



SCIENTIFIC BULLETIN

**PHYSICAL AND
MATHEMATICAL RESEARCH**

ILMIY XABARNOMA
FIZIKA-MATEMATIKA
TADQIQOTLARI

2026
VOLUME 8
ISSUE 1

ЗАХИРИДДИН
МУҲАММАД БОБУР
НОМИДАГИ АНДИЖОН
ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ANDIJAN STATE
UNIVERSITY NAMED
AFTER ZAKHIRIDDIN
MUKHAMMAD BABUR

ИЛМИЙ ХАБАРНОМА

Физика-математика
тадқиқотлари

SCIENTIFIC BULLETIN

Physical and Mathematical
Research

2026/№1(8)

Андижон
2026-йил

Муассис

Захириддин Мухаммад Бобур номидаги
Андижон давлат университети

ИЛМІЙ ХАБАРНОМА. ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ТАДҚИҚОТЛАРИ

Журнал бир йилда 4 марта чоп этилади.

Андижон вилояти ахборот ва оммавий
коммуникациялар бошқармаси томонидан
2019-йил 26 декабрда
0452 рақам билан рўйхатга олинган.

Нашр индекси: 344

Нашр учун масъул:
Х.А. Махмудов
Н.Ю. Юнусалиев

Босишга рухсат этилди: 27.12.2019.
Қоғоз бичими: 60x81 1/8 Босма табоғи: 13,5
Офсет босма. Офсет қоғози.
Адади: 110 дона.
Баҳоси келишилган нархда.
Буюртма №: 165.
“Мухаррир” нашриёти матбаа бўлимида чоп
этилди.
Тошкент шаҳри, Сўғалли ота кўчаси 7-уй

Тахририят манзили:

170100, Андижон шаҳри, Университет
кўчаси, 129. Телефон: +998911602043.

Факс: (374) 223-88-30

E-mail: adu_xabarnoma@mail.ru Расмий сайт:
<https://asujournal.uz/>

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ РЕДКОЛЛЕГИИ

Зайнобидинов Сирожиiddин – доктор
физико-математических наук (DSc),
профессор, академик Академии наук
Республики Узбекистан.

ЗАМЕСТИТЕЛЬ ПРЕДСЕДАТЕЛЯ РЕДКОЛЛЕГИИ

Ақбаралиев Бахтиёр Бакирович – доктор
технических наук (DSc), профессор, ректор
Андижанского государственного
университета имени З. М. Бобура.

ФИЗИКА

Утамурадова Шарифа Бекмурадовна –
доктор физико-математических наук (DSc),
профессор, директор Научно-
исследовательского института физики
полупроводников и микроэлектроники при
Национальном университете Узбекистана
имени Мирзо Улугбека.

Маматкаримов Одилжон Охундедаевич –
доктор физико-математических наук (DSc),
профессор, ректор Наманганского
инженерно-технологического института.

Олимов Хусниiddин Косимович – доктор
физико-математических наук (DSc),
профессор, директор Физико-технического
института НПО «Физика-Солнце» Академии
наук Республики Узбекистан.

Каримов Иброхим Набиевич – доктор
физико-математических наук (DSc),
профессор, профессор кафедры физики
Андижанского государственного
университета имени З. М. Бобура.

Тургунов Нозимжон Абдуманнопович –
доктор физико-математических наук (DSc),
профессор, заместитель директора Научно-
исследовательского института физики
полупроводников и микроэлектроники при
Национальном университете Узбекистана
имени Мирзо Улугбека.

Исмаилов Канатбай Абдреймович – доктор
физико-математических наук, профессор
Каракалпакского государственного
университета.

Каражанов Смагул – доктор физико-

математических наук (DSc), старший научный сотрудник отдела солнечной энергетики Института энергетических технологий, Кьеллер, Норвегия.

Рембеза Екатерина Станиславовна – доктор физико-математических наук (DSc), профессор Воронежского государственного университета.

Вайткус Юозас Юозович – доктор физико-математических наук (DSc), профессор, академик Академии наук Литвы.

Абдужабборов Ахмаджон – доктор физико-математических наук (DSc), профессор, главный научный сотрудник Института астрономии Академии наук Республики Узбекистан.

Бобоев Акрамжон Йулдашбоевич – доктор физико-математических наук (DSc), декан физико-технического факультета Андижанского государственного университета имени З. М. Бобура.

Хакимов Абдухаким – Доктор педагогических наук (DSc), профессор, Андижанского государственного университета имени З. М. Бобура.

Курбанов Азизжон Обитжонович – кандидат физико-математических наук, доцент Андижанского государственного университета имени З. М. Бобура.

Мадаминов Хуршиджон Мухамедович – кандидат физико-математических наук, доцент Андижанского государственного университета имени З. М. Бобура.

ТЕХНИКА

Мамадалимов Абдугафур Тишабаевич – доктор физико-математических наук (DSc), профессор, академик Академии наук Республики Узбекистан.

Содиков Илхом Исмаилович – доктор физико-математических наук (DSc), профессор, директор Института ядерной физики Академии наук Республики Узбекистан.

Ашуров Хотам Бахронович – доктор технических наук (DSc), профессор, директор Института ионно-плазменных и лазерных

технологий имени У. А. Арифова Академии наук Республики Узбекистан.

Далиев Хожакбар Султанович – доктор физико-математических наук (DSc), профессор, директор Ташкентского филиала Национального исследовательского университета «МЭИ».

Алиев Раимжон Усмонович – доктор технических наук (DSc), профессор Андижанского государственного университета имени З. М. Бобура.

Юлдашев Носиржон Хайдарович – доктор технических наук (DSc), профессор Ферганского политехнического института.

Касимахунова Анора Мамасодиковна – доктор технических наук (DSc), профессор Ферганского государственного университета.

Тагаев Марат Баймуратович – доктор технических наук (DSc), профессор Каракалпакского государственного университета имени Бердаха.

Мансуров Хатамжон Жураевич – кандидат физико-математических наук, доцент, декан физического факультета Андижанского государственного университета имени З. М. Бобура.

МАТЕМАТИКА

Арзикулов Фарходжон Ньматович – доктор физико-математических наук, профессор Андижанского государственного университета имени З. М. Бобура.

Кайгородов Иван – доктор физико-математических наук, профессор Университета Бейра Интериор, Ковильян, Португалия.

Xabier Garcia Martinez – профессор кафедры математики Университета Виго, Виго, Испания.

Мамадалиев Нуманжон Олимжонович – доктор физико-математических наук (DSc), профессор Национального университета Узбекистана.

Каримжанов Икболжон Абдулазизович – PhD по физико-математическим наукам, доцент, проректор Андижанского государственного университета.

Ибайдуллаев Туланбой Турсунбоевич – по физико-математическим наукам, доцент, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики профессор Андижанского государственного университета имени З. М. Бобура. Андижанского государственного университета имени З. М. Бобура.

Умрзаков Нодирбек Мухаммадович – кандидат физико-математических наук, РЕДАКТОР

доцент, заведующий кафедрой алгебры и **Махмудов Хушруйбек Абдулазизович** – PhD по физико-математическим наукам, анализ Андижанского государственного университета имени З. М. Бобура. Андижанский государственный университет.

Абдурахманов Жамолидин Комолдинович – кандидат физико-математических наук, по физико-математическим наукам, доцент Андижанского государственного университета. **Юнусалиев Нуритдин Юнусали угли** – PhD Андижанский государственный университет.

Жўраев Баходиржон Иномжон ўғли – PhD

ОГЛАВЛЕНИЕ

Физика	
1.С. З. Зайнабидинов, К. Н. Мусаев. Взаимодействия некоторых примесных атомов с глубокими энергетическими уровнями с кислородом	7
2.A.Yarbekov, M. Makhkamov Synthesizing amorphous nanoparticles Cu/Cu ₂ O using the electrochemical method under the influence of ultrasound (sonoelectrochemistry).	11
3.Б.Ж. Ахмадалиев, Х.М. Нематов Бўйлама экситон нурлана оладиган геометрияда экситон-поляритон люминесценциясининг назарий хисоблаш	21
4.B.R. Kaxramonov Vakuum-yoy razryadi va miltillama razryad orqali po‘lat 45 sirtini tozalash jarayonlarining fazaviy va strukturaviy tahlili	25
5.A.A. Ismatov, S. X. Mirzaqandova, X.B. Ashurov, I.X. Xudayqulov, M.M. Adilov PECVD usulida 550°C da uglerod nanostrukturalari sintezi va ularning strukturaviy tahlili	32
Н.М. Sulaymonov Polikristall yarimo‘tkazgichlarda tenzoqarshilik mexanizmlari	39
Д.А.Юсупова, С.З.Сирожиддинова, М.Ш.Рузиматова Стратегии оптимизации термоэлектрических параметров в системе Bi–Sb–Te для термоэлектрической генерации	46
A.Y. Boboyev, A.K.Rafikov, Z.M.Ibrohimov, M.M.Arabboyeva Rodiy atomlari bilan legirlangan kremniy monokristallarining tuzilmaviy va fazaviy holatlari	55
А.Султанов, Х. Бозоров Исследование электрофизические параметры субнано– секундной оптоэлектроники на основе арсенид галлиевых тиристорных формирователей мощных импульсов	62
А.А. Эсанов, Ш.Н. Абдугаппарова Валикли лаборатория жинида пахта намуналаридан олинадиган тола ва жинланган чигит микдорларини аниқлаш тажрибалари натижалари	65
Н.М. Sulaymonov Tsiklik deformatsiyani (Bi _{0,3} Sb _{0,7}) ₂ Te ₃ polikristall plyonkalarining temperaturaviy qarshiligiga ta’siri	69
X.S. O’sarov Ba’zi p-n o’tishli diodlarning ishlash xususiyatlariga haroratning ta’siri	73
F.L. Omonboyev Granullangan Mg ₃ Sb ₂ termoelektrik materialining mikrotuzilmasi	79
T.M. Azimov, A.Jumaboev Automated technology for measuring thermoelectric properties in semiconductors	83
X.A. Maxmudov, F.L. Omonboyev, T.A. Sobirova	89

Granullangan Mg_3Sb_2 zarrachalarida zaryad ko'chish jarayonlarining seto modeli asosida tadqiqi	
<u>Математика</u>	
Х.Г. Васиева Об одном классе нестационарных задач преследования с интегральными ограничениями на управления игроков	94
A.M. Tilavov, A.Kh. Abdullayev, S.B. Dustnazarov On recurrent differential equations associated with the Liouville equation.	106
O. S. Akhmedov, D. B. Muzaffarova On the closed trajectories of a quadratic three-dimensional system	109
Z. Abdullayeva Zamonaviy mexanikada rotorli sistemalarning dinamik balansirlash usullarini takomillashtirish	119
O.G. Ergasheva General solution formulas for a class of hyperbolic equations with singular coefficients	126
M.S. Azizov Bir jinsli bo'lmagan buziladigan giperbolik tipdagi tenglama uchun aralash masala	135
S.O.G'ulomov, S.M.Zokirjonov Ikki quvuvchi va bir qochuvchi ishtirokida integral chegaralanishli chiziqli quvish-qochish o'yini.	145
Н.А. Мамадалиев, Т.Т. Ибайдуллаев Об одном способе преследования в дифференциально-разностных уравнениях нейтрального типа с интегральными и различными ограничениями на управления игроков	151
M.X. Akbarova, S.X. Akbarova, U.M. Kodirova О нелокальной краевой задаче для смешанно-параболического уравнения в неограниченной области	163
Sh.A. Oripov, N. Rahmatullayeva To'rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun boshlang'ich masala	168
M.C. Абдухалилова Математическое моделирование динамики цилиндрических оболочек во взаимодействии с нелинейно-упругой внешней средой	193
<i>Правила оформления статьи.....</i>	198

Взаимодействия некоторых примесных атомов с глубокими энергетическими уровнями с кислородом

С. З. Зайнабидинов¹, К. Н. Мусаев¹

¹Андижанский государственный университет имени Захириддина Мухаммада Бабура, ул. Университетская, 129, Андижан 170100, Республика Узбекистан

Аннотация. В работе представлены результаты экспериментальных и аналитических исследований взаимодействий между некоторыми примесными атомами (Ni, Mn, Er) и кислородом, находящимся в кристаллической решётке кремния. Показано, что, несмотря на электронейтральность кислорода, он активно участвует в формировании различных примесных комплексов, оказывая влияние на электрические и оптические свойства материала. Установлено, что диффузия атомов Ni способствует образованию неактивных комплексов с кислородом и изменению ИК-поглощения в области 1100 см^{-1} , соответствующей междоузельному кислороду. Диффузия марганца приводит к снижению концентрации оптически активного кислорода, а легирование кремния эрбием сопровождается уменьшением интенсивности полосы ИК-поглощения за счёт образования связей Er–O и возможных фаз Er_2O_3 и Er–O–Si. Полученные результаты демонстрируют значительную роль кислорода в процессах геттерирования и комплексообразования с примесями глубоких уровней, что имеет важное значение для оптимизации параметров и свойств кремниевых материалов в полупроводниковой технологии.

Ключевые слова: кремний, кислород, примесные атомы, никель, марганец, эрбий, глубокие энергетические уровни, ИК-спектроскопия, комплексообразование

Abstract. This work presents the results of experimental and analytical studies of interactions between certain impurity atoms (Ni, Mn, Er) and oxygen located in the crystal lattice of silicon. It is shown that, despite the electrical neutrality of oxygen, it actively participates in the formation of various impurity complexes, thereby influencing the electrical and optical properties of the material. It has been established that the diffusion of Ni atoms promotes the formation of electrically inactive complexes with oxygen and leads to changes in IR absorption in the region around 1100 cm^{-1} , corresponding to interstitial oxygen. Manganese diffusion results in a decrease in the concentration of optically active oxygen, while erbium doping of silicon is accompanied by a reduction in the intensity of the IR absorption band due to the formation of Er–O bonds and possible Er_2O_3 and Er–O–Si phases. The obtained results demonstrate the significant role of oxygen in gettering processes and in the formation of complexes with deep-level impurities, which is of great importance for optimizing the parameters and properties of silicon materials in semiconductor technology.

Keywords: silicon, oxygen, impurity atoms, nickel, manganese, erbium, deep energy levels, IR spectroscopy, complex formation

1. Введение.

Взаимодействие между примесными атомами с глубокими энергетическими уровнями и атомами кислорода достаточно хорошо изученная тема, но несмотря на это все еще остается очень много вопросов о роли кислорода в формировании различных примесных образований в кристаллической решетке кремния.

