2025; accepted for publication on December 7, 2025

Abstract: This article presents a deep dive into the use of maximum likelihood estimation in partitioning a social network of ten members into cohesive communities. The importance of this statistical method is discussed in the context of social networks. It illustrates how a network can be mapped and parameters predicted, with the method then applied to the partitioning process. The result is optimized groupings, a critical factor in efficiency, communication, and overall community health. The insights gained have direct broader relevance for managing, analyzing, and understanding larger social networks in today's interconnected society.

Key words: Social Networks, Maximum Likelihood Estimation, Partitioning, Group Dynamics, Network Analysis, Adjacency Matrix, Statistical Method, Community Formation, Communication Optimization, Interconnections, Parameter Estimation, Efficient Management, Cohesive Communities, Interrelations, Iterative Computation.

Аннотация: В этой статье представлено глубокое погружение в использование оценки максимального правдоподобия при разделении социальной сети из десяти участников на сплоченные сообщества. Важность этого статистического метода обсуждается в контексте социальных сетей. Он иллюстрирует, как можно отобразить сеть и спрогнозировать ее параметры, а затем применить этот метод к процессу деления. Результатом являются оптимизированные группировки, важнейший фактор эффективности, коммуникации и общего здоровья общества. Полученные знания имеют прямое более широкое значение для управления, анализа и понимания более крупных социальных сетей в современном взаимосвязанном обществе.

Ключевые слова: Социальные сети, оценка максимального правдоподобия, деление, групповая динамика, сетевой анализ, матрица смежности, статистический метод, формирование сообщества, оптимизация коммуникации, взаимосвязи, оценка параметров, эффективное управление, сплоченные сообщества, взаимосвязи, итеративные вычисления.

Annotatsiya: Ushbu maqola o'nta a'zodan iborat ijtimoiy tarmoqni yaxlit jamoalarga bo'lishda maksimal ehtimollikni baholashdan foydalanishga chuqur kirib boradi. Ushbu statistik usulning ahamiyati ijtimoiy tarmoqlar kontekstida muhokama qilinadi. U tarmoqni qanday qilib xaritalash va parametrlarni bashorat qilish mumkinligini ko'rsatadi, bu usul keyinchalik bo'linish jarayoniga qo'llaniladi. Natijada optimallashtirilgan guruhlar, samaradorlik, muloqot va umumiy jamiyat salomatligi uchun muhim omil hisoblanadi. Olingan tushunchalar bugungi o'zaro bog'langan jamiyatda kattaroq ijtimoiy tarmoqlarni boshqarish, tahlil qilish va tushunish uchun to'g'ridan-to'g'ri kengroq ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: Ijtimoiy tarmoqlar, Maksimal ehtimollikni baholash, Guruh dinamikasi, tarmoq tahlili, statistik usul, Jamiyatni shakllantirish, aloqani optimallashtirish, o'zaro bog'lanishlar, Parametr Baholash, Samarali boshqaruv, Birlashgan jamoalar, O'zaro aloqalar, Iterativ Hisoblash.

INTRODUCTION

Social networks, from casual friendship circles to online platforms like Facebook, have become an integral part of our lives. These networks typically involve various forms of relationships and interaction patterns which are usually represented by nodes (individuals or entities) and ties/edges (connections). Analyzing these networks can provide insightful commentary on group dynamics, information spread, and overall community health.

This article shines a spotlight on a powerful statistical methodology, the Maximum Likelihood Estimation (MLE), and how it can be applied to partition a social

network of ten participants into smaller, more manageable communities.

To elucidate, Maximum Likelihood Estimation is a fundamental concept in statistical estimation that calculates the most likely parameter of interest given the dataset at hand. In the context of social networks, the MLE aids in putting network members into distinct sub-communities in a way that makes the observed relationships more probable.

The concept of splitting a large community into smaller clusters or groups can be advantageous in various ways. For example, it makes managing the network more efficient, facilitates better communication pathways among individuals, and establishes stronger

internal relationships. But it's also a challenging process and needs a robust model.

To begin the partitioning process, firstly, the network of the ten individuals is mapped through an adjacency matrix, a table that indicates whether pairs of vertices are adjacent or not in the graph. This graph illustrates all the interrelationships in the network, providing a clear picture of who is linked with whom.

Once the network is graphically represented, the next step is to predict two essential

parameters: the likelihood of a link within a group and the probability of a link between separate groups.

The MLE method kickstarts by making an initial guess about a parameter (membership of an individual to a specific group). Then, through iterative computation, the method tweaks the parameter values to maximize the likelihood of observing the current network structure given these parameter values.

Upon running through this process, the MLE method assigns each of the ten participants to two communities in a way that maximizes the probability of the existing relationships; essentially, it groups together those who are most likely to interact.

This approach is significant because it allows social network scientists to decipher and visualize the inherent structure of social networks. Furthermore, it presents group administrators or team leaders with the power to build communities more intelligently, to optimize internal communication and collaboration.

We use the maximum likelihood method for clustering given in [1].

$$l_{\Pi} = \log L_{\Pi} = \sum_{k=1}^K m_k \log p_{in} + \sum_{k=1}^K \left(\frac{n_k(n_k-1)}{2} - m_k \right) \log(1 - p_{in}) + (m - \sum_{k=1}^K m_k) \log p_{out} + \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K n_k(n - n_k) - (m - \sum_{k=1}^K m_k) \right) \log(1 - p_{out})$$

In the article we consider the division of community S into two communities, then formula (1) looks like this:

$$l_{\Pi} = (m_1 + m_2) \log p_{in} + \left(\frac{(n_1^2 + n_2^2 - n)}{2} - (m_1 + m_2) \right) \log(1 - p_{in}) + (m - (m_1 + m_2)) \log p_{out} + (n_1 n_2 - m + (m_1 + m_2)) \log(1 - p_{out})$$

The appearance of p_{in} and p_{out} looks like this:

$$p_{in} = \frac{2(m_1 + m_2)}{n_1^2 + n_2^2 - n}, \quad p_{out} = \frac{m - (m_1 + m_2)}{n_1 n_2}$$

In the article we consider the division of community S into three communities, then formula

(1) looks like this:

$$l_{\Pi} = (m_1 + m_2 + m_3) \log p_{in} + \left(\frac{(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - n)}{2} - (m_1 + m_2 + m_3) \right) \log(1 - p_{in}) + (m - (m_1 + m_2 + m_3)) \log p_{out} + (n_1 n_2 n_3 - m + (m_1 + m_2 + m_3)) \log(1 - p_{out})$$

The appearance of p_{in} and p_{out} looks like this:

$$p_{in} = \frac{2(m_1 + m_2 + m_3)}{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - n}, \quad p_{out} = \frac{m - (m_1 + m_2 + m_3)}{n_1 n_2 n_3}$$

Let us be given a social network with ten participants. If we divide the social network into two groups, the following types of divisions are formed: (5,5), (4,6), (3,7) and (2,8) if we divide the social network into three communities, then the following types of divisions are formed: (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), and (3,3,4) we use the "maple" program to divide into teams

Numerical experiments

Given a social network with 10 vertices and 22 edges.

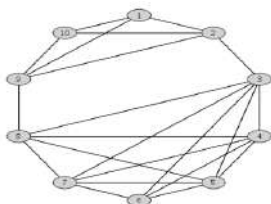
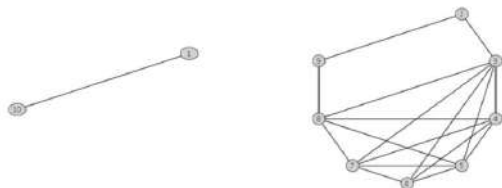
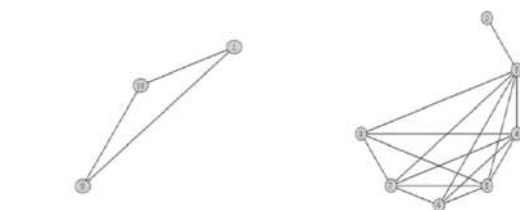


Fig 1. Social network with 10 vertices and 22 edges.

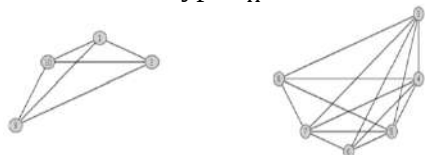
We can calculate the maximum likelihood using the "Maple" program. When the social network is divided into two communities, (2,8) accepts a partition of type l_{Π}



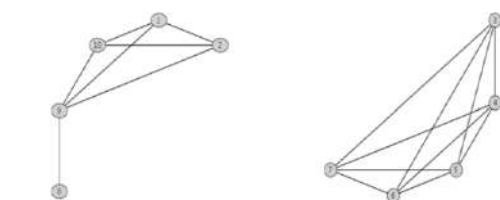
which has a value of -28.24540175. (3,7) accepts a partition of type l_{Π}



which has a value of -23.72121036. (4,6) takes a division of type l_{Π} ,



which has a value of -10.90438931. (5,5) takes a division of type l_{Π} ,



which has a value of -20.96424235. Divides the social network into three communities by type (2,2,6) in l_{Π} ,



which has a value of -18.35144279.

The maximum likelihood of this partition is greater than the maximum likelihood of the other three communities.

From the above calculations, it can be seen that the maximum probability of the division type l_{Π} of type (4;6) is higher than the rest of the divisions

In conclusion, the article elaborates on the importance and the implementation of Maximum Likelihood Estimation (MLE) for partitioning a social network of nine members into well-structured communities. It highlights how an adjacency matrix holds the key to outlining the network structure, while MLE plays a crucial role in refining and optimizing this structure into well-defined communities, based on the likelihood of interactions. This procedure is essential for enhancing the efficiency of managing the network and improving the communication pathways among individuals, thereby, fostering strong internal relationships. Despite this study focusing on a nine-member network, the MLE method's implications are much more profound and its benefits can be extrapolated to larger, more complex networks. In an increasingly interconnected society, this approach provides a robust, scalable solution for data-driven understanding and management of social connections. Thus, social network analysis using MLE and similar methodologies are not just academic exercises, but powerful tools in a wide array of fields - from sociology and psychology to business and politics.