Кислород - электрически нейтральная примесь в кремнии. В зависимости от условий выращивания кристаллов концентрация кислорода может широко варьироваться (от $\sim 10^{13}$ до $2 \cdot 10^{18}\text{ см}^{-3}$).

Температурная зависимость растворимости кислорода может рассчитываться следующим образом[1]:

$$O_{\text{рав}} = O^o \exp\left(-\frac{E_{\text{рав}}}{kT}\right) \quad (1)$$

где O^o - предэкспоненциальный множитель, $E_{\text{рав}}$ - теплота растворения.

Исследования ИК спектров показали, что полосы поглощения 1205 , 1107 и 515 см^{-1} связаны с междоузельным кислородом. При изучении рентгенограмм кремния установлена корреляция постоянной решетки с возрастанием концентрации кислорода, что указывает на междоузельное положение атомов кислорода (O_i) в кремнии. Поскольку кислород электрически нейтрален, предложенная модель представляла собой нелинейную трехатомную молекулу, атом кислорода в которой находится в междоузельном положении, прерывая нормальную связь Si–Si, которая направлена вдоль $\{111\}$ (рис. 1)

Максимальное значение растворимости для атомов Ni в Si составляет $\sim 10^{18}\text{ см}^{-3}$ и только около 0,01 % от общего количества растворенных атомов Ni находятся в электрически активном состоянии. Остальная

же часть находится в электронейтральном состоянии в виде различных комплексов.

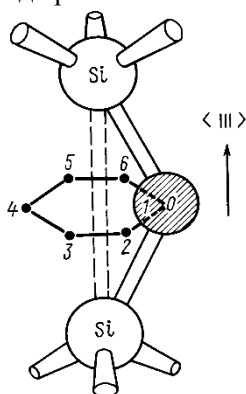


Рис. 1. Структурная модель связи Si-O-Si

Столь высокая концентрация атомов Ni и кислорода способствует активному взаимодействию и образованию различных соединений в монокристаллическом кремнии. В настоящее время достаточно хорошо изучены параметры многих комплексов и кластеров с участием кислорода, установлена их роль в формировании свойств полупроводниковых материалов. Однако все еще не сформирована общая картина взаимодействий различных примесных атомов с кислородом. Данная работа является попыткой обобщения процессов взаимодействия между некоторыми примесными атомами и кислородом.

II. Экспериментальная часть.

В работе [2] для исследований использовались образцы монокристаллического кремния p- и r-типа проводимости с $\rho = 5-100$ Ом·см. В качестве диффузанта применялись металлический Ni и Mn особой чистоты. Диффузия проводилась в кварцевых ампулах при температуре 1200 °C в течении 4 часов с последующей закалкой образцов сбрасыванием ампул в воду.

III. Результаты и обсуждение.

Установлено, что введение Ni в Si приводит к заметному изменению интенсивности кислородного пика поглощения, чем больше концентрация введенного Ni, тем сильнее наблюдаемый эффект. Основываясь на анализе полученных данных был сделан вывод, что возможно образование электрически и оптически неактивных комплексов.

Установлено, что легирование кремния атомами никеля с последующей резкой закалкой

приводит к появлению заметного пика ИК-поглощения в области 1100 см⁻¹ (рис.2).

Как ранее упоминалось область ИК-поглощения ~1100 см⁻¹ соответствует междоузельному кислороду, образующий комплекс Si-O-Si структура которой показана на рис.1.

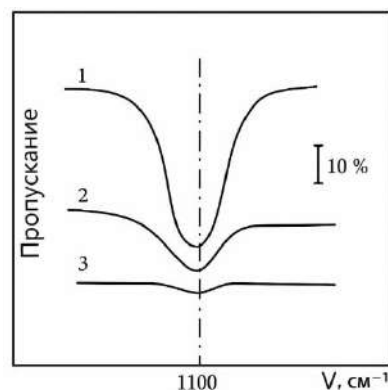


Рис.2. ИК-поглощения образцов Si. Кривые 1-исходный беспримесный образец, 2-образцы Si(Ni) после НТО, 3- образцы Si(Ni) после диффузионной обработки

В более поздних работах [3,4,5] подробно изучен процесс формирования преципитатов Ni в монокристаллах кремния, их структура и химический состав. Авторы с помощью ИК-микроскопии, рентгеновского анализа и микрозондовых исследований определили, что примесные преципитаты помимо атомов Ni и Si также содержат железо, медь, кислород и другие технологические примеси, что объясняет изменение в ИК-спектре поглощения наблюдавшиеся ранее. Авторы [5] методом энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии EDS определили состав примесных преципитатов никеля в кремнии. Согласно результатам в составе преципитатов содержится до ~1,98 % кислорода, до ~0,45% железа, до ~0,95% меди. Результаты работы [5] хорошо согласуются с результатами [3,4]. Исходя из приведенных данных можно сделать вывод, что при образовании примесных преципитатов никеля происходит геттерирование атомов неконтролируемых примесей в том числе и кислорода.

Было обнаружено, что диффузия марганца приводит к уменьшению интенсивности полос ИК-поглощения при 1100 см⁻¹ (оптически активный кислород). Эффект уменьшения концентрации оптически

активного кислорода N_O^{oa} тем сильнее, чем больше концентрация введенного марганца. Так в образцах Si(Mn), где общая концентрация электрически активного Mn составляет $\approx 10^{14} \text{ см}^{-3}$ концентрация N_O^{oa} уменьшилась на 10%, а при концентрации марганца $\approx 2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ N_O^{oa} уменьшилась на 50% (рис.3, кривые 2 и 3).

Согласно [6] подобное уменьшение N_O^{oa} не является следствием образования частиц SO_2 или связыванием кислорода с углеродом в комплексы типа CO_n , а обусловлено именно диффузией Mn, поскольку режимы введения этой примеси не могут привести к преципитации кислорода или углерода. Кроме того, в контрольных образцах, прошедших термообработку при тех же условиях, что и образцы Si(Mn), уменьшения N_O^{oa} не наблюдается.

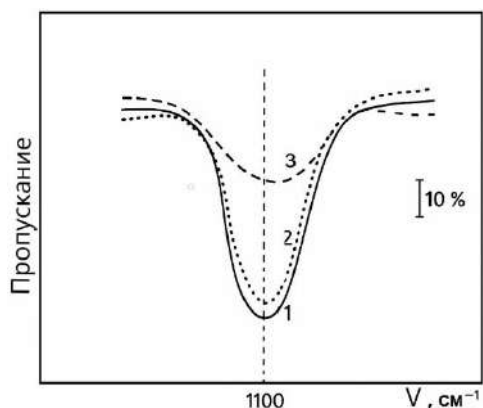


Рис.3. ИК-поглощения образцов Si(Mn).

В работе [7] обнаружено, что легирование кремния эрбием приводит к заметному снижению амплитуды полосы ИК-поглощения в диапазоне $1093\text{--}1110 \text{ см}^{-1}$, относительно контрольных образцов. Расчеты показали, что уменьшение концентрации оптически активного кислорода (Si-O-Si) на 35–47%. Это, может быть, обусловлено взаимодействием Er с O в результате чего эрбий замещает часть O в связях Si-O-Si, формируя связи Er-O. Так же это может быть, связано с процессами образования мелких кластеров Er_2O_3 и смешанных фаз Er-O-Si. Авторы предполагают, что при введении Er кислород из SiO_2 частично перераспределяется, образуя связи Er-O. В результате уменьшается количество доступных групп Si-O-Si, что снижает оптическую активность кислорода. Так

же авторы допускают формирование силикатов Er-O-Si или нанодисперсных включений Er_2O_3 .

IV. Выводы или Заключение.

Таким образом, можно увидеть, что кислород в кремнии, несмотря на свою электронейтральность, активно взаимодействует с различными примесными атомами, изменяя их химическое состояние, структуру и распределение в кристаллической решётке.

Несмотря на некоторые различия в процессах взаимодействия разных примесей с глубокими уровнями эти процессы существенно влияют на физические свойства материала, в частности на его электрические и оптические характеристики. Как можно увидеть, остается еще много вопросов требующих более глубокого изучения процессов межпримесного взаимодействия в кремнии. Понимание механизмов взаимодействия кислорода с примесями глубоких уровней имеет важное значение для управления свойствами кремниевых материалов и оптимизации технологий их выращивания и обработки.

Список литературы

- [1]. Бабич В.М., Блецкан Н.И., Венгер Е.Ф. Кислород в монокристаллах кремния: К.: Интерпресс ЛТД; 1997. 240 с.
- [2]. Зайнабидинов С.З., Далиев Х.С. Дефектообразование в кремнии: Т.: Университет; 1993. 190 с.
- [3]. Zainabidinov S.Z., Musaev K.N., Turgunov N.A., Turaev A.R. Dopant Microassociation Mechanisms in Si(Mn) and Si(Ni)// Inorganic Materials, 2012; 48(11): 1065–1069.
- [4]. Turgunov N.A., Berkinov E.Kh., Turmanova R.M. Accumulations of impurity Ni atoms and their effect on the electrophysical properties of Si// E3S Web of Conferences, 2023; 402(14018)
- [5]. Бахадирханов М.К., Исмаилов Б.К. Геттерирующие свойства кластеров атомов никеля в решетке кремния// Приборы. 2020; 6 (240). 44–48.
- [6]. Саъдуллаев А. Б. Особенности комплексообразования между примесными атомами марганца и кислорода в кремнии// Молодой ученый. 2014; 12 (71). 50–52.
- [7]. Zarifbaev J.Sh. Influence of external factors on the defect structure of Silicon doped with erbium and europium. Abstract of the dissertation of doctor of philosophy (phd) on physical and mathematical

sciences. Tashkent: 2025. 24 p. Available at:
<https://www.interaktiv.oak.uz/avtoreferat/3aO19953fO1.file>

Информация об авторах

1. *Зайнабидинов Сиражиддин Зайнабидинович*,
Академик АН РУз., профессор кафедры физики
твёрдых тел, Андижанский государственный
университет (Андижан, Узбекистан).

<https://orcid.org/0000-0003-2943-5844>

s.z.zaynabidinov@gmail.com

2. *Мусаев Кобилжон Нуманович*, докторант
кафедры физики твёрдых тел, Андижанский
государственный университет (Андижан,
Узбекистан).

<https://orcid.org/0009-0001-1158-6313>

quyoshcha2@gmail.com

Synthesizing amorphous nanoparticles Cu/Cu₂O using the electrochemical method under the influence of ultrasound (sonoelectrochemistry).

A.Yarbekov¹, M. Makhkamov²

¹Turin Polytechnic University in Tashkent, a.yarbekov@polito.uz

²Andijan State University

Abstract. The paper proposes a simple and effective sonoelectrochemical method for obtaining amorphous nanoparticles Cu/Cu₂O. The synthesis was carried out in an unconventional electrochemical cell (inert anode Pt, active cathode Cu) in a CuSO₄ solution with the addition of polyvinylpyrrolidone under the action of ultrasound at a voltage of 15–30 V. X-ray diffraction analysis revealed a high content of the amorphous phase (79.7–81.9%) with 18–20% retention of the crystalline structure of Cu and Cu₂O. Scanning electron microscopy confirmed the formation of spherical, well-dispersed nanoparticles up to 20–30 nm in size; dendritic growth was observed without ultrasound. The method allows for control of the phase composition and morphology of particles by varying voltage and ultrasonic exposure, opening up prospects for the large-scale production of stable amorphous nanomaterials.

Key words: Sonoelectrochemistry, Copper, amorphous phase, nanoparticles, stabilizers.

Аннотация. В статье предложен простой и эффективный соноэлектрохимический метод получения аморфных наночастиц Cu/Cu₂O. Синтез проводился в нетрадиционной электрохимической ячейке (инертный анод Pt, активный катод Cu) в растворе CuSO₄ с добавлением поливинилпирролидона под действием ультразвука при напряжении 15–30 В. Рентгенодифракционный анализ выявил высокое содержание аморфной фазы (79,7–81,9%) с сохранением кристаллической структуры Cu и Cu₂O на уровне 18–20%. Сканирующая электронная микроскопия подтвердила образование сферических, хорошо диспергированных наночастиц размером до 20–30 нм; без ультразвука наблюдался дендритный рост. Метод позволяет контролировать фазовый состав и морфологию частиц путем изменения напряжения и воздействия ультразвука, открывая перспективы для крупномасштабного производства стабильных аморфных наноматериалов.

Ключевые слова: Соноэлектрохимия, медь, аморфная фаза, наночастицы, стабилизаторы.

Annotatsiya. Maqolada amorf nanopartikullar Cu/Cu₂O olish uchun oddiy va samarali sonoelektrokimyoviy usul taklif qilingan. Sintez noan'anaviy elektrokimyoviy katakchada (inert anod Pt, faol katod Cu) CuSO₄ eritmasida polivinilpirrolidon qo'shilgan holda ultratovush ta'sirida 15-30 V kuchlanishda amalga oshirildi. Rentgen difraksiya tahlili Cu va Cu₂O kristall tuzilishining 18-20% saqlanishi bilan amorf fazaning yuqori miqdorini (79,7–81,9%) aniqladi. Skanerlovchi elektron mikroskopiyasi 20-30 nm gacha bo'lgan sharsimon, yaxshi tarqalgan nanopartikullarning hosil bo'lishini tasdiqladi; ultratovushsiz dendritik o'sish kuzatildi. Bu usul kuchlanish va ultratovush ta'sirini o'zgartirish orqali zarrachalarning faza tarkibi va morfologiyasini boshqarish imkonini beradi, bu esa barqaror amorf nanomateriallarni keng ko'lamda ishlab chiqarish istiqbollarini ochadi.

Kalit so'zlar: Sonoelektrokimyo, mis, amorf faza, nanozarralar, stabilizatorlar.

I. Introduction.

Electrochemical method for the synthesis of nanoparticles The electrochemical synthesis of Cu, Cu₂O, and CuO is a facile, simple, rapid, and inexpensive method, and the nanoparticles synthesized are chemically pure. Cyclic voltammetry, potentiostatic, galvanostatic, and pulsed current methods, as well as various electrochemical methods, were used to synthesize the nanoparticles [1-11].

In recent years, several advances have been made in the electrochemical synthesis of nanoparticles. One advancement is the development of new electrolytes, such as **ionic liquid electrolytes**, which can be used to synthesize nanoparticles with high purity and controlled size and morphology [12]. Another advancement is the development of new

electrochemical synthesis methods, such as pulsed electrodeposition, which can be used to synthesize nanoparticles with unique properties [12].

There are three main types of electrochemical synthesis of nanoparticles: 1. **Direct electrodeposition**. In this method, Cu ions are reduced to CuNPs directly on the electrode surface. 2. **Pulsed electrodeposition** is a type of electrodeposition that uses a pulsed current or potential to deposit nanoparticles. It has several advantages over traditional electrodeposition [12]. 3. **Mediated Electrodeposition**. This method uses a mediator to reduce Cu ions to CuNPs. The mediator is typically a metal ion, such as Ni (II) or Fe (III), which is easily reduced and oxidized [13]. Unlike direct electrodeposition, where metal ions are reduced directly at the electrode,

mediated electrodeposition involves intermediate steps that improve selectivity and efficiency. The method is widely used in the synthesis of nanomaterials for catalysis, energy, and sensors [14].

The size and shape of nanoparticles can be controlled by adjusting electrochemical parameters such as the applied potential, current density, and electrolyte composition. Depending on the applied current, nanoparticles are deposited on the cathode as a film or powder (15). At low currents, films of metal nanoparticles form on the cathode, while at higher currents, nanoparticle powders are formed. Nanoparticles are removed from the cathode surface mechanically or chemically.

But the electrochemical method is usually used to obtain metal nanoparticles (MNPs) and nanocomposites based on them, immobilized on a conductive substrate (electrode). However, for larger-scale use HF-M, It is necessary that they be in the form of a powder or they are in the bulk of the solution in other states: in a shell in a stabilizer, on non-conducting solid carriers, in matrices, in nanocapsules, etc. In particular, the introduction of chemically active compounds (complexing agents, stabilizers and surfactants) into the electrolyte composition makes it possible to obtain more stable powders with improved technological properties and the required particle size [16-17]. In the presence of stabilizers, metal nanoparticles, the proportion of precipitated metal decreases, but still remains high. Thus, when obtaining nanoparticles in an aqueous solution by electrochemical reduction of metal ions in the presence of poly(*N* - vinylpyrrolidone), up to 80% of the metal is deposited on the cathode, and in the presence of tetraalkylammonium salts and sodium dodecylbenzenesulfonate, almost all of the generated metal is deposited on the electrode [18-19]. One of the best methods for preventing nanoparticle deposition on an electrode is the use of sonoelectrochemistry. Sonoelectrochemistry equipment is expensive due to the need for specialized components. The method involves the use of an ultrasonic probe integrated with an ultrasonic generator and potentiostat, providing a combined effect of ultrasound and electrochemical potentials. During the

nanoparticle synthesis process A potentiostat applies a controlled voltage to the electrode, resulting in the electrochemical reduction of nanoparticle precursors from the solution on the electrode surface. Upon completion of the deposition stage, the voltage is turned off, and the ultrasonic probe is activated via a generator to desorb and disperse the resulting nanoparticles from the electrode. This cyclic process (electrodeposition followed by ultrasonic exfoliation) is repeated until synthesis is complete, allowing control over the size and morphology of the nanoparticles.

However, one of the key requirements for nanoparticle synthesis methods is their simplicity. The electrochemical method of synthesizing nanoparticles is simple and accessible, not requiring expensive equipment.

The electrochemical method for synthesizing nanoparticles consists of two electrodes: the anode and the cathode. The type of electrode used in the synthesis process depends on the nature of the starting materials. For example, metallic electrodes are used to synthesize metal nanoparticles, while graphite or dielectric electrodes are used to synthesize oxide nanoparticles. While the cathode is an inert material, the anode must be an active material capable of participating in the electrochemical reaction.

However, after deposition, the nanoparticles are removed from the substrate mechanically, which is a technologically complex procedure and can affect their morphological characteristics. Nevertheless, this step does not detract from the overall technological simplicity of the electrochemical synthesis method.

A distinctive feature of our proposed method. Our proposed method differs from the widely used (some might say traditional) electrochemical method, which typically uses inert and active electrodes, with the cathode typically being an inert material and the anode an active material. In our experiment, which can be considered unconventional, we used an inert material (platinum) for the anode and an active material (copper) for the cathode. Research paper devoted to this version of the electrochemical method for synthesizing nanoparticles is rare. In our proposed method, during the electrochemical reduction of copper

from copper sulfate, a reduction reaction occurs at the cathode (copper). As a result of this reaction, copper nanoparticles are formed on the surface of the cathode (copper). Copper ions (Cu^{2+}) from the solution are attracted to the cathode. On its surface, electrons reduce the copper ions, resulting in the formation of copper atoms. These copper atoms combine with each other, forming copper nanoparticles. In this method, copper nanoparticles are not deposited on the surface of the copper cathode as a film, but form a copper powder. Nanoparticle synthesis was performed Cu using our proposed method of electrolysis in combination with ultrasound.

II. Experimental part

Materials: Copper sulfate (CuSO_4), distilled water, PVP. The electrodes were the same for all methods: inert material (platinum) 2 x 2 cm square, active material (copper) 0.5 cm^2 round.

Installation. The experimental setup is shown in Figure 1.

As can be seen from the figure 1, the inert platinum material is connected to the anode, and the active copper material is connected to the cathode. The cell containing the solution is located on an ultrasonic transducer immersed in water. Ultrasound with power of 50 watts is directed vertically upward from four directions (arrows numbered 1, 2, 3,

and 4 on the flask indicate the direction of the ultrasound) to ensure uniformity of the ultrasound and create a complex acoustic field. During the process, the solution on the flask constantly oscillated under this complex field.

The experiments were carried out at constant voltage using different voltages in the range of 24-30 V.

In electrochemical synthesis, the size of copper nanoparticles can be reduced by increasing the voltage [20]. An average particle size of 21.55 nm was obtained using a potential difference of 27 V (21).

Method 1. In Method 1, sample #5(Cu - Cu_2O powder) was synthesized. The electrolyte contained 400 ml of copper sulfate (CuSO_4), sulfuric acid (H_2SO_4), polyvinylpyrrolidone (PVP), and distilled water. The electrolyte voltage was 15 volts, and the initial current was 0.2 amperes. However, during the process, the current varied from 0.2 A to 1 A. This phenomenon is explained in the paper [22] as follows. During electrolysis, the current increases over time. After the initial powder layer, the cathode surface changes, and the working surface area increases, since the cathode surface is no longer smooth. The greater the copper roughness on the cathode, the larger the working surface and the greater the current [22].



Figure 1. The experimental setup

During the process, copper powders formed on the cathode, weakly bonded to the cathode and to each other (Figure 2a). As the powders increased, they moved away from the

cathode, thereby freeing up space on the cathode for new powder formation. The powders, once released, remained in the solution (on the surface and within the solution)

and then gradually sank to the bottom of the cell, as shown in Figure 2b



Figure 2(a). Copper powders formed on the cathode

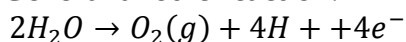


Figure 2(b). The powders gradually sank to the bottom of the cell

According to the law of electrolysis, the electrochemical reaction in the solution should be as follows.

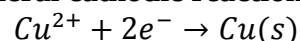
At the anode (platinum): Oxidation reaction: Because platinum is inert, it does not participate in the chemical reaction. Instead, water (from the CuSO_4 solution) is likely oxidized at the anode. The oxidation of water produces oxygen gas and releases protons (H^+ ions) into the solution.

General anodic reaction:



At the cathode (copper): Reduction reaction: Copper ions (Cu^{2+}) from the copper sulfate solution are attracted to the cathode where they gain electrons and are reduced to solid copper (Cu).

General cathodic reaction:



After 20 minutes of the process, the color of the solution changed from blue to brown (as shown in Figure 3).

This phenomenon is associated with ultrasound and the expansion of powder volume in the solution. The use of ultrasound can significantly affect the electrochemical process. It induces cavitation (the formation, growth, and explosive collapse of bubbles in a liquid), leading to high local temperatures and pressures, as well as intense mechanical stress. Due to this phenomenon, cavitation causes copper powders in the solution to spread throughout the entire volume of the solution, causing the color of the solution to change from blue to brown.



Figure 3. The color of the solution changed from blue to brown

After the reaction was complete, the solution containing the powder was left for 5 hours. All the synthesized powders settled to the bottom of the cell. The powder was then removed from the solution, treated twice with distilled water, and dried at room temperature.

Method 2. Cu-Cu₂O powders were synthesized in samples No.6 and No.8. The electrolyte contained 400 ml of copper sulfate (CuSO₄), polyvinylpyrrolidone (PVP), and distilled water. For sample No.6 the electrolyte voltage was 21 volts, and the current initially was 0.4 amperes. However, during the process, the current varied from 0.4 A to 1.5 A. This phenomenon is explained in detail in [22]. For sample No. 8, the electrolyte voltage was 24 volts, and the current varied from 0.5 A to 1.6 A. The ultrasound-assisted experiment lasted 2 hours.

Method 3. The electrolyte contained 400 ml of copper sulfate (CuSO₄), polyvinylpyrrolidone (PVP), and distilled water. For sample #13, the electrolyte voltage was 30 volts, and the initial current was 0.8 amperes. However, during the reaction, the

current varied from 0.8 A to 2.2 A. This phenomenon is explained in detail in [21]. The duration of the ultrasound-assisted experiment was 110 minutes.

Method 4. Method 4 repeated Method 3 but without ultrasound. The electrolyte contained 400 ml of copper sulfate (CuSO₄), polyvinylpyrrolidone (PVP), and distilled water. For sample #13, the electrolyte voltage was 30 volts, and the initial current was 0.8 amperes. However, during the reaction, the current varied from 0.8 A to 2.2 A. This phenomenon is explained in detail in [21]. The duration of the experiment without ultrasound was 110 minutes.

III. Result and discussion

X-ray diffraction analysis (XRD) was performed on the copper nanoparticle sample synthesized by **Method 1**, Cu -K X-rays with a wavelength of $\lambda = 1.54056 \text{ \AA}$, the data were taken for the 2θ -range from 10 to 80° with a step of 0.025°. The diffraction pattern based on these mixtures is shown in Figure 4.

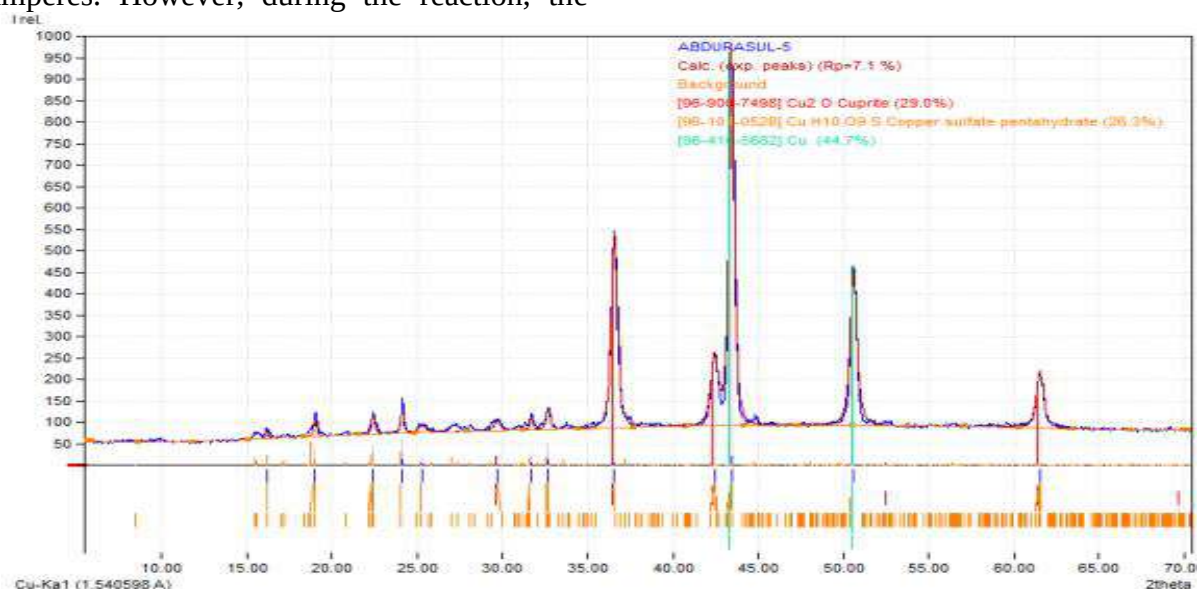


Figure 4. X-ray diffraction analysis of sample No.5

The crystalline size of the nanoparticles was estimated using Debby-Scherrer equation:

$$D = \frac{K\lambda}{\beta \cos \theta} \quad (1)$$

Where: **D** is the average crystallite size (in the same unit as λ , typically Angstroms or nm.). **K** is the Scherrer constant or shape

factor, often taken as 0.9 for spherical crystallites (values can range from 0.62 to 2.08 depending on shape and assumptions). λ is the wavelength of the X-ray radiation. β is the full width at half maximum (FWHM) of the diffraction peak in radians. θ is the Bragg angle (half of the 2θ value where the peak occurs).

To apply the equation, two prominent, relatively isolated peaks based on visual inspection of the plot were selected from Figure 4:

1. The strong peak at $\sim 43^\circ 2\theta$ (likely Cu (111)).

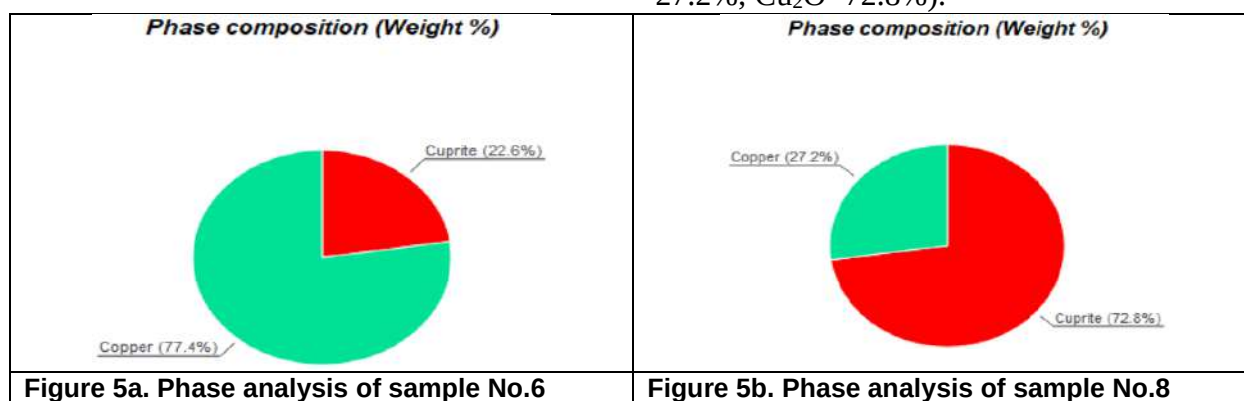
2. The peak at $\sim 36.5^\circ 2\theta$ (likely Cu_2O (111)).