REFERENCES

1. Мазалов В. В., Никитина Н. Н. Метод максимального правдоподобия для выделения сообществ в коммуникационных сетях // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 3. С. 200–214. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.3.02>.
2. Dilshodbek, Z., Bektosh, S. (2023). The maximum realization method of community grouping in social networks. central asian journal of mathematical theory and computer

- sciences, 4(5), 56-61.
<https://doi.org/10.17605/OSF.IO/5RQ2S>
3. Airolidi E.M., Blei D.M., Fienberg S.E., Xing E.P. Mixed membership stochastic blockmodels // J. Mach. Learn. Res. 2008. V. 9. P. 1981-2014. 25.
4. Parsons T., Gerald M.P. "Age, Social Structure, and Socialization in Higher Education." *Sociology of Education*, vol. 43, no. 1, 1970, pp. 1-37. JSTOR, <https://doi.org/10.2307/2112057>. Accessed 8 July 2023.
5. Girvan M., Newman M.E. J. Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 2002, vol. 99(12), pp. 7821-7826.
6. Copic J., Jackson M., Kirman A. Identifying community structures from network data via maximum likelihood methods. *The B. E. Journal of Theoretical Economics*, 2009, vol. 9, iss. 1, pp. 1935-1704.
7. Fortunato S. Community detection in graphs. *Physics Reports*, 2009, vol. 486, iss. 3, pp. 75-174.
<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2009.11.002>.
8. Newman M.E. J. *Networks: An Introduction*. Oxford University Press, 2010. ISBN: 978-0199206650.
9. Watts D.J., Strogatz S.H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 1998, vol. 393, pp. 440-442.
<https://doi.org/10.1038/30918>.
10. Barabási A.L., Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, vol. 286(5439), pp. 509-512.
<https://doi.org/10.1126/science.286.5439.509>.
11. Holland P.W., Laskey K.B., Leinhardt S. Stochastic blockmodels: First steps. *Social Networks*, 1983, vol. 5(2), pp. 109-137.
[https://doi.org/10.1016/0378-8733\(83\)90021-](https://doi.org/10.1016/0378-8733(83)90021-1)
12. Snijders T.A.B., Nowicki K., Xu G. Estimation for stochastic blockmodels. *Journal of the American Statistical Association*, 2006, vol. 101, pp. 85-95.
<https://doi.org/10.1198/016214505000000923>
13. Clauset A., Newman M.E.J., Moore C. Finding community structure in very large networks. *Physical Review E*, 2004, vol. 70(6), 066111.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.70.066111>.
14. Blondel V.D., Guillaume J.L., Lambiotte R., Lefebvre E. Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2008, P10008.
<https://doi.org/10.1088/1742-5468/2008/10/P10008>.
15. Zhang Z., Liu Y., Yang J., Zhou D., Tang J., Zhang H., Han J. Social network analysis with node and community detection. *Computer Science Review*, 2010, vol. 4, iss. 3, pp. 140-148.
<https://doi.org/10.1016/j.cosrev.2010.08.001>

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Х.Исмоилов, М.Эргашева

Андижанский государственный университет им. З.М. Бабура, дом 129, ул. Университетская г. Андижан, 170100 Узбекистан.

Получено 2 декабря 2025 г.; принято к публикации 12 декабря 2025 г.

Аннотация: В данной статье изучаются периодические функции f_k – отображающие симплекс в себя, для оператора вида $V: x'_k = x_k \cdot (1 + f_k)$, $k = \overline{1, m}$. Определены условия существования неподвижных точек данной системы. Также в программе *Delphi* приведены графики отображения неподвижных точек системы.

Ключевые слова: Вольтерра, периодические коэффициент, оператор, неподвижная точка, симплекс, функция, отображение, квадратичный оператор, стохастический оператор, генетический, популяция, вид.

Annotatsiya. Ушбу мақолада $V: x'_k = x_k \cdot (1 + f_k)$, $k = \overline{1, m}$, кўринишидаги ва симплексни ўзини ўзига акс эттирувчи f_k – даврий функциялар ўрганилган. Бу системанинг қуғалмас нуқталари мавжудлик шартлари аниқланган. Ҳамда, системанинг қуғалмас нуқталари картаси *Delphi* дастуридида графиклари келтирилган.

Kalit soʻzlar: Вольтерра, даврий коэффициент, оператор, қуғалмас нуқта, симплекс, функция, карта, квадратик оператор, стохастик оператор, генетик, популяция, тур.

Abstract: In this article, periodic functions f_k that map the simplex onto itself are studied for an operator of the form $V: x'_k = x_k \cdot (1 + f_k)$, $k = \overline{1, m}$. The conditions for the existence of fixed points of this system are determined. In addition, graphical representations of the fixed-point mapping of the system are presented using the Delphi program.

Key words: Volterra, periodic coefficient, operator, fixed point, simplex, function, mapping, quadratic operator, stochastic operator, genetic, population, species.

ВВЕДЕНИЕ.

Операторы вольтерровского типа определяются равенствами:

$V: x'_k = x_k \cdot (1 + f_k)$, $k = \overline{1, m}$, (1)
где $f_k(x) = f_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m)$ непрерывные функции удовлетворяющие условиям:

- $f_k(x) \geq -1$, для любого $x \in S^{m-1}$
- $\sum_{k=1}^m x_k \cdot f_k(x) = 0$, для всех $x \in S^{m-1}$

Легко заметить, что при выполнении этих условий $V: S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$.

Интересным с биологической точки зрения является случай, когда $f_k(x)$ -параметры, управляющие эволюцией, являются периодическими функциями.

В настоящей работе изучается вопрос о существовании и количестве неподвижных точек операторов вольтерровского типа с периодическими коэффициентами. В качестве $f_k(x)$ берутся периодические функции

$$\sum_{i=1}^m a_{ki} \cdot x_i \cdot \sin n\pi x_{[m+3-(k+i)]} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^m a_{ki} \cdot x_i \cdot \cos n\pi x_{[m+3-(k+i)]}$$

МАТЕРИАЛЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ.

В симплексе $S^1 = \{x+y=1, x \geq 0, y \geq 0\}$ рассмотрим семейства квадратичных стохастических операторов вида:

$$V_n: \begin{cases} x' = x(1 - a y \sin n\pi y) \\ y' = y(1 + a x \sin n\pi y) \end{cases}$$

где $a \in (0, 1], n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.

Для любых V_n квадратично-стохастических операторов число всех неподвижных точек равно $n+1$. Доказательство. Решим систему

$$\begin{cases} a y \sin n\pi y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Если $n\pi y = \pi k$, то $y = \frac{k}{n}$, и $x = \frac{p}{n}$, где $p+k=n$. Следовательно, $(\frac{n-k}{n}, \frac{k}{n}) \in S^1$ и при $k=0, n$, получаем $n+1$ неподвижную точку. Очевидно, других неподвижных в S^1 точек нет. В симплексе $S^2 = \{x+y+z=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ рассмотрим семейство квадратичных стохастических операторов вида:

$$V_n: \begin{cases} x' = x(1 - a \sin n\pi z + b \sin n\pi y) \\ y' = y(1 - a \sin n\pi z - c \sin n\pi x) \\ z' = z(1 - b \sin n\pi y + c \sin n\pi x) \end{cases} \quad (2),$$

где $a, b, c \in (0, 1]$.

Очевидно, $V_n(S^2) \subset S^2$, кроме того, все точки ∂S^2 , неподвижны относительно V_n . Кроме того, V_1, V_2 и V_3 квадратично-стохастические операторы имеют единственную внутреннюю отталкивающую неподвижную точку C_0 рис.1. Легко заметить, что V_4 имеет не менее четырех, а V_5 - не менее семи внутренних неподвижных точек.

Очевидно, $V_n(S^2) \subset S^2$, кроме того, все точки ∂S^2 , неподвижны относительно V_n . Кроме того, V_1, V_2 и V_3 квадратично-стохастические операторы имеют единственную внутреннюю отталкивающую неподвижную точку C_0 рис.1. Легко заметить, что V_4 имеет не менее четырех, а V_5 - не менее семи внутренних неподвижных точек рис.2.

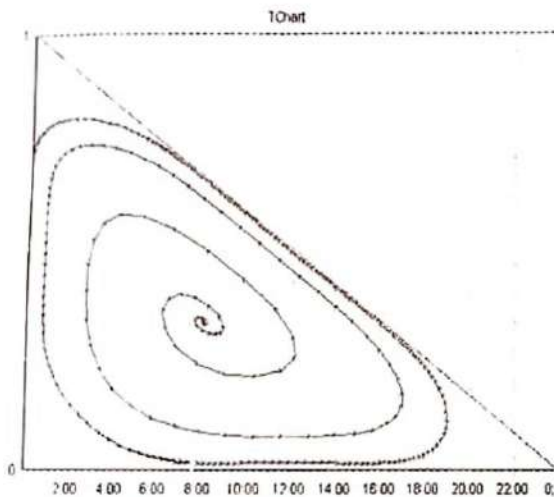


Рис. 1. $n=3$

Теорема 2.

Если $n=3m$ тогда:

- 1) Все точки ∂S^2 неподвижны;
- 2) $C_0(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ -внутренняя отталкивающая неподвижная точка;
- 3) Существует $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$ внутренних неподвижных точек ($n \geq 3$).

Доказательство.1) Очевидно, что все точки ∂S^2 неподвижны.

2) Легко заметить, что $C_0(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ - внутренняя отталкивающая неподвижная точка.

3) Решим систему

$$\begin{cases} -a \sin n\pi z + b \sin n\pi y = 0 \\ a \sin n\pi z - c \sin n\pi x = 0 \\ -b \sin n\pi y + c \sin n\pi x = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

полученную из (2).

Эта система имеет место при всех комбинациях точки $(x=\frac{p}{n}, y=\frac{q}{n}, z=\frac{d}{n})$, здесь $0 < \frac{p}{n}, \frac{q}{n}, \frac{d}{n} < 1$, и $p+q+d=n$.

Число решений уравнения $p+q+d=n$ в целых неотрицательных числах равно $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Пусть $n \neq 3m$ и $a=b=c$, тогда, $C_0(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ -внутренняя отталкивающая неподвижная точка.

Допустим, что центр симплекса является внутренней неподвижной точкой. Тогда верно следующее утверждение.

Утверждение. Если $n \neq 3m$ тогда:

- 1) все точки ∂S^2 неподвижны;
- 2) Существует $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ внутренних неподвижных точек ($n \geq 3$).

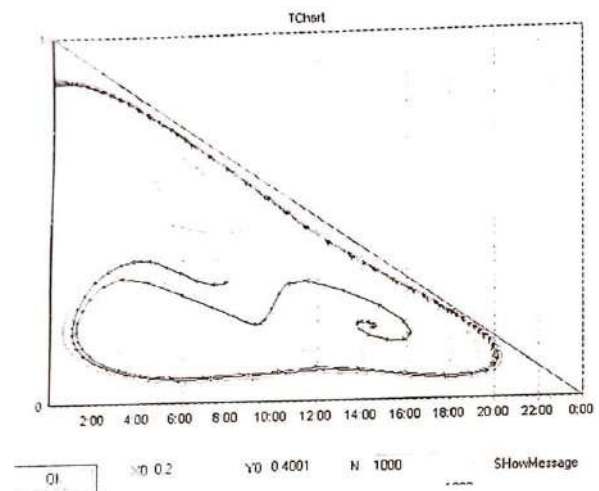


Рис. 2. $n=5$.

Рассмотрим семейство квадратичных стохастических операторов вида:

$$V_n: \begin{cases} x' = x(1 - a \cos n\pi y) \\ y' = y(1 + a \cos n\pi x) \end{cases}$$

в симплексе $S^1 = \{x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, где $a \in (0, 1]$.

Теорема 3. Для любых V_n квадратично-стохастических операторов число всех неподвижных точек равно $n + 2$.