Using these peaks, we applied Equation 1 to calculate the sizes of the nanoparticles, and the results are presented in the table.

Phase/Peak	2θ ($^\circ$)	θ ($^\circ$)	Estimated β ($^\circ$)	β (radians)	$\cos \theta$	Crystallite Size (nm)
Cu ($\sim 43^\circ$)	43	21.5	0.25	0.004363	0.9308	34.1
Cu_2O ($\sim 36.5^\circ$)	36.5	18.25	0.3	0.005236	0.9494	27.9

XRD analysis(Figure 4) confirmed the presence of 80.52% amorphous structures and 19.48% crystalline structures in the synthesized samples. The high percentage of amorphous structures is due to the process in cavitation bubbles; the formation of amorphous structures is described in detail in (23).

Phase analysis and XRD analysis were performed on the copper nanoparticle sample synthesized by **Method 2**. As can be seen from the diagram in Figure 5, sample No. 6 has a mixture of Cu- Cu_2O in percentage ratio (Cu - 77.4%; Cu_2O -22.6%) and sample No. 8 has a mixture of Cu- Cu_2O in percentage ratio (Cu - 27.2%; Cu_2O -72.8%).



Sample #8 has more Cu_2O -72.8 %. This is apparently due to voltage and ultrasound.

The XRD analysis(Figure 6) confirmed the presence of **81.88%** amorphous structures and **18.12%** crystalline structures in the synthesized samples.

The average sizes of the nanoparticles in Sample 6 calculated using Equation 1 range from 28 nm (for Cu_2O) to 35 nm (for Cu).

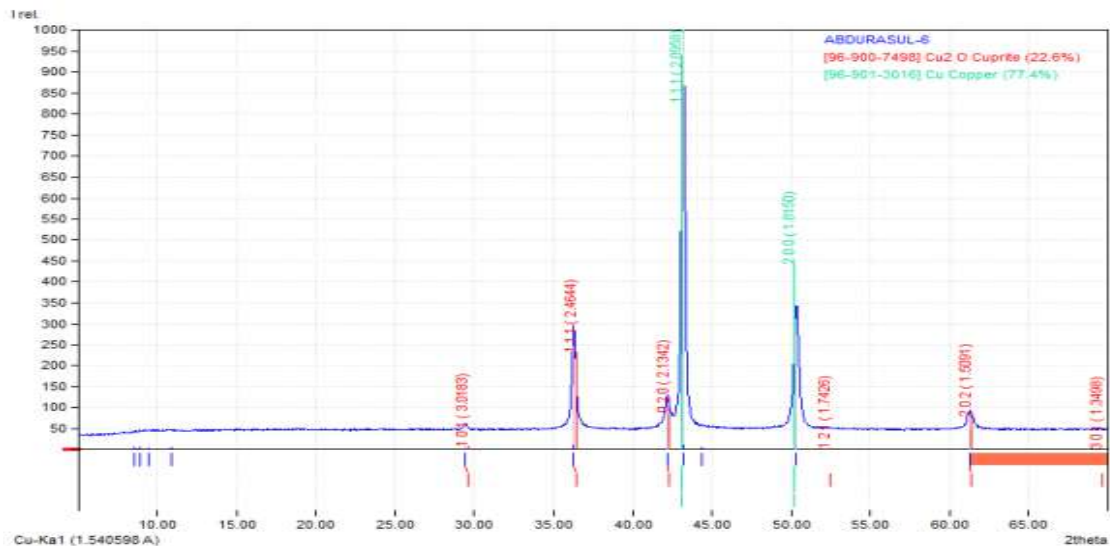


Figure 6. XRD analysis of sample No.6

XRD analysis(Figure 7) confirmed the presence of **79.70%** amorphous structures and

20.30% crystalline structures in the synthesized sample No.8.

Estimated sizes: Cu ~34 nm, Cu₂ O ~28 nm.

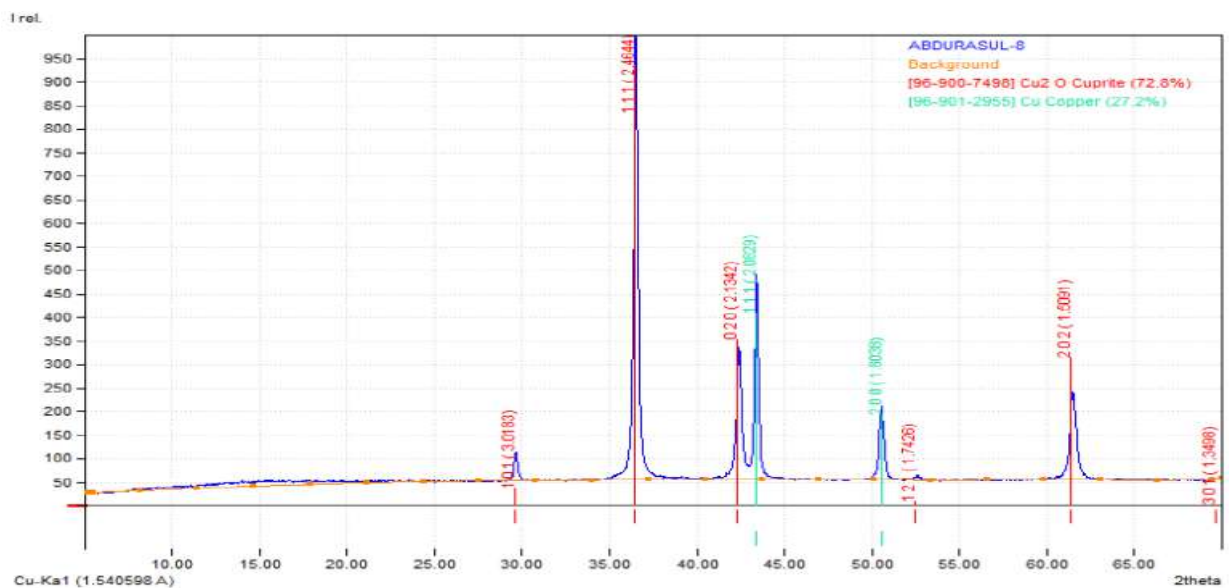


Figure 7. XRD analysis of No.8

XRD showed (Figure 8) that sample No. 13 synthesized by **Method 3** has a mixture of Cu-Cu₂O in the percentage ratio (Cu - 67.9%; Cu₂O - 32.1%).

XRD analysis confirmed **80.77%** of amorphous structures and **19.23%** of crystalline structures of the synthesized sample No. 13.

Estimated sizes: Cu₂ O ~28 nm, Cu ~34 nm.

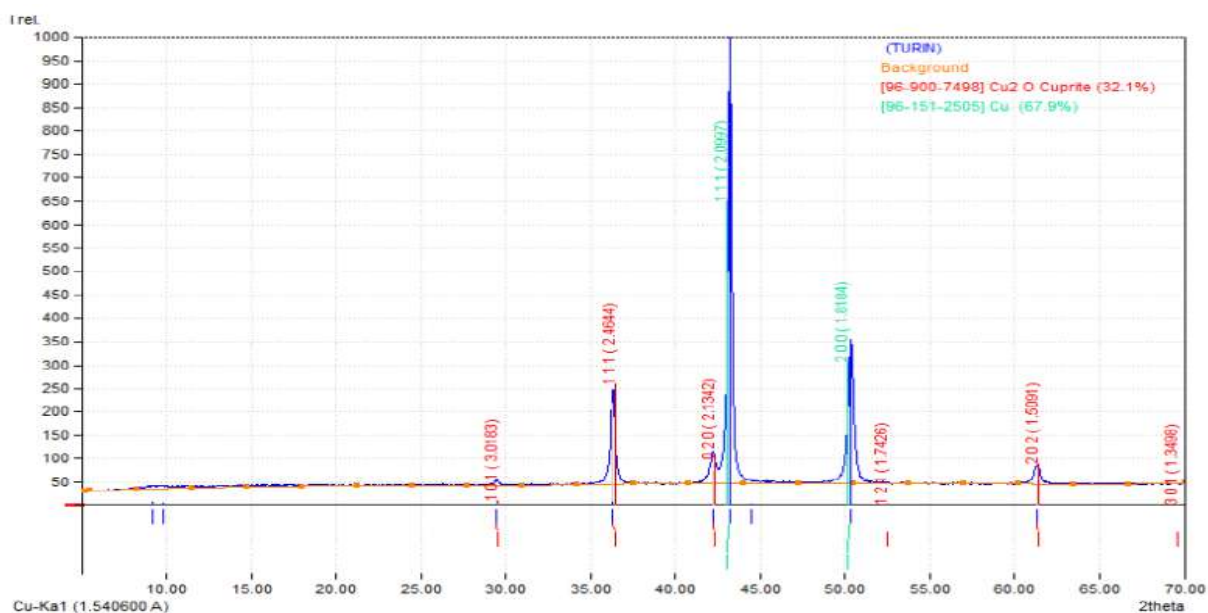


Figure 8. XRD analysis of sample No.13

SEM analysis was performed on sample No.13. The analysis result is shown in Figure 9. An SEM image (Figure 9) of copper nanoparticles shows a dense cluster of particles of varying

sizes and shapes. The nanoparticles are spherical. The nanoparticles also aggregate in some areas, forming larger clusters.

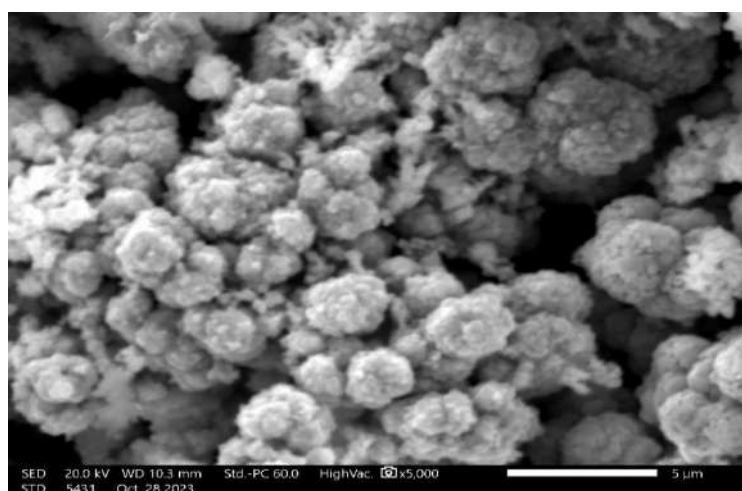


Figure 9. SEM analysis of sample No.13

The smallest nanoparticles are likely to be single particles, whereas larger clusters are likely to be aggregates of multiple particles.

The SEM image also shows that the copper nanoparticles are relatively well dispersed and contain only a few large aggregates. This suggests that the electrochemical method used to synthesize the

nanoparticles was effective in achieving a uniform dispersion of particles.

Method 4. XRD analysis showed that sample No. 14 has a mixture of Cu - Cu₂O in percentage ratio (Cu -52.5%; Cu₂O-47.5%).

SEM analysis of sample No. 14 is shown in Figure 10.

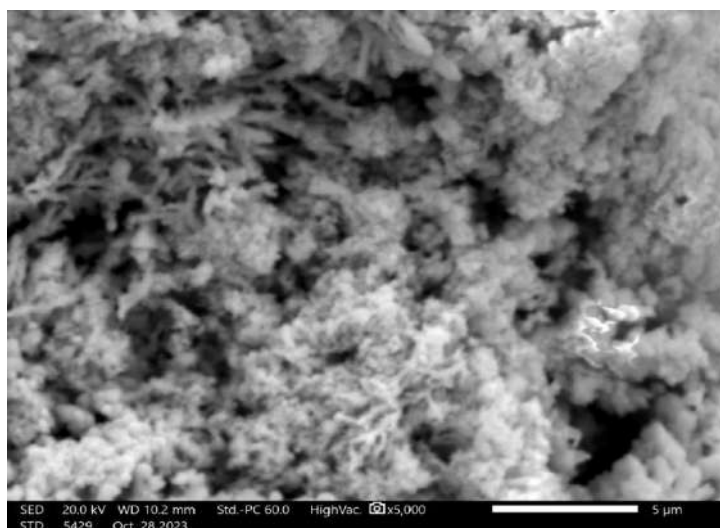


Figure 10. SEM analysis of sample No.14

The image (Figure 10) shows a network of interconnected copper structures rather than individual isolated nanoparticles. The structures appear dendritic or coral-like, suggesting that growth was rapid and possibly influenced by the direction of the electric field in the electrochemical setup.

The dendritic growth pattern seen here suggests that the particles are not only agglomerated but also grown in an interconnected manner. PVP, a stabilizer, may not have been effective in preventing this type of growth due to the strong influence of electrochemical conditions. This is typical of pure electrochemical deposition dominated by the electric-field direction and rapid ion reduction at the cathode, where the stabilizer (PVP) fails to suppress oriented attachment and overgrowth.

The difference between Methods 3 and 4. SEM analysis (Figures 9 and 10) reveals a significant difference between the methods. Method 3 produces spherical nanoparticles (Figure 9). Method 4 produces dendritic nanoparticles (Figure 10).

Conclusion. In this work, a new simple and inexpensive sonoelectrochemical method for producing amorphous nanoparticles ($\text{Cu}/\text{Cu}_2\text{O}$) was developed and tested. An unconventional electrode configuration (an inert Pt anode and an active Cu cathode) was proposed, allowing the powder product to be obtained directly in the bulk solution without the need for mechanical film removal. The use of ultrasound in combination with electrochemical reduction in

the presence of PVP ensured efficient desorption and dispersion of particles, preventing their agglomeration on the cathode.

X-ray diffraction analysis confirmed a high content of the amorphous phase (79.70–81.88%) in all synthesized samples, while maintaining 18–20% of the crystalline structure of Cu and Cu_2O . Varying the voltage from 15 to 30 V allows for targeted modification of the phase composition: at 21 V, metallic copper predominates (77.4%), while at 24 V, Cu_2O oxide predominates (72.8%). SEM studies showed that ultrasound ensures the formation of spherical, well-dispersed nanoparticles up to 20–30 nm in size, while without ultrasound, dendritic growth of the structures is observed.

Thus, the proposed sonoelectrochemical method is an efficient, scalable and controllable way to obtain amorphous nanomaterials. $\text{Cu}/\text{Cu}_2\text{O}$ with specified morphology and phase composition, which opens up broad prospects for their application in catalysis, energy and sensor technologies.

Literatures:

- [1]. H Karami, A Yaghoobi, A Ramezani (2010) *Int J Electrochem Sci* 5:1046–1059.
- [2]. T Gao, G Meng, Y Wang, S Sun, L Zhang (2002) *J Phys. Condens Matter* 14: 355–360.
- [3]. M Mazur (2004) *Electrochem Commun* 6(4): 400–403.
- [4]. XH Lu, WX Zhao, GR Li, H Hong, Y Tong (2008) *J Mater Lett* 62: 4280–4285.
- [5]. J Zhang, LB Kong, H Li, YC Luo, LK ang (2010) *J Mater Sci* 45: 1947–1954.
- [6]. IJ Shon, HJ Park, KS Nam, KT Lu (2008) *J Ceramic Process Res* 9: 325–329.

7. H Karami, M

- Alipour (2009) Int J Electrochem Sci 4: 1521–1527.
- [8]. H Karami, B Kafi, SN Mortazavi (2009) Int Electrochem Sci 4:414-424.
- [9]. H Karami, A Kaboli (2010). Int J Electrochem Sci 5:706-719.
- [10]. H Karami, E Mohammadzadeh (2010) Int J Electrochem Sci 5:1032–1045.
- [11]. H Karami, Ostadkalaych OR (2009) J Clust Sci 20: 587–600
- [12]. O. Lebedeva, Nanomaterials (Basel). 2021 Dec; 11(12): 3270. doi: [10.3390/nano11123270](https://doi.org/10.3390/nano11123270)
- [13]. V.V. Yanilkin, Russ. Chem. Rev., 2018, 87 (11) 1080 - 1110
- [14]. en.wikipedia.org/wiki/Electrodeposition
- [15]. Nakysbekov J. T. and etc. Bulletin of KazNITU . - 2016, No. 5, p. 586 .
- [16]. Chigirinets E.E., Roslik I.G., Vnukov A.A. // Bulletin of NTU "KhPI". -2009. - No. 21. - P. 15 - 20
- [17]. Zharebtsov D.A., and others. Series: Chemistry. 2015. No. 1. pp. 20-29 (production of copper nanopowders)
- [18]. L. Rodrigues - Sanchez, and others. J. Phys . Chem. B, 104, 9683 (2000)
- [19]. B. Yin , H. Ma , S. Wang , S. Chen . J. Phys. Chem. B, 107, 8898 (2003).
- [20]. S. M. Pourmortazavi and others, Syn. React. Inorg. Metal-Org. NanoMetal Chem. 42 (2012) 746-751.
- [21]. A. Tamilvanan , K. Balamurugan. Parameter optimization of copper nanoparticle synthesis by electrodeposition process using RSM and CS. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.02.801>
- [22]. Nakysbekov Zh.T. Synthesis of copper nanoparticles by various methods and radiation modification of their structures. Dissertation . competition degrees doctor philosophy. 2021,
- [23]. Aharon Gedanken,. Ultrasonics Sonochemistry 11 (2004) 47–55

Information about authors

- 1.Yarbekov Abdurasul Ergashevich - PhD in Technical Science, Associate professor. Turin Polytechnic University in Tashkent. a.yarbekov@polito.uz
- 2.Makhkamov Madaminjon Komilovich– PhD in Technical Science, Associate professor. Andijan State University, Vice-rector. mailuzbek@umail.uz

Бўйлама экситон нурлана оладиган геометрияда экситон-поляритон люминесценциясининг назарий ҳисоблаш

¹Ахмадалиев Б.Ж., ²Нематов Х.М.

Фарғона давлат техника университети

¹Физика кафедраси доценти, ²докторант.

Аннотация: Ушбу мақолада кристалл чегарасидан вакуумга s- ва p-поляризация билан нурлана оладиган геометрияда экситон-поляритон люминесценциясининг шаклланиш механизми назарий жиҳатдан кўриб чиқилган. Экситон сўнишининг чекли қийматларида поляритонларнинг Грин функциялари Келдишнинг диаграммалари техникаси ёрдамида ҳисобланган. Статик нуқсонлардаги эластик сочилиш ва бўйлама экситонларнинг электр майдони ҳамда кристалл кутбланиши билан ўзаро таъсири таҳлил қилинган. Шунингдек, Пекарнинг «ўлик қатлам» чегаравий шартлари ва Максвелл тенгламалари асосида амплитудавий ўтказиш коэффициентлари аниқланган. Натижада, s- ва p-поляризацияли нурланиш ҳолатлари учун интерференцион ҳиссалар ва когерент ҳолатдаги нурланиш интенсивликлари қиёсланиб, бўйлама экситонларнинг ташқи нурланишга қўшадиган ҳиссаси аниқланган.

Калит сўзлар: экситон-поляритон, бўйлама экситон, нурланиш интенсивлиги, Грин функцияси, Келдиш диаграмма техникаси, Пекар чегаравий шарт, интерференция, когерент нурланиш, амплитудавий ўтказиш коэффициенти.

Аннотация: В данной статье теоретически рассмотрен механизм формирования люминесценции экситон-поляритонов в геометрии, допускающей излучение из кристалла в вакуум s- и p-поляризованных мод. При конечных значениях затухания экситонов функции Грина поляритонов были рассчитаны с использованием диаграммной техники Келдыша. Проанализировано упругое рассеяние на статических дефектах и взаимодействие продольных экситонов с электрическим полем и поляризацией кристалла. Также на основе граничных условий Пекара («мёртвый слой») и уравнений Максвелла определены амплитудные коэффициенты пропускания. В результате были сопоставлены интерференционные вклады и интенсивности излучения в когерентном состоянии для s- и p-поляризованных мод, а также выявлен вклад продольных экситонов во внешнее излучение.

Ключевые слова: экситон-поляритон, продольный экситон, интенсивность излучения, функция Грина, диаграммная техника Келдыша, граничное условие Пекара, интерференция, когерентное излучение, амплитудный коэффициент пропускания.

Abstract: In this paper, the mechanism of exciton–polariton luminescence formation is theoretically investigated for a geometry that allows s- and p-polarized radiation from the crystal surface into vacuum. At finite exciton damping values, the Green's functions of polaritons were calculated using the Keldysh diagram technique. Elastic scattering on static defects and the interaction of longitudinal excitons with the electric field and crystal polarization were analyzed. Furthermore, the amplitude transmission coefficients were determined based on Pekar's "dead layer" boundary conditions and Maxwell's equations. As a result, the interference contributions and radiation intensities in coherent states for s- and p-polarized modes were compared, and the contribution of longitudinal excitons to external emission was identified.

Keywords: exciton–polariton, longitudinal exciton, radiation intensity, Green's function, Keldysh diagram technique, Pekar boundary condition, interference, coherent radiation, amplitude transmission coefficient.

Кристалл чегарасидан вакуумга s- ва p- поляризация билан нурлана оладиган геометрияда ЭПЛ нинг шаклланиш механизмини кўриб чиқамиз.

s-поляризацияда ЭПЛ нинг нурланиш интенсивлиги

$$I_s^{(0)}(\omega, \vec{n}) = I_{1s}^{(0)}(\omega, \vec{n}) + I_{2s}^{(0)}(\omega, \vec{n}) \quad (1)$$

бўлиб, $|Re(\vec{k}_\beta - \vec{k}_{\beta'})| \gg \alpha_\beta, \alpha_{\beta'} \quad (\beta, \beta' = 2, 3)$

шарт бажарилганда у интерференцион хадни ўз ичига олмайди. Кинетик яқинлашишда $I_{1s}^{(0)}(\lambda = s)$ парциал хад

$$I_{1\lambda}^{(0)}(\omega, \vec{n}) = \frac{k_0^2}{(2\pi)^3} \hbar \omega T_{01}^{(\lambda)} \cdot f_{1k\lambda}(\omega, z = +0)$$

формула билан аниқланади. Экситон сўнишининг чекли қийматларида $I_{2s}^{(0)}$ ни ҳисоблаш учун, яъни $Re k_2$ ва α_2 ўртасидаги ихтиёрий муносабатни ҳисобга олишда, Келдишнинг

диаграммалар техникасидан фойдаланамиз ва 2-тармоқ поляризацияси λ бўлган поляритонлар учун Грин функцияси $G_{2s}^{-+}(\vec{k}, \vec{k}'; \omega)$ ни ҳисоблаймиз. Бу ҳолда 1-тармоқ поляритонларининг берилаган тақсимланиш функциясидан фойдаланиб, 2-тармоқ ичидаги сочилишни ҳисобга олмаймиз [1;2;3].

1-расмда $G_{\beta\lambda}^{-+}(\vec{k}, \vec{k}'; \omega)$ функция учун диаграмма келтирилган (бунда $\beta=2$). Узлуксиз чизиклар кристалл нуқсонлари билан механик қўзғатувчиларнинг сочилиш ёки ушланиш жараёнлари билан аниқланадиган, экситон-фотон ва экситон-панжара ўзаро таъсири ҳисобига қайта нормалланган экситонларнинг Грин функцияларига мос келади:

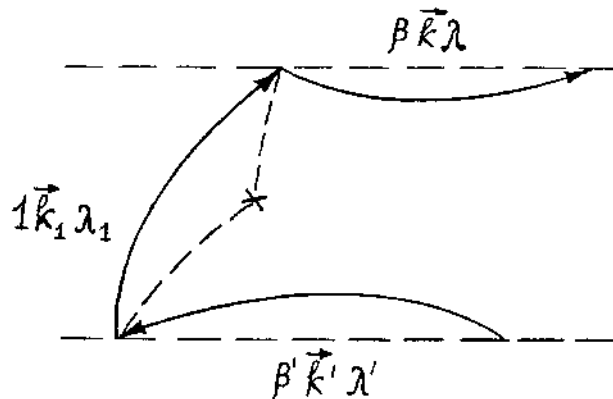
$$G_{\vec{k}\omega}^{--} = \left[\omega - \omega_{\vec{k}}^{(T)} + i\Gamma(\omega, \vec{k})/2 \right]^{-1}, \quad G_{\vec{k}\omega}^{++} = -(G_{\vec{k}\omega}^{--})^*, \quad (2)$$

$$G_{1\vec{k}\lambda\omega}^{-+}(z) = 2\pi f_{1\vec{k}\lambda}(z) \delta(\omega - \omega_{1\vec{k}}^{(T)}),$$

бунда $\Gamma(\omega, \vec{k})$ – поляритонларнинг сўниши.

$G_{\vec{k}\omega}^{--}$ ($G_{\vec{k}\omega}^{++}$) функциялар икки қутбни ифодалар йиғиндисига ажралади

$$G_{\vec{k}\omega}^{--} = \sum_{\beta=1,2} G_{\beta\vec{k}\omega}^{--}, \quad G_{\beta\vec{k}\omega}^{--} = (-1)^{\beta} \frac{2M}{\hbar} \frac{k_{\beta}^2 - \varepsilon_b k_0^2}{k_1^2 - k_2^2} \frac{1}{k^2 - k_{\beta}^2}. \quad (3)$$



1. расм. $G_{\beta\lambda}^{-+}(\vec{k}, \vec{k}'; \omega)$ Грин функцияси учун диаграмма, $\lambda = s$ учун индекс $\beta = \beta' = 2$, $\lambda = p$ учун эса $\beta = \beta' = 2,3$

$I_{2s}^{(0)}$ ни ҳисоблашда 1-расмдаги юқори ва пастки экситон чизиклар $G_{2\vec{k}\omega}^{--}$ ва $G_{2\vec{k}'\omega}^{++}$ функциялар билан таққосланади. Диаграммани фақат ташқи чизикларини $G_{1\vec{k}\omega}^{--}$ ва $G_{1\vec{k}'\omega}^{++}$ деб оламиз, яъни $1 \rightarrow 1$ сочилишини ҳисобга олиш шарт эмас, чунки $f_{1\vec{k}\lambda}(z)$ функция берилган деб ҳисобланган.

Диаграмма техникаси қоидаларидан фойдаланиб, қуйидагиларни оламиз

$$I_{2s}^{(0)}(\omega, \vec{\Omega}) = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{k_0^2}{(2\pi)^3} |t_{02}^{(s)}|^2 < |E_s^{(2)}(\vec{k}_{\perp}, \omega; z = +0)|^2 >, \quad (4)$$

$$< |E_s^{(2)}(\vec{k}_{\perp}, \omega; z)|^2 > = C \sum_{k_1\lambda_1} \sum_j \left| \sum_{k_z} \frac{G_{2\vec{k}\omega}^{--}}{n_2^2(\omega) - \varepsilon_b} \times \right. \\ \left. \times \exp[ik_z(z - z_j)] e_s^{(k_1\lambda_1)} \cdot V(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \right|^2 G_{1\vec{k}_1\lambda_1\omega}^{-+}(z). \quad (5)$$

Бу ерда $E_s^{(\beta)}(\vec{k}_{\perp}, \omega; z)$ - частотаси ω ва тўлқин векторининг қўндаланг ташкил этувчиси $\vec{k}_{\perp}$ бўлган ($\vec{k}_{\perp}$ яхши квант сони эканлигини унутманг) ёруғлик тўлқинининг амплитудаси, бу тўлқиннинг вакуумдаги тўлқин векторининг қўндаланг ташкил этувчиси $k_0\vec{\Omega}_{\perp}$ га тенг, $t_{0\beta}^{(s)}$ - амплитудавий ўтказиш коэффициенти, $n_{\beta} = k_{\beta}/k_0$ – β тўлқинлар учун синдириш кўрсаткичи,

$\vec{e}(\vec{k}_1\lambda_1)$ - қутбланиш вектори, $e_s(\vec{k}_1\lambda_1)$ - унинг X ўқдаги проекцияси, $Z_j - j$ - чи сочилиш марказининг координатаси, C - ўзгармас.

(5) ни (4) га қўйиб, j йиғиндини $\vec{r}_j$ бўйича $\sum_j \rightarrow N_i \int d\vec{r}_j$ интегралга алмаштириб ва уни k_z ва $\vec{k}_1$ устида бажариб қуйидагини оламиз

$$I_{2s}^{(o)}(\omega, \vec{\Omega}) = \frac{|t_{02}^{(s)}|^2}{(2\pi)^3} \frac{f_1(\omega)}{2k_0 \operatorname{Im} n_{2z} + L^{-1}} \frac{2M^2 c \varepsilon_b \omega_{LT} \cos \theta}{\hbar \tau_{21} |n_{2z}(n_1^2 - n_2^2)|^2}, \quad (6)$$

бунда $n_{2z} = (n_2^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}$, $t_{02}^{(s)}$ ва n_2 катталиклар $\Gamma = 1/2\tau_{21}$ сўнишни эътиборга олиб ҳисобланади.