Доказательство. Решим систему

$$\begin{cases} ay \cos n\pi y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Если $n\pi y = \frac{\pi}{2} + \pi k$, то $y = \frac{1+2nk}{2n} = \frac{p}{2n}$, $k \in \mathbb{N}$. $x + \frac{1+2nk}{2n} = 1$, то $x = \frac{2n-1-2nk}{2n} = \frac{q}{2n}$.

Здесь $p + q = 2n$. Число целочисленных решений уравнения $p + q = 2n$ в нечетных числах p и q равно $\left[\frac{2n-1}{2}\right] = n - 1$. Тогда число неподвижных точек равняется:

$$2n - 1 - \left[\frac{2n-1}{2}\right] = 2n - 1 - (n - 1) = n$$

и две вершины симплекса $(1; 0)$ и $(0; 1)$.

Итак, мы показали, что число всех неподвижных точек равно $n+2$.

В симплексе $S^2 = \{x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ рассмотрим семейство квадратичных стохастических операторов вида:

$$V_n: \begin{cases} x' = x(1 - ay \cos n\pi z + bz \cos n\pi y) \\ y' = y(1 + ax \cos n\pi z - cz \cos n\pi x) \\ z' = z(1 - bx \cos n\pi y - cy \cos n\pi x) \end{cases} \quad (3),$$

где $a, b, c \in (0, 1]$.

Очевидно, $V_n(S^2) \subset S^2$, кроме того, вершины $(1;0;0)$, $(0;1;0)$ и $(0;0;1)$ являются неподвижными точками.

Теорема 4. Пусть $a=b=c$ тогда:

1) $C_0(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ – внутренняя отталкивающая неподвижная точка;

2) Существует $3n$ неподвижных точек которые лежат на ребрах симплекса S^2 .

Доказательство. 1) Из рис.3 и рис.4. видно, что траектория $C_{0+\varepsilon}(\frac{1}{3} + \varepsilon, \frac{1}{3} - \varepsilon, \frac{1}{3})$ точек имеет спиральный вид. Это означает, что C_0 внутренняя отталкивающая неподвижная точка. 2) Решим систему

$$\begin{cases} -ay \cos n\pi z + bz \cos n\pi y = 0 \\ ax \cos n\pi z - cz \cos n\pi x = 0 \\ -bx \cos n\pi y + cy \cos n\pi x = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

полученную из (3).

Эта система имеет место при всех комбинациях точки $(x = \frac{p}{2n}, y = \frac{q}{2n}, z = 0)$,

$(x = \frac{p}{2n}, y = 0, z = \frac{q}{2n})$, $x = 0, y = \frac{q}{2n}, z = \frac{p}{2n}$, здесь $0 < \frac{p}{2n}, \frac{q}{2n} < 1$ и $p + q = 2n$.

Из $p + q = 2n$ видно, что по теореме 1 существует ровно n неподвижных точек принадлежащих ребру $z=0$ симплекса S^2 .

Отсюда находим, что число неподвижных точек находящихся на ребрах равно $3n$.

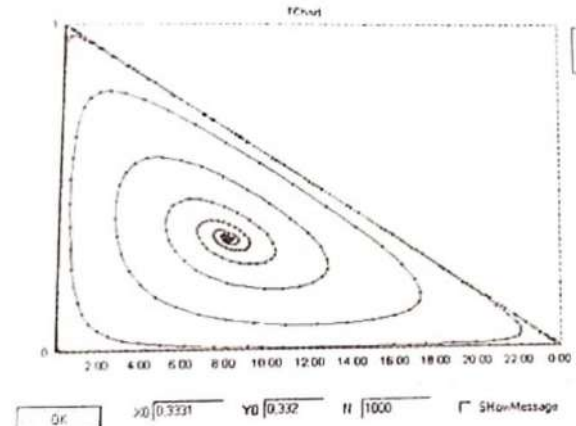


Рис. 3. $n=1$.

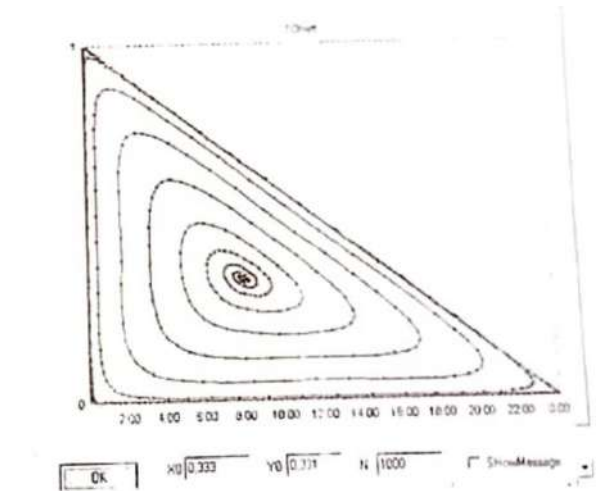


Рис. 4. $n=2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Операторы вида $V: x'_k = x_k \cdot (1 + f_k)$, $k = \overline{1, m}$, где f_k – периодические функции, отображающие симплекс в себя, представляют большой интерес в связи с их тесной близостью и хорошей применимостью к математическим моделям генетики, различных популяций и законов природы. Однако полное нахождение неподвижных точек таких систем представляет собой весьма сложную задачу.

В симплексе S2 для двух видов квадратично-стохастических операторов

$$V_n: \begin{cases} x' = x(1 - aysinn\pi z + bzsinn\pi y) \\ y' = y(1 - axsinn\pi z - czsinn\pi x) \\ z' = z(1 - bxsinn\pi y + cysinn\pi x) \end{cases} \text{ и}$$

$$V_n: \begin{cases} x' = x(1 - ay \cos n\pi z + bz \cos n\pi y) \\ y' = y(1 + ax \cos n\pi z - cz \cos n\pi x) \\ z' = z(1 - bx \cos n\pi y - cy \cos n\pi x) \end{cases}$$

в связи с трудностью нахождения неподвижных точек были определены условия их существования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганиходжаев Р. Н. Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпонова и турниры. Математические сборник, 1992 г., т.183, с.129-141.
2. Ганиходжаев Р. Н. Исследования по теории квадратичных стохастических операторов //Автореф. доктор. дис., Ташкент, 1994 г.
3. Курганов К. А. Асимптотическое поведение траектории дискретных динамических систем порождённых квадратичными стохастическими операторами вольтеровского типа // Автореф, канд. дис., Ташкент 1994 г.

В симплексе S1 для двух видов квадратично-стохастических операторов

$$V_n: \begin{cases} x' = x(1 - aysinn\pi y) \\ y' = y(1 + axsinn\pi y) \end{cases}$$

и

$$V_n: \begin{cases} x' = x(1 - ay \cos n\pi y) \\ y' = y(1 + ax \cos n\pi y) \end{cases}$$

все неподвижные точки полностью определены.

4.Г. Полия, Г. Сеге. "Теорема и задача в анализе" том I, II, Москва: Наука, 1978 г.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

1. **Хамрали Исмоилов** – PhD, Андижанский государственный университет, кафедра Прикладная математика и механика. Электронная почта: alieuz@yahoo.com. Тел.: +99890-216-72-60;
2. **Мохларой Эргашева** –магистр, Андижанский государственный университет, кафедра Прикладная математика. Электронная почта: ismoilovhamrali@mail.ru Tel.: +99895-487-77-84;

UCHBURCHAK GEOMETRIYASIDA MASSALAR METODI

D.T. Mamatbayeva¹, T.A. Ominaxon², M.A. Muhammadjonova²

¹Andijon davlat universiteti akademik litseyi, 170100 Andijon, Uzbekistan

²Andijon davlat universiteti, 170100 Andijon, Uzbekistan

2025-yil 20-noyabrda berilgan; 2025 yil. 10-dekabr chop etish uchun qabul qilingan

Annotatsiya. Mazkur maqolada ayrim geometriya masalalarini yechishda (hisoblash hamda isbot talab qiluvchi masalalarda) massalar metodining qo'llanilishini ko'rib chiqamiz. Massalarning taqsimlanish g'oyasi uchburchakning tomonlarida joylashgan kesmalar kesishish nuqtasi bilan bog'liq masalalarni samarali hal qilish imkonini beradi. Xuddi shu g'oyadan foydalanib Cheva va Menelay teoremlari ham isbotlanadi.

Kalit so'zlar: geometriya, uchburchak, massalar metodi, massalarning taqsimlanishi, Cheva teoremasi, Menelay teoremasi.

Annotation. In this article, we examine the application of the method of masses in solving certain geometry problems (including both computational and proof-based problems). The idea of distributing masses makes it possible to efficiently solve problems related to the point of intersection of segments located on the sides of a triangle. Using the same idea, Ceva's and Menelaus' theorems can also be proved.

Keywords: geometry, triangle, method of masses, distribution of masses, Ceva's theorem, Menelaus' theorem.

Аннотация. В данной статье рассматривается применение метода масс при решении некоторых задач по геометрии (как вычислительных, так и требующих доказательства). Идея распределения масс позволяет эффективно решать задачи, связанные с точкой пересечения отрезков, расположенных на сторонах треугольника. Используя ту же идею, можно также доказать теоремы.Чевы и Менелая.

Ключевые слова: геометрия, треугольник, метод масс, распределение масс, теорема Чевы, теорема Менелая.

$$m_1OA_1 + m_2OA_2 + \dots + m_nOA_n = 0 \quad (1)$$

KIRISH

Nisbatlarni hisoblashga oid masalalar, ya'ni berilgan nuqta kesmani qanday nisbatda bo'lishini topish masalalari ham olimpiadalarda, ham milliy imtixonga tayyorlov materiallarida ko'p uchraydi. Masalan, [1] kitobida bunday masalalarni ko'plab uchratish mumkin. [1] da qo'llanilgan asosiy usul – bu qo'shimcha chizmalar kiritish bo'lib, ular o'xshash uchburchaklar juftlarini hosil qiladi. Ma'lumki, qo'shimcha chizmalarni chamalab topish oddiy maktab o'quvchisi uchun oson vazifa emas. Shu bois bu metod o'quvchilar uchun juda qo'l keladi. Bundan tashqari shunday masalalarni yechishning massalar metodiga asoslangan algebraik usuli ham mavjud [2].

DASTLABKI MA'LUMOTLAR

Agar A nuqtaga m soni (massa) mos qo'yilgan bo'lsa, biz bu nuqtani mA moddiy nuqta deb ataymiz (bu yerda m soni manfiy bo'lishi ham mumkin). Moddiy nuqtalar tizimi $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$ ning massalar markazi shunday O nuqta bo'lib, u quyidagi vektor tenglikni qanoatlantiradi:

Masalan, ikki nuqta A_1 va A_2 uchun ularning massalari m_1 va m_2 bo'lsa, massalar markazi A_1A_2 kesmani $|m_2| : |m_1|$ nisbatda bo'ladi. Agar massalar bir xil ishorali bo'lsa, ichki nisbatda; agar massalar ishoralari qarama-qarshi bo'lsa, tashqi nisbatda (bu richag qoidasiga mos keladi). Nolga teng bo'lmagan yig'indi massaga ega har qanday moddiy nuqtalar tizimining massalar markazi mavjud va u mazkur nuqtalar orqali yagona aniqlanadi [2].