Статик нуқсонларда эластик сочилиш

$$\frac{1}{\tau_{21}(\omega)} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \frac{2}{3} N_i \sum_{\vec{k}_1} |V(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)|^2 \cdot \delta(\omega - \omega_{1\vec{k}_1}^{(T)}), \quad (7)$$

Бунда N_i – дефектлар концентрацияси, $V(\vec{q})$ - қўзғатувчи потенциалнинг Фурье- ифодаси. Изотроп потенциал учун $V(\vec{q}) \equiv V(q)$. Эътибор беринг, $\omega_M \ll \omega_{LT}/\varepsilon_b$ бўлгани учун $k_2(\omega)$ катталик $k_1(\omega)$ дан жуда кичик ва биз (7) даги $V(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$ ни $V(\vec{k}_1)$ га алмаштиришимиз мумкин.

p-поляризацияда нурланиш ҳолатида умумий интенсивлик $I_p^{(0)}$ ни парциаль ҳиссалар $I_{2p}^{(0)}, I_{3p}^{(0)}$ ва интерференция компонентаси $I_{p23}^{(0)}$ орқали

$I_\lambda^{(0)}(\omega, \vec{\Omega}) = \sum_\beta I_{\beta\lambda}^{(0)}(\omega, \vec{\Omega})$ формуласи бўйича ҳисоблаймиз:

$$I_p^{(0)}(\omega, \theta) = \sum_{\beta=1,2,3} I_{\beta p}^{(0)}(\omega, \theta) + I_{p23}^{(0)}(\omega, \theta) \quad (8)$$

Бундан келиб чиққан ҳолда, Грина функциясини қўндаланг поляритонлар 2-тармоғи учун $G_{2p}^{++}(\vec{k}, \vec{k}'; \omega)$ ва бўйлама экситонлари учун $G_{3p}^{++}(\vec{k}, \vec{k}'; \omega)$ ни кўриб чиқамиз.

Бу функциялар учун диаграмма 1-расмда кўрсатилган, бунда $\lambda, \lambda' = p$ ва $\beta, \beta' = 2, 3$. Узликсиз чизик бўйлама экситон ҳолати учун Грин функциясини ифодалайди

$$G_{3k\omega}^{--} = \left[\omega - \omega_k^{(3)} + i\Gamma(\omega, \vec{k})/2 \right]^{-1} = -\frac{2M}{\hbar} \frac{1}{k^2 - k_3^2}, \quad (9)$$

бунда $\omega_k^{(3)}$ - (2.6) формула билан аниқланади, k_3 эса бўйлама экситонлар дисперсия тенгламасининг ечимидир

$$k_3 = n_3 k_0, n_3 = \left((\omega + i\frac{\Gamma}{2} - \omega_L) / \omega_M \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Мулоҳаза ва ҳисоблаш техникасидан фойдаланиб, **s**-поляризация учун қуйидаги натижаларни оламиз,

$$I_{\beta p}^{(0)}(\omega, \theta) = F_\beta \cdot \frac{|F_{\beta p}|^2}{2k_0 \operatorname{Im} n_{\beta z} + L^{-1}}, \beta = 2, 3, \quad (11)$$

$$I_{p23}^{(0)}(\omega, \theta) = 2 \operatorname{Re} \left[F_{23} \cdot \frac{F_{2p} F_{3p}^*}{-ik_0(n_{2z} - n_{3z}^*) + L^{-1}} \right], \quad (12)$$

$$\text{бунда, } F_\beta = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2M^2 c \varepsilon_b \omega_{LT} \cos \theta f_i(\omega)}{\hbar \tau_{\beta 1}}, F_{2p} = \frac{t_{02}^{(p)}}{n_{2z}(n_1^2 - n_2^2)}, F_{3p} = \frac{t_{03}^{(p)}}{n_{3z} \varepsilon_b}, \quad (13)$$

F_{23} эса F_β да $\tau_{\beta 1}$ ни $(\tau_{21} \cdot \tau_{31})^{1/2}$ га алмаштириш орқали олинади [2]. Бўйлама экситонлар учун электр майдон кучланганлиги ва кристалл қутбланишининг экситон улуши $4\pi \vec{P}_3 = -\varepsilon_b \vec{E}_3$ нисбат билан боғлиқлиги ҳисобга олинган. (12) ифодаси 2 ва 3 тармоқ тўлқинларининг **p**-поляризацияли ташқи нурланиш интенсивлигига қўшадиған интерференцион ҳиссасини тасвирлайди. Бу ҳисса 1-тармоқ поляритонларининг битта марказда сочилиб, когерент ҳолатда нурланувчи 2 ва 3 ҳолатларга ўтишидан келиб чиқади. Бунда $|\operatorname{Re} \vec{k}_\beta| \gg \alpha_\beta$, шарт билан бир қаторда $|\operatorname{Re}(\vec{k}_\beta - \vec{k}_{\beta'})| \gg \alpha_\beta, \alpha_{\beta'}$ ($\beta, \beta' = 2, 3$) тенгсизлиги ҳам бузилади.

Энди β тўлқинларни вакуумга $t_{0\beta}^{(p)}$ амплитудавий ўтказиш коэффициентларини ҳисоблаш қолади. Бунинг учун Максвеллнинг чегаравий шартлари билан бирга Пекарнинг «ўлик қатлам» қўшимча чегаравий шартларидан ҳам фойдаланамиз. $\mathbf{p}$ -кутбланиш билан кристалл ичидан унинг сиртига тушган 2 тўлқин учун $t_{02}^{(p)}$ ни аниқлаймиз

$$t_{02}^{(p)}(\theta) = \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 - \varepsilon_b} \frac{2n_{2z}/n_2}{(n_{0z} + \bar{n}_p) \cos \delta - i \sin \delta \cdot \left[\frac{\bar{n}_z}{\varepsilon_b} (1 + \bar{n}_{p1}) + \frac{n_{0z} \varepsilon_b}{\bar{n}_z} \cdot \bar{n}_{p2} \right]}, \quad (14)$$

бунда $\bar{n}_p = n_{0z} \bar{n}_{p1} + \bar{n}_{p2}, \bar{n}_{p2} = (n_{2z} + n_{1z} \cdot \bar{n}_{p1}) \cdot \varepsilon_b, n_{0z} = \cos \theta$, (15)

$$\bar{n}_{p1} = \frac{n_1^2 n_{2z} n_{3z} + n_{0x}^2}{n_2^2 n_{1z} n_{3z} + n_{0x}^2} \cdot \frac{\varepsilon_b - n_2^2}{n_1^2 - \varepsilon_b}, n_{\beta x} = n_{0x} = \sin \theta, \bar{n}_z = (\varepsilon_b - \sin^2 \theta)^{1/2}.$$

$t_{01}^{(p)}$ ўтказиш коэффициенти $t_{02}^{(p)}$ ни $n_1 \leftrightarrow n_2$ симметрик алмаштириш орқали аниқланади. Бўйлама экситонларнинг тўлқини кристалл ичидан унинг юзасига нормал тушган тақдирда, бўйлама тўлқиннинг ташқи ёруғлик нурланишига айланишини амплитудавий ўтказиш коэффициенти куйидаги шаклда аниқлаймиз [1;2]:

$$t_{03}^{(p)}(\theta) = \frac{2n_{0x}(n_{1z} - n_{2z})n_{3z}/n_3}{\sum_{\beta=1,2} (-1)^\beta \frac{n_\beta^2 - \varepsilon_\beta}{n_\beta^2} (n_{0x}^2 + n_{\beta z} n_{3z}) \cdot \left[\left(n_{0z} + \frac{n_{3-\beta,z}}{\varepsilon_b} \right) \cos \delta - i \sin \delta \left(\frac{\bar{n}_z}{\varepsilon_b} + \frac{n_{0z} n_{3-\beta,z}}{\bar{n}_z} \right) \right]}. \quad (16)$$

Тадқиқот натижаларига кўра, экситон-поляритон люминесценциясининг назарий тавсифи бўйлама экситонларнинг иштироки билан нурланиш жараёнларини аниқроқ тушуниш имконини бери. Грин функциялари ва диаграммалари ҳисоблашлар кўрсатадики, механик нуқсонлар ва статик дефектлар нурланиш интенсивлигига сезиларли таъсир кўрсатади. Бўйлама экситонлар когерент нурланишга қўшадиган интерференцион ҳисса орқали умумий люминесценция самарадорлигини оширади. Максвелл ва Пекар шартларини ҳисобга олиш экситонларнинг чегаравий ҳолатлардаги динамикасини яхшироқ моделлаштириш имконини беради. Ушбу натижалар поляритонли нурланишни самарали бошқариш ва янги турдаги оптоэлектрон қурилмаларни яратишда назарий асос бўлиб хизмат қилади.

Адабиётлар рўйхати

- [1]. Akhmadaliev B. Zh., Yuldashev N. Kh. Yulchiev I.I. Surface-Radiative Modes and Longitudinal Excitons in the Spectra of Exciton-Polariton Luminescence// Optics and Spectroscopy, -Moscow, 2018, Vol.125, No.3. P. 343–352.
- [2]. Ахмадалиев Б.Ж., Полвонов Б.З., Юлдашев Н.Х. Поверхностно-радиационные моды и продольные экситоны в спектрах низкотемпературной фотолюминесценции // Физическая инженерия поверхности. - Украина, 2010. - Т.8, №3, с.250-258.
- [3]. Юлдашев Н.Х. Экситон-поляритонная люминесценция и перенос резонансного излучения в кристаллах. – Фергана: Фарғона, 2002. – 214 С. Гл. II, III. С.37-80.

Vakuum-yoy razryadi va miltillama razryad orqali po'lat 45 sirtini tozalash jarayonlarining fazaviy va strukturaviy tahlili

UDK 57.022.023.577.11.12

B.R. Kaxramonov

Ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti

Annotatsiya. Ushbu ilmiy tadqiqotda 45-po'lat markali konstruksion po'lat sirtini vakuum-yoy razryadi va miltillama razryad usullari orqali tozalash jarayonlari kompleks ravishda o'rganildi. Tadqiqot davomida namuna sirti dastlab mexanik va kimyoviy ishlovdan o'tkazildi, so'ngra past bosimli vakuum muhitida plazmali ishlov berildi. Vakuum-yoy razryadi sharoitida katod dog'larining yuqori harorati (1000–5000°C) va yuqori energiyali ionlar ta'siri natijasida sirdagi oksid qatlamlar to'liq bartaraf etildi. Miltillama razryadda esa ion bombardimoni orqali qisman tozalanish kuzatildi. DIGI-MICROSCOPE ($\times 1000$) yordamida olingan mikrostrukturaviy tahlillar sirt morfologiyasidagi o'zgarishlarni aniq ko'rsatdi. XRD fazaviy tahlil natijalari ishlov berilmagan sirda FeO, FeO₂, Fe₂O₃, Fe₃O₄ va α -Fe fazalari mavjudligini ko'rsatdi. Miltillama razryaddan so'ng oksid fazalar soni kamaygan bo'lsa-da, to'liq yo'qolmagan. Vakuum-yoy razryadida esa faqat α -Fe fazasi cho'qqilari qayd etildi, bu sirtning 100% tozalanligini tasdiqlaydi.

Kalit so'zlar: Vakuum-yoy razryadi, miltillama razryad, katod dog'i, ion bombardimoni, XRD tahlil, fazaviy tahlil, α -Fe fazasi, temir oksidlari, oksid qatlam, mikroqattqlik.

Аннотация. В данной научной работе комплексно исследованы процессы очистки поверхности конструкционной стали марки 45 с использованием методов вакуумно-дугового разряда и тлеющего разряда. В ходе исследования поверхность образцов предварительно подвергалась механической и химической обработке, после чего осуществлялась плазменная обработка в условиях пониженного давления вакуума. В условиях вакуумно-дугового разряда под воздействием высокой температуры катодных пятен (1000–5000 °C) и высокоэнергетических ионов оксидные слои на поверхности были полностью удалены. При тлеющем разряде наблюдалась частичная очистка за счёт ионной бомбардировки. Микроструктурный анализ, выполненный с использованием DIGI-MICROSCOPE ($\times 1000$), наглядно продемонстрировал изменения морфологии поверхности. Результаты фазового анализа методом рентгеновской дифракции (XRD) показали наличие на необработанной поверхности фаз FeO, FeO₂, Fe₂O₃, Fe₃O₄ и α -Fe. После обработки тлеющим разрядом количество оксидных фаз уменьшилось, однако их полное удаление не произошло. В случае вакуумно-дугового разряда были зафиксированы только пики фазы α -Fe, что подтверждает 100% очистку поверхности.

Ключевые слова: вакуумно-дуговой разряд, тлеющий разряд, катодное пятно, ионная бомбардировка, анализ XRD, фазовый анализ, фаза α -Fe, оксиды железа, оксидный слой, микротвёрдость.

I.Kirish.

Metall sirtlarini tozalash sanoatda qoplama qoplash, korroziyadan himoya va mexanik xususiyatlarni yaxshilashda muhim ahamiyatga ega. Ayniqsa, 45-po'lat kabi konstruksion materiallarda sirt holati ekspluatatsion xususiyatlarni belgilab beradi. Vakuum-yoy razryadi va miltillama razryad usullari plazmali tozalashning keng qo'llaniladigan usullaridir. Metall sirtlarini tozalash sanoatda qoplama qoplash, korroziyadan himoya va mexanik xususiyatlarni yaxshilashda muhim ahamiyatga ega. Biroq, vakuum-yoy jarayonlarida ishlov berish samaradorligi ko'plab texnologik parametrlar-vakuum darajasi, tok zichligi, katod materiali, ishlov berish vaqti va oldindan sirtni tayyorlash bosqichiga bog'liq. Ayniqsa,

gaz ishlatilmagan sharoitdagi vakuum-yoy razryadi sharoitida sirtni faollashtirish va tozalash jarayonlarining fizik mexanizmlari yetarlicha tizimli o'rganilmagan. Shundan kelib chiqib- gaz ishlatilmagan vakuum-yoy razryadi sharoitida va miltillama razryad yordamida oldindan tozаланган po'lat 45 namunalarining sirt qatlamida yuz beradigan strukturaviy va fazaviy o'zgarishlarni aniqlash hamda texnologik parametrlarning ta'sirini baholashdan iborat.