Massalarni guruhlash teoremasi

Agar moddiy nuqtalarning bir qismini ularning massalar markazida joylashgan bitta nuqta bilan almashtirsak va ushbu yangi nuqtaga ularning umumiy massasiga teng massa bersak, unda barcha nuqtalar tizimining massalar markazi o'zgarmaydi.

Kelgusida (1) o'rniga quyidagi yozuvlardan foydalanamiz:

$$O = c(m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n)$$

va

$$m_1A_1 + m_2A_2 + \dots + m_nA_n = (m_1 + m_2 + \dots + m_n)O$$

Hisoblashga doir tipik masalalar

Topshiriq 1. Uchburchakning BC va CA tomonlarida mos ravishda A_1 va B_1 nuqtalar olingan bo'lib, ular $AB_1 : B_1C = a_1 : a_2$ va $BA_1 : A_1C = b_1 : b_2$ ni qanoatlantiradi, O nuqta AA_1 va BB_1 kesmalarning kesishish nuqtasi. O nuqta AA_1 va BB_1 kesmalarni qanday nisbatda bo'lishini toping.

Yechish. Uchburchakning uchlariga shunday massalar joylashtiramizki, ularning og'irlik markazi O nuqtada joylashsin. Bunga qanday erishamiz? Agar quyidagi shart bajarilsa:

$$B_1 = c(m_1A, m_3C), \quad (2)$$

u holda m_1A va m_3C moddiy nuqtalarni ularning og'irlik markazi bilan almashtirib, biz boshlang'ich uchta o'rniga o'sha og'irlik markazi bilan ikkita m_2B va $(m_1 + m_2)B_1$ moddiy nuqtalarga ega bo'lamiz. Bunda ular BB_1 , to'g'ri chizig'ida yotishi kerak. Agar

$$A_1 = c(m_2B, m_3C)$$

bo'lsa, u holda $c(m_1A, m_2B, m_3C) \in AA_1$. $O = AA_1 \cap BB_1$ bo'lgani uchun $O = c(m_1A, m_2B, m_3C)$ ni olamiz. "richag qoidasi"ga ko'ra (2) va (3) shartlar quyidagicha yozilishi mumkin.

$$m_1a_1 = m_3a_2, m_2b_1 = m_3b_2. \quad (4)$$

Ma'lumki, barcha massalarni bir xil nolga teng bo'lmagan songa ko'paytirish massa markazining holatini o'zgartirmaydi. Shuning uchun biz har qanday nolga teng bo'lmagan sonni m_3 sifatida tanlashimiz mumkin, shundan so'ng qolgan ikkita massa (4) tenglikdan yagona aniqlanadi. $m_3 = a_1b_1$ ni o'rnatish qulay. Bunda $m_1 = a_2b_1$ va $m_2 = a_1b_2$ bo'ladi.

Istalgan massa taqsimoti topilgach, talab etilayotgan savollarga javob berish oson. Chunki

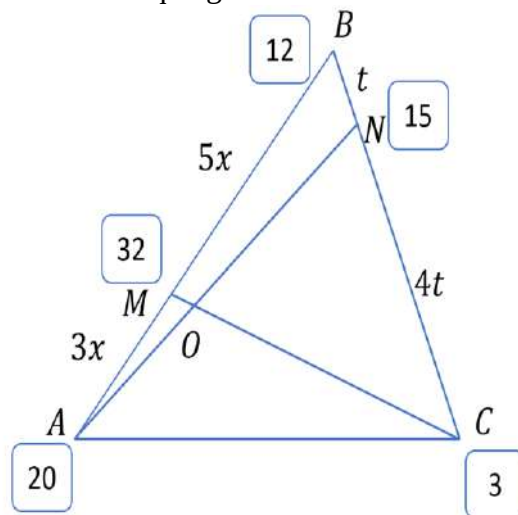
$$O = c(a_1b_2B, (a_2b_1 + a_1b_1)B_1),$$

"richag qoidasi"ga ko'ra, bizda $BO : OB_1 = b_1(a_1 + a_2) : a_1b_2$. Xuddi shunday, $AO : OA_1 = a_1(b_1 + b_2) : a_2b_1$ ekanligini topamiz.

Formulalarni yodlash shart emas — yechimning g'oyasini anglash va konkret sonlar

bilan amaliy takrorlash kifoya qiladi. Masala va misollarni hal qilishda siz shunchaki aniq raqamlar bilan ko'rsatilgan fikrni takrorlashingiz kerak.

Misol 1. $\triangle ABC$ ning AB va BC tomonlarida M va N nuqtalar shunday olinganki, bunda $AM : MB = 3 : 5$, $BN : NC = 1 : 4$. CM va AN to'g'ri chiziqlar O nuqtada kesishadi. $AO : ON$ va $CO : OM$ nisbatlarni aniqlang.



1-rasm.

Yechish. B nuqtaga ixtiyoriy $m_2 \neq 0$ massasini qo'ying. $N = c(m_2B, m_3C)$ va $M = c(m_1A, m_2B)$ shartlardan richag qoidasiga ko'ra $m_2 = 4ma_3$ va $3m_1 = 5m_2$ tengliklarga ega bo'lamiz. Bunda $m_2 = 12$ bo'ladi. Keyin $m_3 = 3$, $m_1 = 20$. Endi $O = c(20A, 15N)$, bu degani $AO : ON = 15 : 20 = 3 : 4$. Shu bilan birga, bizda $O = c(3C, 32M)$ mavjud. Shuning uchun $CO : OM = 32 : 3$ bo'ladi. 1- rasmda massalar ko'k to'rtburchaklar ichida yozilgan.

Topshiriq 2. ABC uchburchagida mos ravishda BC , CA va AB tomonlarida A_1 , B_1 va C_1 nuqtalar tanlanadi, ularni $CA_1 : A_1B = a_1 : a_2$, $AB_1 : B_1C = b_1 : b_2$ va $BC_1 : C_1A = c_1 : c_2$ nisbatlarga bo'linadi. AA_1 va B_1C_1 kesmalar O nuqtada kesishadi. O nuqta AA_1 va B_1C_1 kesmalarni qanday nisbatda bo'lishini toping.

Yechish. Uchburchak uchlariga shunday massalar joylashtiramizki, og'irlik markazi O nuqtada joylashsin. 1-misol yechimida bo'lgani kabi, B va C uchlaridagi massalar quyidagi shartdan tanlanadi :

$$A_1 = c(m_2B, m_3C) \quad (5)$$

Bu holat massa markazining AA_1 chizig'iga tushishini ta'minlaydi. Ammo massa markazi bir vaqtning o'zida B_1C_1 chizig'iga tegishli bo'lishi uchun biz massani A uchni ikkiga ajratamiz, ya'ni bu uchda ikkita moddiy nuqta $m'_1 A$ va $m''_1 A$ bor deb faraz qilamiz. Bunda guruhlash natijasida

$$\begin{aligned} B_1 &= c(m''_1 A, m_3 C) \\ C_1 &= c(m'_1 A, m_2 B) \end{aligned} \quad (6)$$

(5) va (6) dan richag qoidasiga binoan :

$$\begin{aligned} m_2 \cdot a_2 &= m_3 \cdot a_1, \quad m'_1 \cdot c_2 = m_2 \cdot c_1, \\ m''_1 \cdot b_1 &= m_3 \cdot b_2 \end{aligned}$$

Qulaylik uchun $m_2 = a_1 \cdot b_1 \cdot c_2$ deb olamiz. Keyin $m_3 = a_2 \cdot b_1 \cdot c_2$, $m'_1 = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1$, $m''_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 \cdot c_2$ lar kelib chiqadi.

$O = c((m'_1 + m''_1)A, m_2B + m_3C) = c((a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot b_2 \cdot c_2)A, (a_1 \cdot b_1 \cdot c_2 + a_2 \cdot b_1 \cdot c_2)A_1)$ bo'lgani uchun

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{(a_1 + a_2) \cdot b_1 \cdot c_2}{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot b_2 \cdot c_2}$$

ni hosil qilamiz.

Xuddi shu tarzda, massalarni guruhlashdan $O = c(m'_1 A + m_2 B, m''_1 A + m_3 C) = c((a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 + a_1 \cdot b_1 \cdot c_2), (a_2 \cdot b_2 \cdot c_2 \cdot A + a_2 \cdot b_1 \cdot c_2)B_1)$ quyidagi nisbatni topamiz

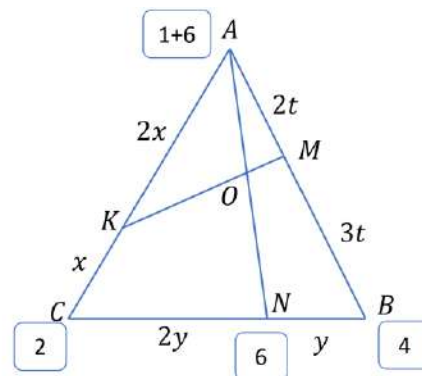
$$\frac{B_1 O}{OC_1} = \frac{(c_1 + c_2) \cdot a_1 \cdot b_1}{(b_1 + b_2) \cdot a_2 \cdot c_2}$$

Misol 2. ABC uchburchakning AB, BC va AC tomonlarida mos ravishda M, N va K nuqtalari olinadi, bundan $AM : MB = 2 : 3, AK : KC = 2 : 1, BN : NC = 1 : 2$. MK to'g'ri chiziq AN kesmani qanday bo'ladi?

Yechish. Yuqorida keltirilgan belgidan foydalanib, biz quyidagilarga egamiz

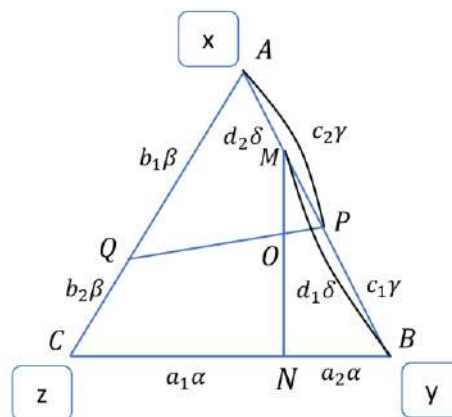
$$2m'_1 = 3m_2, \quad 2m''_1 = m_3, \quad m_2 = 2m_3.$$

$m_3 = 2$ bo'lsin. U holda $m_2 = 4, m'_1 = 6, m''_1 = 1$. Olingan massa taqsimoti 2-rasmda ko'rsatilgan. Bu esa massa markazi AN va KM ning kesishish nuqtasi O ga to'g'ri kelishini kafolatlaydi. Bizda $O = c(7A, 6N)$ mavjud. Shuning uchun, $AO : ON = 6 : 7$.



2-rasm.

Topshiriq 3. ABC uchburchakda uning tomonlarida M, N, P va Q nuqtalar shunday tanlanganki, $CN : NB = a_1 : a_2, BM : MA = d_1 : d_2, BP : PA = c_1 : c_2, AQ : QC = b_1 : b_2$ (3-rasm). MN va PQ chiziqlar $O \notin AB$ nuqtada kesishadi. $O = c(m_1 A, m_2 B, m_3 C)$ bajariladigan m_1, m_2 va m_3 ni toping.



3-rasm.

Yechish. Qidiralayotgan massa taqsimoti (xA, yB, zC) bo'lsin. Biz massani $P = c(x_1 A, yB)$ va $Q = c(x_2 A, zC)$ bo'ladigan qilib $x = x_1 + x_2$ kabi ajratamiz. Buning uchun $x_1 c_2 = y c_1$ va $x_2 b_1 = z b_2$ tengliklari bajarilishi kerak. Bunday holda, umumiy massa markazi PQ to'g'ri chiziqda yotadi. MN to'g'ri chiziqda yotishi uchun esa B uchga massa taqsimotini

$$y = y_1 + y_2, \quad c(y_1 B, xA) = M, \quad c(y_2 B, zC) = N, \quad y_1 d_1 = x d_2, \quad y_2 a_2 = z a_1$$

qilib olamiz.

Oldingi munosabatlarni hisobga olgan holda

$$x = x_1 + x_2 = \frac{c_1}{c_2}y + \frac{b_2}{b_1}z,$$

$$y = y_1 + y_2 = \frac{d_2}{d_1}x + \frac{a_1}{a_2}z.$$

$z = a_2b_1$ ni olishimizga hech narsa to'sqinlik qilmaydi. U holda ikkita chiziqli, ikki noma'lumli tenglamalar hosil bo'ladi:

$$x = \frac{c_1}{c_2}y + a_2b_2, y = \frac{d_2}{d_1}x + a_1b_1 \quad (7)$$

Masala shartidan shu ko'rinadiki, M va P ustma-ust tushmaydi. Shuning uchun ular BA tomonini turli nisbatlarda ajratadilar:

$$\frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}.$$

Bu holatda (7) yagona yechimga ega

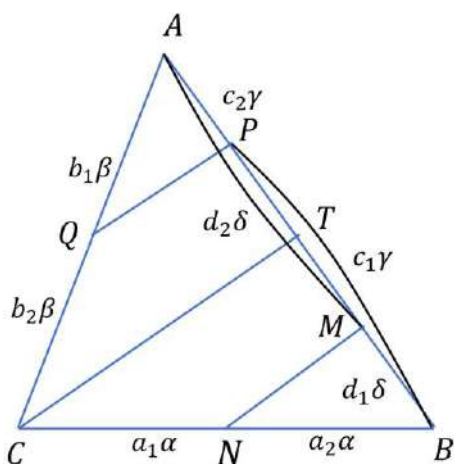
$$\begin{aligned} x + y + z &= \frac{a_1b_1c_1d_1 + a_2b_2c_2d_1}{c_2d_1 - c_1d_2} + \frac{a_1b_1c_2d_1 + a_2b_2c_2d_1}{c_2d_1 - c_1d_2} + a_2b_1 \\ &= \frac{a_1b_1d_1(c_1 + c_2) + a_2b_2c_2(d_1 + d_2) + a_2b_1(c_2d_1 - c_1d_2)}{c_2d_1 - c_1d_2} \end{aligned}$$

Demak,

$$x + y + z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1b_1d_1(c_1 + c_2) + a_2b_2d_2(d_1 + d_2) + a_2b_1(c_2d_1 - c_1d_2) = 0. \quad (8)$$

Endi MN va PQ chiziqlarning parallellik shartini $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1$ va d_2 tutashgan sonlarning nisbati sifatida topamiz. $T = l \cap AB$ bo'lsin, bu erda $l \parallel MN \parallel PQ$ va $C \in l$ (4-rasm).



4-rasm.

O'xshash uchburchaklar xossasiga ko'ra

$$x = \frac{a_1b_1c_1d_1 + a_2b_2c_2d_1}{c_2d_1 - c_1d_2},$$

$$y = \frac{a_1b_1c_2d_1 + a_2b_2c_2d_1}{c_2d_1 - c_1d_2}.$$

Qidirgan massa taqsimoti topildi. Uning yordami bilan O nuqta MN va PQ kesmalarda ajratgan nisbatlarni aniqlash mumkin.

Lekin bu yerda qiziqarli savol tug'iladi: agar MN va PQ chiziqlari parallel bo'lsa, nima bo'ladi? Darhaqiqat, (7) sistemadan biz ABC uchburchagining uchlarida massa taqsimotini topamiz, shunda massa markazi bir vaqtning o'zida bu chiziqlarga tegishli bo'ladi. Lekin ular kesishmaydi!

Bu yerdagi gap shundaki, biz faqat nolga teng bo'lmagan umumiy massalarga ega nuqta massalari tizimlarini ko'rib chiqmoqdamiz. Keling, bu "nol" qachon paydo bo'lishini bilib olaylik. Keling, hisoblaymiz.

$$AT = \frac{b_1 + b_2}{b_1} \cdot AP, \quad BT = \frac{a_1 + a_2}{a_1} \cdot BM$$

ni hosil qilamiz.

Boshqa tomondan, masala shartiga ko'ra

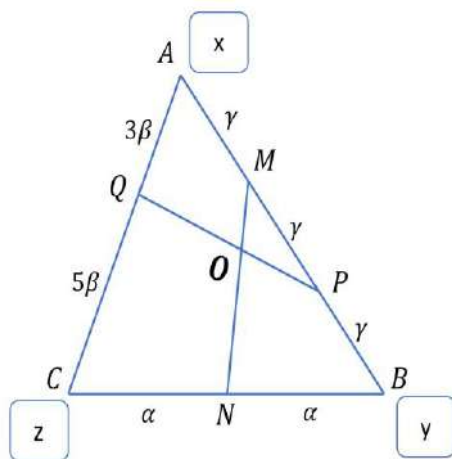
$$AP = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot AB, \quad BM = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot AB,$$

Topilgan munosabatlarni hisobga olgan holda $AT + BT = AB$ tengligi shaklni oladi

$$\frac{b_1 + b_2}{b_1} \cdot \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1} \cdot \frac{d_1}{d_1 + d_2} = 1 \quad (9)$$

bo'ladi. Oddiy o'zgartirishlar (8) va (9) tengliklarning ekvivalent ekanligini ko'rsatadi.

Misol 3. ABC uchburchagida N nuqta CB ning o'rta nuqtasi, Q AC tomonni $AQ : QC = 3 : 5$, M va P nuqtalar esa AB tomonni uchta teng qismga bo'ladi (5-rasm). NM va PQ O nuqtada kesishadi. $MO : ON$ nisbatini toping.



5-rasm.

Yechish. Birinchidan, O nuqtada markazlashtirilgan massa taqsimotini (xA, yB, zC) topamiz.

Massani $A(x = x_1 + x_2)$ uchda qilib $Q = c(x_1A, zC)$ va $P = c(x_2A, yB)$ bo'ladigan qilib ajratamiz. Berilganlarga ko'ra

$$x_1 = \frac{5}{3}z \text{ va } x_2 = \frac{1}{2}y$$

ni topamiz.

Endi biz massani B uchda ajratamiz ($y = y_1 + y_2$). Shunday qilib, $M = c(y_1B, xA)$ va $N = c(y_2B, zC)$. Demak, $y_1 = \frac{1}{2}x$ va $y_2 = z$.

Bizda tenglamalar sistemasi mavjud

$$x = \frac{5}{3}z + \frac{1}{2}y, y = \frac{1}{2}x + z.$$

$z = 3$ bo'lsin. U holda $x = \frac{26}{3}, y = \frac{22}{3}$ bo'ladi. $y_1B + xA$ va $y_2B + zC$ va $y_1 = \frac{x}{2} = \frac{13}{3}, y_2 = z = 3$ dan biz $\frac{13}{3}B + \frac{26}{3}A = 13M, 3B + 3C = 6N$ ni hosil qilamiz.

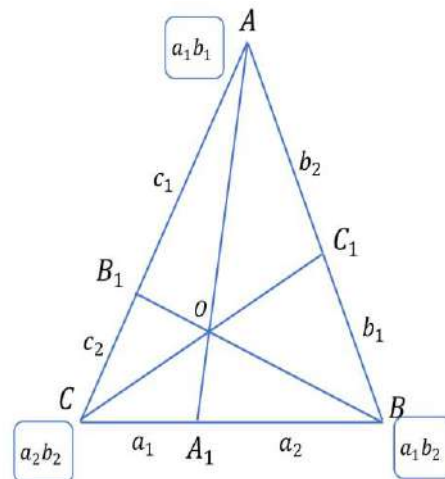
Shunday qilib, $O = c(13M, 6N)$. Shuning uchun, $MO : ON = 6 : 13$.

Isbotlash uchun muammolar

Misol 4. Cheva teoremasini isbotlang. ABC uchburchakning tomonlarida $A_1 \in BC, B_1 \in CA$ va $C_1 \in BA$ nuqtalari tanlangan. AA_1, BB_1 va CC_1 kesmalari bir nuqtada kesishadi va ular uchun

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1 \quad (10)$$

bajariladi.



6-rasm.

Isbot. $O = CC_1 \cap AA_1$ bo'lsin. Massalarni ABC uchburchakning uchlariga shunday joylashtiramizki, ularning massa markazi O nuqtada bo'lsin. $a_1 = AB_1, a_2 = B_1C, b_1 = BC_1, b_2 = C_1A, c_1 = AB_1, c_2 = B_1C$. Quyidagi massa taqsimotlarining mos kelishini tekshirish oson ($a_1b_1A, a_1b_2B, a_2b_2C$) (6-rasm).

Agar (10) bajarilsa, u holda $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$ va $c(a_1b_1A, a_2b_2C) = B_1$ bo'ladi. Ammo O massa markazi BB_1 to'g'ri chiziqda yotishi kerak; boshqacha aytganda, AA_1, BB_1 va CC_1 chiziqlar bir nuqtada kesishadi.

Aksincha, agar BB_1 to'g'ri chiziq O nuqtasi orqali o'tsa, u holda $B_1 = c(a_1b_1A, a_2b_2C)$, bu yana $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$ tengligini beradi, bu esa (10) ga teng kuchli.

Misol 5. Menelay teoremasini isbotlang. ABC uchburchagi berilgan. A_1, B_1 va C_1 nuqtalar uning CB, AC va BA tomonlarini mos ravishda α, β va γ nisbatlarda ajratadi, ya'ni vector tengliklari amal qiladi: $\overrightarrow{CA_1} = \alpha \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1B} = \beta \overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{B_1C} = \gamma \overrightarrow{A_1B}, A_1, B_1$ va C_1 nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotadi, agar $\alpha\beta\gamma = -1$ bo'lsa.

Isbot. Agar z massani z_1 va z_2 massalar taqsimotiga qo'ysak, $B_1 = (z_1C, xA)$ va $A_1 = c(z_2C, yB), c(xA, yB, zC) \in A_1B_1 \in A_1B_1$ bo'ladi.