So'nggi yillarda vakuum-yoy razryadi asosidagi ion-plazmali ishlov berish jarayonlari metall sirtini modifikatsiyalashning samarali usullaridan biri sifatida keng tadqiq etilmoqda. Tadqiqotlarda ko'rsatilishicha, katod dog'lari dinamikasi va ion energiyasi sirt qatlamining morfologiyasi hamda mexanik xossalari sezilarli ta'sir ko'rsatadi [1]. Vakuum-yoy

jarayonida ionlarning yuqori energiyali oqimi sirt qatlamida lokal qizish va tez sovish jarayonlarini yuzaga keltiradi hamda qayta kristallanish hodisalarini keltirib chiqaradi [2]. Gaz muhiti sharoitida vakuum-yoy razryadi orqali namuna sirtini ishlov berish jarayonlari katod dog'lari hosil qiladigan yuqori haroratli mikrozonalar va yuqori energiyali ion oqimining sirt qatlamidagi oksid qatlamni intensiv bug'lanish va purkash mexanizmlari orqali yo'q qilishi bilan tavsiflanadi [3]. Shuningdek, gaz bosimi va tok zichligi parametrlarining o'zgarishi sirtning faollashuv darajasini sezilarli oshirishga olib keladi. Vakuum-yoy razryadi sirtni qoplama qoplashdan oldin faollashtirish uchun samarali plazmali usul sifatida namoyon bo'ladi [4]. Miltillama razryad yordamida metall sirtini oldindan tozalash masalasi ham keng yoritilgan. Tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, past bosimli miltillama razryad sharoitida ion va aktiv radikallar oksid va organik iflosliklarni samarali parchalab, sirtning adgeziya qobiliyatini oshiradi [5]. Tozalanagan va tozalanmagan namunalarning yuzasi DIGI-MICROSCOPE yordamida tahlil qilindi (mikroskopning $\times 1000$ kattalashtirishida). Ushbu ishda ushbu ikki usulning samaradorligi kompleks tahlil qilindi.

II. Tadqiqot metodologiyasi.

Metall sirtini miltillama razryad ionlari yordamida tozalash va baholash jarayoni. Metall sirtini miltillama razryad plazmasi ionlari bilan tozalash jarayoni sirtni manfiy potensial ostida ion bombardimon qilish asosida amalga oshiriladi. Ushbu usul sirtidagi yot moddalar, adsorbsiyalangan gazlar va oksid qatlamlarni samarali ravishda bartaraf etib, metall yuzaning faolligini oshiradi hamda qoplama bilan adgeziyasini yaxshilaydi. Natijada yuqori qattiqlikka va korroziyaga chidamli qoplamalarni hosil qilish uchun qulay sharoit yaratiladi.

Jarayon vakuum muhitida amalga oshirilib, ishchi gaz sifatida odatda argon (Ar) yoki azot (N_2) qo'llaniladi. Biz bu tadqiqotimizda argon (Ar) gazidan foydalanganmiz. Kameradagi ishchi bosim odatda ($1 \times 10^{-1} - 5 \times 10^{-1}$) Pa diapazonida saqlanadi. Bosimning tanlanishi plazmaning

barqarorligi va ion energiyasiga bevosita ta'sir ko'rsatadi. Past bosimda ionlar energiyasi yuqori bo'lib, sirtini samarali tozalash ta'minlanadi, biroq razryad barqarorligi talab darajasida saqlanishi lozim. Miltillama razryad elektrod tizimi orqali hosil qilinadi. Namuna katod sifatida ulanib, unga manfiy potensial beriladi. Razryad kuchlanishi odatda 250–1000 V diapazonida, razryad toki esa 0,2–1,5 A oralig'ida tanlanadi. Tok zichligi taxminan 1–5 mA/sm² ni tashkil etadi. Mazkur parametrlar ionlar energiyasini va bombardimon intensivligini belgilaydi.

Elektr maydoni ta'sirida ionlashgan gaz ionlari namuna yuzasiga yo'naltiriladi va uni yuqori energiya bilan bombardimon qiladi. Ionlar ta'sirida sirt qatlamidagi oksidlar va iflosliklar fizik purkash mexanizmi orqali yo'q qilinadi. Miltillama razryad usulida [6] kuchlanish va tok parametrlariga bog'liq holda sirt tozalanishi 60–80% gacha yetishini aniqlagan. Tadqiqotda ion energiyasi past bo'lgan sharoitda oksid qatlamning faqat qisman bartaraf etilishi qayd etilgan. Shuningdek, miltillama razryadni qoplama yotqizishdan oldin faollashtirish bosqichi sifatida qo'llanilishi tavsiya etilgan.

Miltillama razryad usulida namuna sirtini tozalash jarayoni davomiyligi odatda 10–12 minutni tashkil etadi va u material turi hamda boshlang'ich sirt holatiga bog'liq holda tanlanadi. Jarayon yakunlangach, elektr ta'minoti uziladi, namuna vakuum muhitida sovitiladi va so'ng kamera bosimi normal holatga keltirilib, namuna chiqarib olinadi.

Shunday qilib, miltillama razryad plazmasi ionlari bilan tozalash metall sirtini chuqur faollashtirish, uning mikro tuzilishini yaxshilash va qoplamalar adgeziyasini oshirishda muhim texnologik bosqich hisoblanadi. Buni miltillama razryad plazmasi orqali mahsulot sirtini tozalash samaradorligini eksperimental tadqiq qilgan [7] hamda ion bombardimoni ta'sirida sirt mikroqatlamining aktivlashishi va qoplama adgeziyasining ortishi qayd etilgan.

Yoy razryadi tokining tozalash parametrlariga ta'siri. Metall buyum (quvur) yuzasidan yot materialni olib tashlash katod dog'lari yordamida amalga oshiriladi va katod dog'larining soni yoy oqimining ortishi bilan

ortib boradi. Bu tadqiqot [8] vakuum-yoy razryadi katod dog'larining metall sirti bilan o'zaro ta'sirini tajribaviy o'rgangan. Ularning natijalariga ko'ra, tok ortishi bilan katod dog'lari soni va ularning harakat intensivligi ortib, sirtning purkash tezligi oshadi[9]. Shuningdek, 150–220 A tok diapazonida sirt aktivlashuvi maksimal darajaga yetishini va oksid qatlamning sezilarli kamayishini qayd etgan. Katod dog'larining harakat dinamikasi sirt notekisligiga va tozalash maydoniga to'g'ridan to'g'ri ta'sir qilishi aniqlangan. Bunday holda katod dog'larining ta'sir ko'rsatadigan sirtini quyidagi formula bilan aniqlanishi mumkin:

$$S = nvd, \quad (1)$$

bu yerda: n-katod dog'larining soni, v-ularning tezligi, d-katod dog'ining diametri. Vakuum tizim parametrlarini hisoblashda katod dog'lari ta'sir maydoni va tozalash samaradorligini matematik modellashgan[10].

Bir katod dog'iga taxminan 10-30A tok to'g'ri keldi va $8 \cdot 10^{-2}$ Pa bosimda katod dog'lari tomonidan tozalanadigan sirtidagi katod dog'i 0,5-1,0 mm ni tashkil qiladi. Shu vaqtda sirtida hosil bo'lgan katod dog'larining tezligi 10^2 - 10^3 sm/s gacha etadi. Bu keltirilgan qiymatlarni yoy razryadining yashash vaqti va bosib o'tgan o'rtacha masofasini bilgan holda yuqoridagi 1-formulaga qo'yganda, tozalash sirt maydoni 100-200 sm²/s ga teng bo'ladi. Bundan ko'rinib turibdiki ish samaradorligi

ancha yuqori hisoblanadi, chunki haqiqiy holatda katod dog'lari bir necha marta bir xil joydan o'tadi va ularning tezligi o'zgaruvchan bo'lishiga sabab moddaning qalinligiga va sirtning toza emasligiga bog'liq.

Ion bombardimoni natijasida sirtning mikroqatlami tozalanadi, strukturasi zichlashadi va koplama yotish uchun optimal energiya shakllanadi. Vakuum-yoy plazmasida bombardimon zarrachalar energiyasini boshqarish uchun sirt modifikatsiyasini tadqiq qilish[11]. Ion energiyasi 1–3 keV diapazonda nazorat ostida purkash samaradorligi va sirt zichligi sezilarli ortini saqlab qolgan. Ularning xulosasiga, ion energiyasini boshqarish sirt mikrostrukturasi o'zgartirish va oksidlanish kuchayishini oshirish samaradorligini oshirishda halokatli natija beradi. Razryad toki, kuchlanish va ishchi bo'simim parametrlarining optimal tanlanishi natijasida samaradorligini ta'minlovchi asosiy omillardan birlashtiriladi.

III. Natijalar va muhokama.

Miltillama razryad usuli metall sirtini tozalashda sirtligini tozalash quvvatlanishiga bog'liqligi 1-jadvalda saqlangan. Bu usulda sirt tozaligi maksimal 80-85 foizga borar ekan. 1-jadvalda ko'rsatilganidek, kuchlanishning oshishi bilan sirt tozaligi sezilarli darajada yaxshilangan. 250 V da tozalash samaradorligi past bo'lsa, 1000 V da ion bombardimoni intensivligi ortib, oksid qatlamlarining parchalanishi tezlashgan.

1-jadval.

Miltillama razryadi yordamida metall yuzalarni tozalash.

№	1	2	3	4	5	6	7
Kuchlanish, V	250	350	500	600	750	900	1000
Yuzani tozalash, %	30-35	40-45	45-55	55-60	60-70	70-80	80-85

Yuqori energiyali ionlar metall sirtiga yetib borganda adsorbsiyalangan molekullarni desorbsiyalaydi hamda yuzaki oksidlarni yo'q qiladi. Natijada, maksimal tozalash samaradorligi 80–85% ga yetadi, energiya zichligi vakuum-yoy razryadiga nisbatan pastligi bilan izohlanadi va bu natijalar keyin keltiriladigan XRD natijalari bilan tasdiqlandi.

Oksidlangan plyonkaning zichligi va qatlam qalinligi yuqori bo'lganda tozalash

uchun yuqori tok oqimi talab qilinadi. 45 po'latining sirtini tozalash bo'yicha ma'lumotlar vakuum yoy tokining qiymatlari bo'yicha foizlarda 2-jadvalda keltirilgan. 2-jadval ma'lumotlariga ko'ra, tok kuchining 80 A dan 200 A gacha oshirilishi sirt qatlamida sezilarli strukturaviy o'zgarishlarga olib kelgan. Tok ortishi bilan-katod dog'lari soni oshgan, ion oqim zichligi ko'paygan va lokal qizish jarayonlari kuchaygan.

2-jadval.

Vakuum-yoy razryadi yordamida metall yuzalarni tozalash.

№	1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---	---

Tok kuchi, A	80	100	120	135	170	190	200
Yuzani tozalash %.	50-60	70-80	80-85	85-90	90-94	94-97	100

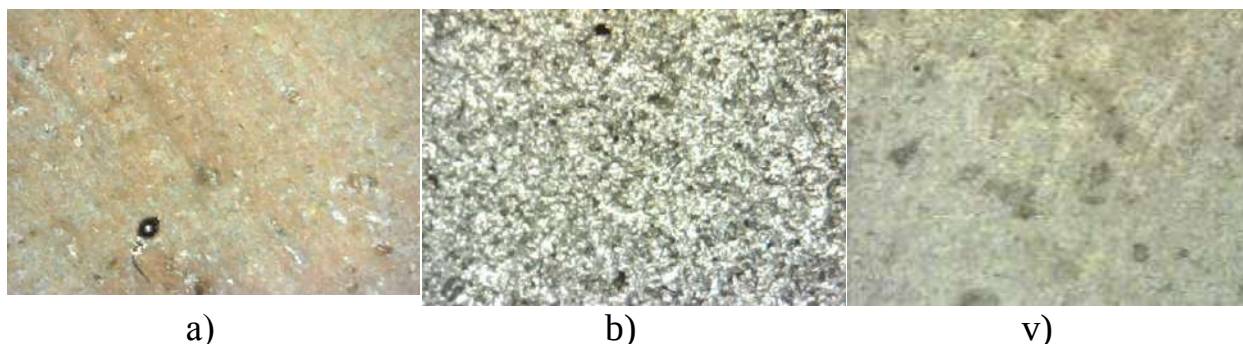
Vakuum yoy razryadi natijasidagi katod dog'lari harakat trayektoriyasi va tok parametrlari orqali sirt notekisligini boshqarish mumkinligini eksperimental tasdiqlagan[12] va shu tadqiqotda katod dog'lari lokal mikrokraterlar hosil qilishi, ammo umumiy sirt strukturasini buzmasligi ko'rsatilgan.

Katod dog'lari ta'sirida organik va oksidli ifloslanishlar intensiv destruksiya uchrashini ko'rsatgan[13] va plazma parametrlari yetarli darajada bo'lmaganda sirtida ayrim qatlamlar saqlanib qolishi mumkin.

Buni tekshirishi maqsadida metall namuna sifatida sanoatda ko'p ishlatiladigan 45-po'lat markasi tanlandi va namuna yuzasi dastlabki mexanik va kimyoviy ishlov berishdan o'tkazildi. Dastlabki ishlov berishdan

so'ng namuna vakuum kamerasiga joylashtirildi. Vakuum kamerasida 10^{-3} - 10^{-4} Pa vakuumga erishilgandan so'ng, namunalarni 10-12 minut davomida vakuum-yoy razryadi bilan ishlov berildi, razryad toki 80-200 A ni tashkil qildi. Har bir razryad rejimida kamida 3 ta namuna ishlov berildi. Olingan XRD va mikrostrukturaviy natijalar takrorlanuvchan bo'lib, fazaviy cho'qqilar intensivligidagi farq $\pm 3\%$ dan oshmadi. Bu natijalar eksperimental jarayonning barqarorligini tasdiqlaydi.

Xuddi shunday tartibda 45-po'lat namunalari mexanik va kimyoviy ishlovdan so'ng ionlar ta'siridagi miltillama razryad bilan tozalandi. Miltillama razryad bilan ishlov berish jarayonining davomiyligi 10-12 minutni tashkil qildi, razryad toki 2-50 mA, kuchlanish 250-1000V bo'ldi.