$D = c(xA, yB, zC) \in A_1B_1$ bo'lsin. U holda m' va m^n massalar mavjudki, $D = c(m'A_1, m^nB_1)$ va $m' + m^n = x + y + z$. Endi z_1 va z_2 massalarni x va y oraqali aniqlaymiz, bundan $c(z_1C, xA) = B_1$ va

$c(z_2C, yB) = A_1$. Bundan tashqari, $z_1 + x = m^n$, $z_2 + y = m'$ bo'lib, undan yuqoridagilarni hisobga olib, $z = z_1 + z_2$ degan xulosaga kelamiz.

Shunday qilib, moddiy nuqtalar markazi (xA, yB, zC) A_1B_1 chiziqqa tegishli bo'ladi, faqat va faqat $z = z_1 + z_2$ uchun, $c(z_1C, xA) = B_1$ va $c(z_2C, yB) = A_1$ yoki

$$z_1B_1C = xB_1A = 0, z_2A_1C + yA_1B = 0 \quad (11)$$

bajarilsa.

$\overrightarrow{A_1B} = \beta \overrightarrow{B_1C}$ va $\overrightarrow{CA_1} = \alpha \overrightarrow{A_1B}$ ni yodga olsak, (11) shartlarni quyidagicha yozish mumkin $z_1 = \alpha x$ va $z_2 = \frac{y}{\beta}$

Ushbu hisob-kitoblarning natijasi:

$$c(xA, yB, zC) \in A_1B_1 \Leftrightarrow z = \alpha x + \frac{y}{\beta} \quad (12)$$

Xuddi shunday, biz ushbu tasdiqni olamiz:

$$c(xA, yB, zC) \in B_1C_1 \Leftrightarrow x = \gamma y + \frac{z}{\alpha} \quad (13)$$

A_1, B_1 va C_1 nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotadi, agar A_1B_1 va B_1C_1 chiziqlar bir-biriga to'g'ri kelsa, ya'ni (12)-(13) ga ko'ra, quyidagi tengliklar bir vaqtda bajarilgan taqdirdagina, kollinear chiziqda yotadi:

$$z = \alpha x + \frac{y}{\beta}, x = \gamma y + \frac{z}{\alpha}.$$

Demak, $z = \alpha \left(\gamma y + \frac{z}{\alpha} \right) + \frac{y}{\beta} = \alpha \gamma y + z + \frac{y}{\beta}$, bu $\alpha \gamma + \frac{1}{\beta} = 0$ yoki $\alpha \beta \gamma = -1$ ni bildiradi, bu isbotlanishi kerak bo'lgan ifoda edi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Israilov I., Pashayev Z., Geometriyadan masalalar to'plami, Toshkent "O'qituvchi", 2003.
2. Balk M.B., Boltyanskiy V.G., Geometrik massa (Геометрия масс), Наука, 1987.
3. Sharigin I.F., Geometriya: 9-11-sinf (Геометрия: 9–11 кл.) – М.: Дрофа, 1996.

MUALLIFLAR HAQIDA MA'LUMOT

Dilraxon Tadjimuxammedovna Mamatbayeva – Andijon davlat universiteti akademik litseyi aniq fanlar kafedrasida matematika fani bosh o'qituvchisi. Email:

dilraxonmamatbayeva7611@gmail.com.

Tel: +998916116764.

Ominaxon Abduvaxob qizi Tojimuxammadova – Andijon davlat universiteti fizika-matematika va IT fakulteti matematika yo'nalishi 1-bosqich 2-guruh talabasi. Email: ominatojimuxammadova@gmail.com. Tel: +998774127939.

Muslimabonu Akramjon qizi Muhammadjonova – Andijon davlat universiteti fizika-matematika va IT fakulteti matematika yo'nalishi 4-bosqich 1-guruh talabasi. Email: muslimamuhammadjonova8914@gmail.com

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И С ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Олимова Дилфуза Собиржоновна^{1,2}

¹Ферганский государственный университет,

²Ферганский военно-академический лицей Министерства обороны "школа Темурбеков",
dilfuza.olimova.76@bk.ru

Получено 1 декабря 2025 г.; принято к публикации 15 декабря 2025 г

Аннотация. В данной работе в параллелепипеде для уравнения с двумя сингулярными коэффициентами и с двумя внутренними перпендикулярными плоскостями изменения типа исследована задача Дирихле. Найдены собственные значения и собственные функции соответствующей спектральной задачи и на их основе доказана теорема единственности.

Ключевые слова: уравнения смешанного типа, сингулярный коэффициент, оператор Бесселя, функция Бесселя, плоскость изменения типа.

Annotatsiya. Mazkur ishda parallelepiped sohada ikki singulyar koeffitsiyentga ega va ikkita o'zaro perpendikulyar tip o'zgarish tekisliklari mavjud bo'lgan tenglama uchun Dirixle masalasi tadqiq etilgan. Mos spektral masalaning xos qiymatlari va xos funksiyalari aniqlangan va ular asosida yagonalik teoremasi isbotlangan.

Kalit so'zlar: aralash tipdagi tenglamalar, singulyar koeffitsiyent, Bessel operatori, Bessel funksiyasi, tip o'zgarish tekisligi.

Abstract. In this paper, the Dirichlet problem is studied in a parallelepiped for an equation with two singular coefficients and two internal mutually perpendicular planes of type change. The eigenvalues and eigenfunctions of the corresponding spectral problem are found, and on this basis a uniqueness theorem is proved.

Keywords: mixed-type equations, singular coefficient, Bessel operator, Bessel function, plane of type change.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn}(xy) \cdot u_{xx} + B_{\beta-1/2}^y u + B_{\gamma-1/2}^z u = 0, \quad (1)$$

в области $\Omega = \{(x, y, z): x \in (-1, 0) \cup (0, 1), y \in (-a, 0) \cup (0, b), z \in (0, c)\}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}^+, \beta \in (0, 1/2), \gamma \in (-\infty, 1/2)$. Здесь для удобства и компактности используется обозначение $B_q^y \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2q+1}{y} \frac{\partial}{\partial y}$. Отметим, что обозначение B_q^y при $q > -1/2$ совпадает с оператором Бесселя, введенным в работе [1].

Введем следующие обозначения: $\Omega_1 = \Omega \cap \{x > 0, y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{x > 0, y < 0\}$, $\Omega_3 = \Omega \cap \{x < 0, y < 0\}$, $\Omega_4 = \Omega \cap \{x < 0, y > 0\}$.

Уравнение (1) в области Ω принадлежит смешанному типу, а именно в областях Ω_1 и Ω_3 принадлежит эллиптическому типу, а в областях Ω_2 и Ω_4 – гиперболическому типу. Плоскости $y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостями сингулярности коэффициентов уравнения, а $x = 0$ и $y = 0$ – плоскостями изменения типа.

В области Ω для уравнения (1) сформулируем и исследуем следующую задачу.

Задача D. Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую в области $\bigcup_{j=1}^4 \Omega_j$ уравнению (1) и условиям

$$u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4), u_x, z^{2\gamma} u_z \in C(\bar{\Omega}), \quad (2)$$

$$u(-1, y, z) = 0, u(1, y, z) = 0, y \in [-a, b], z \in [0, c], \quad (3)$$

$$u(x, -a, z) = f_1(x, z), u(x, b, z) = f_2(x, z), x \in [-1, 1], z \in [0, c], \quad (4)$$

$$u(x, y, 0) = 0, u(x, y, c) = 0, x \in [-1, 1], y \in [-a, b], \quad (5)$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x, y, z), x \in (-1, 0) \cup (0, 1), z \in (0, c), \quad (6)$$

где $f_1(x, z)$ и $f_2(x, z)$ – заданные функции, причем выполняется условия согласования

$$f_j(x, 0) = f_j(x, c) = f_j(-1, z) = f_j(1, z) = 0, j = \overline{1, 2}.$$

Задача Дирихле для уравнения смешанного типа является не всегда корректно поставленной в смысле Адамара. Во многих работах отмечается, что интерес к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа возник после работы Ф.И. Франкля [2], где впервые обращено внимание на то, что задачи трансзвуковой газовой динамики сводятся к уравнениям этого типа, и после работы А.В. Бицадзе [3], где показано, что задача Дирихле для уравнения $u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = 0$ поставлена некорректно. После этих работ возникла проблема поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле является корректно поставленной. Если уравнение смешанного типа содержит гиперболическое уравнение, и гиперболическая часть области является прямоугольником, то для разрешимости задачи возникает условие, зависящее от размеров сторон прямоугольника. Если при этом задача разрешима, то она разрешима не для любого прямоугольника. В дальнейшем задача Дирихле для уравнений смешанного типа изучалась многими авторами [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15].

Подобные задачи на плоскости для уравнения $\operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0$ изучена в работах [16], [17].

Во всех работах, перечисленных выше и посвященных данной проблеме, преимущественно затрагивают двумерные задачи. В работах [18], исследованы краевые задачи для уравнения

$$\left[B_{\alpha-1/2}^x + \operatorname{sgn} y \cdot B_{\beta-1/2}^y + B_{\gamma-1/2}^z \right] u(x, y, z) = 0,$$

в области $\Omega \cap \{x > 0\}$.

2. ПОСТРОЕНИЕ НЕТРЕВИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ D

Находим нетривиальные в области $\Omega_j, j = \overline{1, 4}$ решения уравнения (1), удовлетворяющие краевым условиям (3), (5) и (6). С этой целью, разделяя переменные по формуле $u(x, y, z) = X(x)W(y)$, получим уравнений

$$\operatorname{sgn} x \cdot X''(x) + dX(x) = 0, x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad (7)$$

$$\operatorname{sgn} y \cdot \left[B_{\beta-1/2}^y + B_{\gamma-1/2}^z \right] W - dW = 0, y \in (-a, 0) \cup (0, b), z \in (0, c), \quad (8)$$

где $d = \mu^2$ – константа разделения.

Путем разделения переменных $W(x, z) = X(x)Z(z)$, из (8) получим

$$B_{\gamma-1/2}^z Z(z) + \lambda Z(z) = 0, z \in (0, c), \quad (9)$$

$$B_{\beta-1/2}^y Q(y) - (\lambda \operatorname{sgn} y + d)Q(y) = 0, y \in (-a, 0) \cup (0, b). \quad (10)$$

где λ – константа разделения, причем в силу условий (2), (3), (5) и (6), должна быть выполнены условия

$$X(0-0) = X(0+0), X'(0-0) = X'(0+0), \quad (11)$$

$$X(-1) = X(1) = 0, \quad (12)$$

$$Q(0+0) = Q(0-0), \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} Q'(y) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} Q'(y), \quad (13)$$

$$Z(0) = 0, Z(c) = 0. \quad (14)$$

Сначала найдем решение задачи $\{(9), (14)\}$. Предположим, что $\lambda < 0$. Тогда, произведя замену $Z(z) = (t/\sqrt{-\lambda})^{1/2-\gamma} p(t)$ в уравнении (9), где $t = \sqrt{-\lambda}z$, получим уравнение Бесселя вида

$$t^2 p''(t) + tp'(t) - [t^2 + (1/2 - \gamma)^2] p(t) = 0.$$

Принимая во внимание вид общего решения этого уравнения [20] и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (9) в виде

$$Z(z) = c_1 z^{1/2-\gamma} I_{1/2-\gamma}(\sqrt{-\lambda}z) + c_2 z^{1/2-\gamma} K_{1/2-\gamma}(\sqrt{-\lambda}z), \quad (15)$$

здесь c_1 и c_2 -произвольные постоянные, $I_l(z)$ и $K_l(z)$ - функция Бесселя мнимого аргумента (функция Инфельда) и функция Макдональда порядка l [20] соответственно.

Подставляя (15) в краевые условия (14), имеем $c_1 = c_2 = 0$, следовательно, в этом случае задача $\{(9),(10)\}$, не имеет нетривиальных решений.

Пусть $\lambda = 0$. Тогда, в силу $\gamma < 1/2$, общее решение уравнения (9) имеет вид $Z(z) = c_3 z^{1-2\gamma} + c_4$, где c_3 и c_4 -произвольные постоянные. Подставляя эту функцию в краевые условия (10), имеем $c_3 = c_4 = 0$. Следовательно, в этом случае также задача $\{(9), (10)\}$ не имеет нетривиальных решений.

Пусть $\lambda > 0$. Тогда, произведя замену в уравнении (9) по формуле $Z(z) = (t/\sqrt{\lambda})^{1/2-\gamma} p(t)$, где $t = \sqrt{\lambda}z$, получим уравнение Бесселя [20]:

$$t^2 p''(t) + t p'(t) + [t^2 - (1/2 - \gamma)^2] p(t) = 0. \quad (16)$$

Принимая во внимание вид общего решения [20] уравнения (16) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (9) в виде

$$Z(z) = c_5 z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda}z) + c_6 z^{1/2-\gamma} Y_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda}z), \quad (17)$$

где c_5, c_6 -произвольные постоянные, $J_l(z)$ и $Y_l(z)$ - функция Бесселя порядка l первого и второго рода [20] соответственно.

Из (17) в силу $\gamma < 1/2$ следует, что решение уравнения (9), удовлетворяющее первому условию (14), существует и оно определяется равенством

$$Z(z) = c_5 z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda}z) \quad (18)$$

Подставляя (18) к второму условию (14) и считая $c_5 \neq 0$, получим

$$J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda}c) = 0. \quad (19)$$

Известно, что при $l > -1$ функция Бесселя $J_l(z)$ имеет счетное число нулей, причем все они вещественны и с попарно противоположными знаками [20]. Согласно этому факту, в силу $1/2 - \gamma > 0$, уравнение (19) имеет счетное число вещественных корней. Обозначая через σ_m m -ый положительный корень уравнения (19), получим значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи $\{(9),(14)\}$, т.е. собственные значения задачи $\{(9),(14)\}$: $\lambda = \lambda_m = (\sigma_m/c)^2, m \in N$.

Полагая в (18) $\lambda = \lambda_m, m \in N$, получим (с точностью до постоянного множителя) нетривиальные решения (собственные функции) задачи $\{(9),(14)\}$:

$$Z_m(z) = z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c), m \in N. \quad (20)$$

Согласно работе [20], система собственных функций (20) ортогональна и полна в пространстве $L_2(0, c)$ с весом $z^{2\gamma}$.

Теперь перейдем к исследованию задачи $\{(7), (11), (12)\}$. Спектральная задача $\{(7),(11),(12)\}$ не является классическими из-за незнакоопределенности коэффициента при старшей производной.

Решениями уравнения (7), удовлетворяющими условиям (11), являются функции

$$X(x) = \begin{cases} c_7 \cos \mu x + c_8 \sin \mu x, x > 0, \\ c_7 \cosh \mu x + c_8 \sinh \mu x, x < 0, \end{cases}$$

где c_7, c_8 - произвольные постоянные, и с учетом условия (12) для μ получим уравнение

$$tg \mu = -th \mu. \quad (21)$$

В работе [16] доказана следующая лемма.

Лемма 1. Уравнение $tg(az) = -th(bz), a, b \in R, a, b > 0$, имеет счетное множество корней, состоящее из нуля, простых попарно противоположных действительных и попарно противоположных чисто мнимых корней, для которых справедливы следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned} z_n^{(1),(2)} &= \pm \left(-\frac{\pi}{4a} + \frac{\pi}{a} n + O(e^{-2\pi n b/a}) \right), \\ z_n^{(3),(4)} &= \pm i \left(-\frac{\pi}{4b} + \frac{\pi}{b} n + O(e^{-2\pi n a/b}) \right), n \in N. \end{aligned}$$

Уравнение (21) в силу леммы 1 имеет счетное множество действительных корней $\pm\mu_n$ и чисто мнимых корней $\pm i\mu_n$, причем для положительных μ_n справедливо асимптотическое представление

$$\mu_n = -\frac{\pi}{4} + \pi n + O(e^{-2\pi n}). \quad (22)$$

Тогда d может принимать значения $d_n^{(1)} = \mu_n^2 > 0$ и $d_n^{(2)} = -\mu_n^2 < 0$, и решениями задачи $\{(7), (11), (12)\}$ будут соответственно функции

$$X_n^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{\sin[\mu_n(x-1)]}{\cos \mu_n}, & x > 0, \\ \frac{\operatorname{sh}[\mu_n(x+1)]}{\operatorname{ch} \mu_n}, & x < 0, \end{cases} \quad X_n^{(2)}(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}[\mu_n(x-1)]}{\operatorname{ch} \mu_n}, & x > 0, \\ \frac{\sin[\mu_n(x+1)]}{\cos \mu_n}, & x < 0. \end{cases}$$

Отметим, что система $\{X_n^{(1)}(x), X_n^{(2)}(x)\}$ не является ортогональной в $L_2(-1,1)$. Поэтому рассмотрим задачу, сопряженную к задаче $\{(7), (11), (12)\}$, т.е. рассмотрим задачу

$$\operatorname{sgn} x \cdot \tilde{X}''(x) + d\tilde{X}(x) = 0, x \in (-1,0) \cup (0,1), \quad (23)$$

$$\tilde{X}(0-0) = -\tilde{X}(0+0), \tilde{X}'(0-0) = -\tilde{X}'(0+0), \tilde{X}(-1) = \tilde{X}(1) = 0. \quad (24)$$

Решениями задачи $\{(23), (24)\}$ являются функции

$$\tilde{X}_n^{(1)}(x) = \begin{cases} -\frac{\sin[\mu_n(x-1)]}{\cos \mu_n}, & x > 0, \\ \frac{\operatorname{sh}[\mu_n(x+1)]}{\operatorname{ch} \mu_n}, & x < 0, \end{cases} \quad \tilde{X}_n^{(2)}(x) = \begin{cases} -\frac{\operatorname{sh}[\mu_n(x-1)]}{\operatorname{ch} \mu_n}, & x > 0, \\ \frac{\sin[\mu_n(x+1)]}{\cos \mu_n}, & x < 0. \end{cases} \quad (25)$$

Система $\{\tilde{X}_n^{(1)}(x), \tilde{X}_n^{(2)}(x)\}$ является биортогонально сопряженной с системой $\{X_n^{(1)}(x), X_n^{(2)}(x)\}$, т.е. имеет место равенство

$$\int_{-1}^1 X_n^{(j)}(x) \tilde{X}_m^{(l)}(x) dx = 0, n \neq m, j = 1,2; l = 1,2.$$

Справедливо следующее утверждение [16].

Лемма 2. Система $\{\tilde{X}_n^{(1)}(x), \tilde{X}_n^{(2)}(x)\}$ полна в пространстве $L_2(-1,1)$.

Теперь рассмотрим уравнения (10). Полагая в уравнении (10) $\lambda = \lambda_m = (\sigma_m/c)^2$, $d_n^{(1)} = \mu_n^2$ и $d_n^{(2)} = -\mu_n^2$, найдем его общее решение:

$$Q_{nm}^{(1)}(y) = \begin{cases} A_{nm}^{(1)} y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} y) + \\ + B_{nm}^{(1)} y^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} y), & y > 0, \\ C_{nm}^{(1)} (-y)^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} (-y)) + \\ + D_{nm}^{(1)} (-y)^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} (-y)), & y < 0, \end{cases} \quad (26)$$

$$Q_{nm}^{(2)}(y) = \begin{cases} A_{nm}^{(2)} y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} y) + \\ + B_{nm}^{(2)} y^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} y), & y > 0, \\ C_{nm}^{(2)} (-y)^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} (-y)) + \\ + D_{nm}^{(2)} (-y)^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} (-y)), & y < 0, \end{cases} \quad (27)$$

где $A_{nm}^{(j)}, B_{nm}^{(j)}, C_{nm}^{(j)}, D_{nm}^{(j)}$ — неизвестные пока коэффициенты.

Теперь подберем постоянные $A_{nm}^{(j)}, B_{nm}^{(j)}, C_{nm}^{(j)}$ и $D_{nm}^{(j)}$ так, чтобы выполнялись условия (13).

Из (26) в силу $\beta \in (0, 1/2)$ следует, что первое из равенств (13) выполнено, если $D_{nm}^{(1)} = \left(\frac{\lambda_m + \mu_n^2}{\lambda_m - \mu_n^2}\right)^{\frac{1}{2}(\beta - \frac{1}{2})} B_{nm}^{(1)}$ при любых $A_{nm}^{(1)}$ и $C_{nm}^{(1)}$, а второе равенство имеет место, при $C_{nm}^{(1)} = \left(\frac{\lambda_m + \mu_n^2}{\lambda_m - \mu_n^2}\right)^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \beta)} A_{nm}^{(1)}$. С учетом этих равенств, функция (26) переписывается в виде

$$Q_{nm}^{(1)}(y) = \begin{cases} A_{nm}^{(1)} y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} y) + B_{nm}^{(1)} y^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} y), & y > 0, \\ \chi_{nm}^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\beta)} A_{nm}^{(1)} (-y)^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2}(-y)) + \\ + \chi_{nm}^{\frac{1}{2}(\beta-\frac{1}{2})} B_{nm}^{(1)} (-y)^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2}(-y)), & y < 0, \end{cases} \quad (28)$$

где $\chi_{nm} = (\lambda_m + \mu_n^2)/(\lambda_m - \mu_n^2)$.

Из (27) аналогично находим

$$Q_{nm}^{(2)}(y) = \begin{cases} A_{nm}^{(2)} y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} y) + B_{nm}^{(2)} y^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} y), & y > 0, \\ \chi_{nm}^{\frac{1}{2}(\beta-\frac{1}{2})} A_{nm}^{(2)} (-y)^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2}(-y)) + \\ + \chi_{nm}^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\beta)} B_{nm}^{(2)} (-y)^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2}(-y)), & y < 0. \end{cases} \quad (29)$$

3. Единственность решения задачи D

Пусть $u(x, y, z)$ – решение задачи D. Рассмотрим следующие функции:

$$\omega_{nm}^{(1)}(y) = d_m \int_0^c \int_{-1}^1 u(x, y, z) \tilde{X}_n^{(1)}(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad n, m \in N, \quad (30)$$

$$\omega_{nm}^{(2)}(y) = d_m \int_0^c \int_{-1}^1 u(x, y, z) \tilde{X}_n^{(2)}(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad n, m \in N, \quad (31)$$

где $\tilde{X}_n^{(j)}(x), j = \overline{1, 2}$ и $Z_m(z)$ – функции, определенные равенствами (25) и (20),

$$d_m = \|Z_m\|_{L_{2,q}(0,c)}^{-2},$$

$$\|Z_m\|_{L_{2,q}(0,c)} = \left(\int_0^c q(z) Z_m^2(z) dz\right)^{1/2} = |c J_{3/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m})|/\sqrt{2}, \quad q(z) = z^{2\gamma}.$$

Вычислим $B_{\beta-1/2}^y \omega_{nm}^{(1)}(y)$, преобразуем ее на основании равенства (1), затем после интегрирования по частям получим равенство

$$B_{\beta-1/2}^y \omega_{nm}^{(1)}(y) - (\lambda_m \operatorname{sgn} y + \mu_n^2) \omega_{nm}^{(1)}(y) = 0,$$

совпадающее с уравнением (10). Таким образом, $\omega_{nm}^{(1)}(y) \equiv Q_{nm}^{(1)}(y)$, поэтому $\omega_{nm}^{(1)}(y)$ определяются по формулам (28). Аналогичное справедливо и для функций $\omega_{nm}^{(2)}(y)$, т.е. они определяются по формулам (29).

Тогда из граничных условий (4) и равенств (30), (31) получим

$$\begin{cases} \omega_{nm}^{(1)}(b) = d_m \int_0^c \int_{-1}^1 f_2(x, z) \tilde{X}_n^{(1)}(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz = f_{2nm}^{(1)}, \\ \omega_{nm}^{(2)}(b) = d_m \int_0^c \int_{-1}^1 f_2(x, z) \tilde{X}_n^{(2)}(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz = f_{2nm}^{(2)}, \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} \omega_{nm}^{(1)}(-a) = d_m \int_0^c \int_{-1}^1 f_1(x, z) \tilde{X}_n^{(1)}(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz = f_{1nm}^{(1)}, \\ \omega_{nm}^{(2)}(-a) = d_m \int_0^c \int_{-1}^1 f_1(x, z) \tilde{X}_n^{(2)}(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz = f_{1nm}^{(2)}. \end{cases} \quad (33)$$

Тогда на основании (28), (29), (32) и (33) получим систему для нахождения неизвестных коэффициентов $A_{nm}^{(j)}, B_{nm}^{(j)}$:

$$\begin{cases} A_{nm}^{(1)} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} b) + B_{nm}^{(1)} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} b) = b^{\beta-1/2} f_{2nm}^{(1)}, \\ A_{nm}^{(1)} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} a) + \chi_{nm}^{\beta-1/2} B_{nm}^{(1)} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} a) = a^{\beta-\frac{1}{2}} \chi_{nm}^{\frac{2\beta-1}{4}} f_{1nm}^{(1)}, \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} A_{nm}^{(2)} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} b) + B_{nm}^{(2)} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} b) = b^{\beta-1/2} f_{2nm}^{(2)}, \\ \chi_{nm}^{\beta-1/2} A_{nm}^{(2)} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} a) + B_{nm}^{(2)} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} a) = a^{\beta-\frac{1}{2}} \chi_{nm}^{\frac{2\beta-1}{4}} f_{1nm}^{(2)}. \end{cases} \quad (35)$$

Если при всех $n, m \in N$ определители систем (34) и (35), определяемые соотношениями

$$\Delta_{nm}^{(1)}(a, b) = \chi_{nm}^{\beta-1/2} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} b) J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} a) - \\ - I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} b) J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} a), \quad (36)$$

$$\Delta_{nm}^{(2)}(a, b) = I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} b) J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} a) - \\ - \chi_{nm}^{\beta-1/2} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} b) J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} a), \quad (37)$$

отличны от нуля, то эти системы однозначно разрешимы:

$$A_{nm}^{(1)} = \frac{1}{\Delta_{nm}^{(1)}(a, b)} \left[b^{\beta-1/2} \chi_{nm}^{\beta-1/2} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} a) f_{2nm}^{(1)} - \right. \\ \left. - a^{\beta-1/2} \chi_{nm}^{(2\beta-1)/4} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} b) f_{1nm}^{(1)} \right],$$

$$B_{nm}^{(1)} = \frac{1}{\Delta_{nm}^{(1)}(a, b)} \left[a^{\beta-1/2} \chi_{nm}^{\beta-1/2} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} b) f_{1nm}^{(1)} - \right. \\ \left. - b^{\beta-1/2} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} a) f_{2nm}^{(1)} \right],$$

$$A_{nm}^{(2)} = \frac{1}{\Delta_{nm}^{(2)}(a, b)} \left[b^{\beta-1/2} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} a) f_{2nm}^{(2)} - \right. \\ \left. - a^{\beta-1/2} \chi_{nm}^{(2\beta-1)/4} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} b) f_{1nm}^{(2)} \right],$$

$$B_{nm}^{(2)} = \frac{1}{\Delta_{nm}^{(2)}(a, b)} \left[a^{\beta-1/2} \chi_{nm}^{(2\beta-1)/4} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} b) f_{1nm}^{(2)} - \right. \\ \left. - b^{\beta-1/2} \chi_{nm}^{\beta-1/2} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} a) f_{2nm}^{(2)} \right].$$

Тогда с учетом найденных значений $A_{nm}^{(j)}, B_{nm}^{(j)}$ функции $\omega_{nm}^{(j)}(y)$ примут вид

$$\omega_{nm}^{(1)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_{nm}^{(1)}(a, b)} \left\{ (y/b)^{1/2-\beta} \Delta_{nm}^{(1)}(a, y) f_{2nm}^{(1)} - \right. \\ \left. + (y/a)^{1/2-\beta} \chi_{nm}^{(2\beta-1)/4} \left[I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} b) I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} y) - \right. \right. \\ \left. \left. - I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} b) I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} y) \right] f_{1nm}^{(1)} \right\}, y > 0, \\ \frac{1}{\Delta_{nm}^{(1)}(a, b)} \left\{ (-y/a)^{1/2-\beta} \Delta_{nm}^{(1)}(-y, b) f_{1nm}^{(1)} + (-y/b)^{1/2-\beta} \chi_{nm}^{(2\beta-1)/4} \times \right. \\ \times \left[J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2}(-y)) J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} a) - \right. \\ \left. - J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2}(-y)) J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} a) \right] f_{2nm}^{(1)} \right\}, y < 0, \end{cases} \quad (38)$$

$$\omega_{nm}^{(2)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_{nm}^{(2)}(a, b)} \left\{ (y/b)^{1/2-\beta} \Delta_{nm}^{(2)}(a, y) f_{2nm}^{(2)} + \right. \\ \left. + (y/a)^{1/2-\beta} \chi_{nm}^{(2\beta-1)/4} \left[J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} b) J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} y) - \right. \right. \\ \left. \left. - J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} b) J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m + \mu_n^2} y) \right] f_{1nm}^{(2)} \right\}, y > 0, \\ \frac{1}{\Delta_{nm}^{(2)}(a, b)} \left\{ (-y/a)^{1/2-\beta} \Delta_{nm}^{(2)}(-y, b) f_{1nm}^{(2)} + (-y/b)^{1/2-\beta} \chi_{nm}^{(2\beta-1)/4} \times \right. \\ \times \left[I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2}(-y)) I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} a) - \right. \\ \left. - I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2}(-y)) I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m - \mu_n^2} a) \right] f_{2nm}^{(2)} \right\}, y < 0. \end{cases} \quad (39)$$

Пусть $f_1(x, z) = f_2(x, z) \equiv 0$ на $[-1, 1]$, тогда на основании (32), (33), (38) и (39) получим

$$\int_0^c \int_{-1}^1 u(x, y, z) \tilde{X}_n^{(j)}(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz = 0, j = \overline{1, 2}, m, n \in N.$$

Отсюда, в силу полноты системы функций (20) в пространстве $L_2(0, c)$ с весом $z^{2\gamma}$ и $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$ следует, что $\int_{-1}^1 u(x, y, z) \tilde{X}_n^{(j)}(x) dx = 0$, $n \in N$. Если учесть полноту системы функций (25) в пространстве $L_2(-1, 1)$ и $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, из последнего равенства вытекает, что $u(x, y, z) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Если существует решение задачи D, то оно единственно, только если для всех $n, m \in N$ выполняются условия $\Delta_{nm}^{(j)}(a, b) \neq 0, j = \overline{1, 2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. Москва: Наука, Физматлит. 1997. 204 с.
2. Франкль Ф.И. О задачах С.А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений//Известия АН СССР. -1945.-Т.9. - №2. -С.121-143.
3. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа//ДАН СССР. -1953. -Т.122. -№2. - С.167-170.
4. Cannon J.R. Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuity coefficient // Ann. Math. Pura ed appl. -1963.-V.62.-P. 371-377.
5. Вагапов В.З. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в полуполосе // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». -2019. - Т.23. №1. -С.7-19.
6. Вахания Н.Н. Об одной особой задаче для уравнения смешанного типа // Тр. АН Груз.ССР. -1963. -Т.3. -С.69-80.
7. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в полуполосе // Дифференциальные уравнения. -2008, -т.44. -№ 9. -С.1417-1422.
8. Солдатов А.П. Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. I. Теоремы единственности// Доклады РАН. -1993. - Т.332. -№6. -С.696-698.
9. Солдатов А.П. Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. II. Теоремы существования//Доклады РАН. - 1993, -Т.333, -№1, -С.16-18.
10. Солдатов А.П. О задачах типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе//Труды МИАН. -2012. -Т.278. -С.242-249.
11. Сохадзе Р.И. Первая краевая задача для уравнения смешанного типа с весовыми условиями склеивания вдоль линии параболического вырождения// Дифференциальные уравнения.-1981.-Т.17.- №1.-С.150-156.
12. Хайруллин Р.С. К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода с сильным вырождением // Дифференциальные уравнения. -2013. - Т.49. №4. -С.528-534.
13. Хачев М.М. Задача Дирихле для уравнения Трикоми в прямоугольнике // Дифференциальные уравнения. -1975. - Т.11. -№1. -С.151-160.
14. Хачев М.М. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. Нальчик: Эльбрус. -1998. -168 с.
15. Шабат Б.В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // Доклады АН СССР. -1957. -Т.112. -№3. - С.386-389.
16. Гималтдинова А.А. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями перехода в прямоугольной области. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки, №4, - С. 634-649.
17. Гималтдинова А.А. Вторая краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области// Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 2017, Т.137, -С. 3-16.
18. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами и // Вестник Самарского гос.тех.университета. Серия физ.-мат. науки, -2017, -Т.21, -№ 4. -С. 665-683.