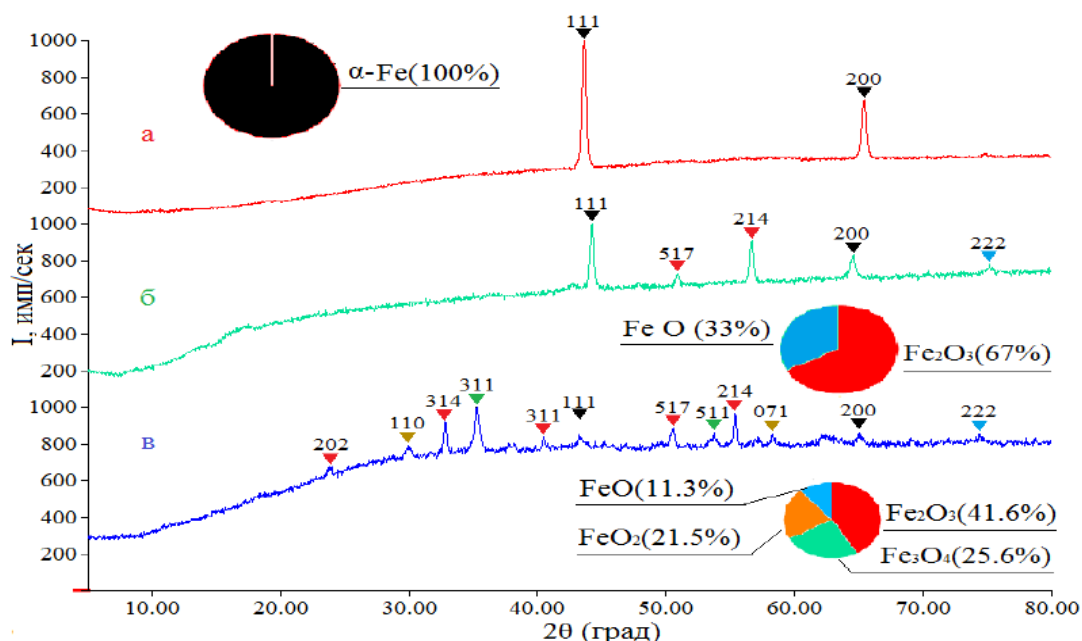
1-rasm. Po'lat-45 namunasi sirtining ishlov berishdan oldin (a) va ishlov berilgandan keyini ko'rinishi: b) Vakuum-yoy razryadi usulida tozalangan hamda v) miltillama razryad usulida tozalangan namunalar tasviri.

1 a -rasmida metall yuzaning ishlov berilmagan ko'rinishi, 1 b,v -rasmida ikkala usul bilan tozalash jarayonidan keyingi yuzaning ko'rinishi.

Vakuum-yoy razryadi usulida (1b-rasm) va miltillama razryad bilan tozalangandan so'ng (1v-rasm) namunalari sirtining rasmlari keltirilgan. Tasvirlarni (a, b, v) solishtirishdan ma'lum bo'ldiki, vakuum-yoy razryadining katod dog'lari bilan ishlov berish miltillama razryad ionlari bilan ishlov berishdan ko'ra samaraliroq va tozalangan sirtida boshqa yot moddalar uchramaydi.

2-rasmida XRD fazaviy tahlilida po'lat 45 markasining ishlov berilmagan(v) sirtida 12 ta asosiy, miltillama razryad bilan tozalangan

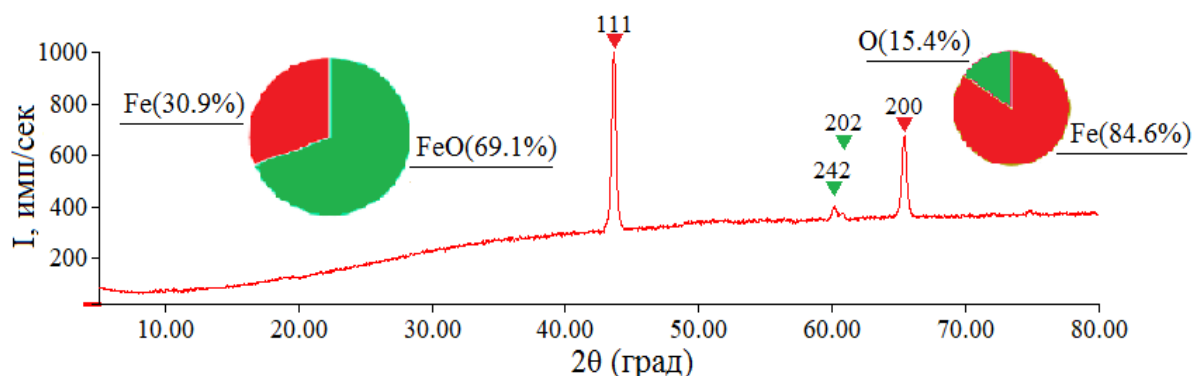
(b) sirtida 5 ta asosiy va vakuum yoy razryadi(a) usulida tozalangan sirtida 2ta asosiy cho'qqilar chiqqan. Ishlov berilmagan sirtida 74.44 2 θ burchakda 222 FeO, 29.97 va 58.3 2 θ burchaklarda 110, 071 FeO₂, 23.85, 32.86, 40.53, 50.51 va 55.30 2 θ burchaklarda 202, 314, 311, 517, 214 Fe₂O₃, 35.31 va 53.71 2 θ burchaklarda 311, 511 Fe₃O₄ oksidlarining hamda 43.31 va 65.00 2 θ burchaklarda 111, 200 α -Fe ning miller indekslariga to'g'ri kelgan cho'qqilari chiqqan. Miltillama razryad bilan tozalangan sirtida 75.12 2 θ burchakda 222 FeO, 50.93 va 56.66 2 θ burchaklarda 517, 214 Fe₂O₃ oksidlarining hamda 44.24 va 64.53 2 θ burchaklarda 111, 200 α -Fe ning miller indekslariga to'g'ri kelgan cho'qqilari chiqqan.



2-rasm. XRD fazaviy tahlilida po'lat 45 markasining ishlov berilmagan(v) sirti, miltillama razryad bilan tozalangan (b) sirti va vakuum yoy razryadi(a) usulida tozalangan sirti.

Miltillama razryad bilan tozalangan sirtida 75.12° 2θ burchakda 222 FeO, 50.93° va 56.66° 2θ burchaklarda 517, 214 Fe₂O₃ oksidlarining hamda 44.24° va 64.53° 2θ burchaklarda 111, 200 α -Fe ning miller indekslariga to'g'ri kelgan cho'qqilari chiqqan. Vakuum yoy razryadi bilan tozalangan sirtida 44.7° va 65.1° 2θ burchaklarda 111, 200 α -Fe ning miller indekslariga to'g'ri kelgan cho'qqilari chiqqan. Bu ma'lumotlarni taxlil qilsak miltillama razryad bilan sirtini tozalaganimizda sirtidagi temir oksidlari cho'qqilar soni kamayganligini va temirning α -Fe fazasining cho'qqilari intensivligi oshganligini ko'rsatdi. Vakuum yoy razryadi bilan sirtini tozalaganimizda esa temir oksidlari cho'qqilari yo'qolganini va temirning α -Fe

fazasining cho'qqilari intensivligi oshganligini ko'rsatdi. Tadqiqotda ikki bosqichli ion-plazmali vakuum-yoy razryadi orqali ishlov berilgan po'latlarda nitridlangan qatlam strukturasi o'rgangan[14]. Mualliflar XRD tahlil orqali plazmali ishlovdan so'ng oksid fazalar intensivligining kamayishi va metall fazalar ustunligi ortishini qayd etgan. Tadqiqot natijalari plazmali vakuum-yoy ishlovi sirtning fazaviy tarkibini metall holatiga yaqinlashtirishini ko'rsatadi. Xulosa qilib shuni aytamizki, vakuum yoy razryadi bilan sirtini tozalaganimizda sirt 100% tozalanganligini va miltillama razryad bilan tozalanganda esa oksid qatlam borligini hamda vakuum yoy razryadi sirtini tozalash, oksid qatlamni olib tashlashda samarali usul ekanligi aniqlandi.



3-rasm. XRD fazaviy tahlili. Po'lat 45 markasining vakuum yoy razryadi usulida tozalangan sirti.

3-rasmda esa vakuum yoy razryadi usulida po'lat 45 markasini tozalangan sirti XRD fazaviy tahlili keltirilgan. Fazaviy tahlil shuni ko'rsatdiki, yoy razryadi bilan tozalangandan so'ng vakuum kameradan sovimagan namunani olganimizda yuzada oksid qatlam hosil bo'lib qolar ekan. XRD fazaviy tahlil natijalari miltillama razryaddan so'ng oksid fazalar soni kamaygan bo'lsa-da, ular to'liq yo'qolmaganligini ko'rsatdi.

Tozalash jarayonining ikki xil jihatini ta'kidlash muhimdir. Vakuum-yoy razryadi bilan tozalash jarayoni katod dog'lari ta'sir qiluvchi joyda katod materialining portlashli razryad natijasida amalga oshiriladi, bu plazma muhitini hosil qiladi. Bunda katod dog'i ta'sirida hosil bo'lgan neytral atomlar elektronlar emissiyasi natijasida hosil bo'lgan elektronlar tomonidan ionlashtiriladi va hosil bo'lgan ionlar namuna materialning yuzasini (katod) bombardimon qiladi. Ion bombardimoni natijasida katod materiali, ya'ni namunaning yuzasi tozalanadi. Katodda hosil bo'lgan ionlar oqimi zichligi va katod potensialining pasayishi sohasidagi elektr maydon kuchlanganligi (2) quyidagi formula orqali aniqlanadi [15]:

$$j_i = aE^2 e^{\frac{b\varphi^2}{E}} \quad (2)$$

bu yerda J -emissiya toki zichligi, E -elektr maydon kuchlanganligi, φ -chiqish ishi, a va b funksiyalar doimiy geometriya tuzatma hisoblanadi va chiqish ishiga bog'liq. Katod yuzasidan bir necha nanometr masofada hajmiy zaryadi hosil bo'lishi natijasida elektr maydon kuchlanganligi ortadi. Katod yaqinidagi elektr maydon kuchlanganligi va ion tok zichligi formulalar orqali hisoblandi:

$$E^2 = 7,54 * 10^5 \sqrt{U_c} \left[\sqrt{\left(\frac{m_i}{m_e}\right)} j_i - j_e \right] \quad (3)$$

Namuna sirtida elektr maydon kuchlanganligi 10^7 - 10^9 V/sm va tok zichligi 10^6 A/sm² bo'ladi [16]. Hisoblash natijalariga ko'ra, katod yaqinida elektr maydon kuchlanganligi 10^7 - 10^8 V/sm tartibida bo'lib, bu ionlarning bir necha keV energiya bilan sirtga yetib kelishini ta'minlaydi. Ushbu yuqori energiyali ion

bombardimoni oksid qatlamning intensiv purkash orqali bartaraf etilishini ta'minlaydi.

IV. Xulosa va takliflar.

Ushbu tadqiqot natijalari 45-po'lat sirtini plazmali usullar orqali tozalash jarayonlari samaradorligini kompleks ravishda baholash imkonini berdi. Olingan eksperimental ma'lumotlar vakuum-yoy razryadi miltillama razryadga nisbatan yuqori tozalash samaradorligiga ega ekanligini aniq ko'rsatdi.

Vakuum-yoy razryadi 80–200 A tok diapazonida va 10^{-3} – 10^{-4} Pa vakuum sharoitida amalga oshirilganda katod dog'ining yuqori harorati hamda yuqori tok zichligi ta'sirida sirt intensiv ion bombardimoniga uchradi. Vakuum-yoy razryadi sharoitida katod dog'ining yuqori harorati va yuqori energiyali ion bombardimoni ta'sirida sirtidagi temir oksidlari (FeO , Fe_2O_3 , Fe_3O_4) to'liq bartaraf etildi va faqat α -Fe fazasi ustunligi kuzatildi. Bu esa sirtning to'liq metall holatiga o'tganligini tasdiqlaydi. 200–220 A tok qiymatlarida sirtning 100% tozalanishi kuzatildi. Bu holat sirtning metall holatiga o'tganligini va uning yuqori aktivlashganligini tasdiqlaydi.

Miltillama razryad usuli 200–1500 V kuchlanish va 2–50 mA tok oralig'ida bajarilganda ion bombardimoni ta'sirida oksid qatlam qisman kamaydi. Biroq XRD natijalarida oksid fazalarning qoldiq cho'qqilari saqlanib qolganligi aniqlandi. Miltillama razryadda maksimal tozalash samaradorligi 80–85% atrofida bo'lib, bu uning energiya zichligi vakuum-yoy razryadiga nisbatan past ekanligi bilan izohlanadi.

Katod yaqinida hosil bo'ladigan yuqori elektr maydon kuchlanganligi (10^7 – 10^9 V/sm) va tok zichligi ta'sirida sirt yaqinida fazaviy hamda strukturaviy o'zgarishlar yuz berdi. Ayrim holatlarda martensit va austenit qatlamlarining shakllanishi kuzatildi, bu esa sirtning mexanik xususiyatlariga ijobiy ta'sir ko'rsatishi mumkin.

Tahlillar shuni ko'rsatdiki, vakuum-yoy razryadi sirtni chuqur tozalash, oksid qatlamni bartaraf etish va keyingi qoplama yotqizish jarayonlari uchun yuqori adgezion asos yaratishda eng samarali usul hisoblanadi.

Miltillama razryad esa kam energiya sarfi talab etuvchi va yumshoq tozalash rejimi sifatida qo'llanilishi mumkin.

Tadqiqot natijalari vakuum-yoy razryadining sirtini aktivlashtirish, oksid qatlamni bartaraf etish va keyingi texnologik jarayonlar uchun tayyorlashda yuqori samarali usul ekanligini ilmiy jihatdan asoslab berdi. Shuningdek, mazkur usul yuqori energiya samaradorligi va ekologik tozaligi bilan sanoat miqyosida qo'llash uchun istiqbolli texnologiya hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

- [1]. Kampichler J. et al. Topography of high-speed steel substrates sputter cleaned by an Ar/Ti cathodic arc plasma //Surface and Coatings Technology. – 2023. – T. 458. – C. 129344. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2023.129344>
- [2]. Borisov D. P. et al. Plasma-assisted deposition of a three-layer structure by vacuum and gas arcs //IEEE transactions on plasma science. – 2002. – T. 26. – №. 6. – C. 1680-1684. [DOI: 10.1109/27.747886](https://doi.org/10.1109/27.747886)
- [3]. Serdiuk, I., Stolbovyi, V., Andreev, A., Kryvoshapka, R. (2023). Substrate surface processing in gas vacuum arc discharge. Bulletin of Kharkov National Automobile and Highway University. [DOI:10.30977/bul.2219-5548.2023.103.1.72](https://doi.org/10.30977/bul.2219-5548.2023.103.1.72)
- [4]. Kuznetsov V. G. Vacuum-arc hardening of metals surface //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2019. – T. 1396. – №. 1. – C. 012027. [doi:10.1088/1742-6596/1396/1/012027](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1396/1/012027)
- [5]. Bolotov M. G., Prybytko I. O. APPLICATION OF GLOW DISCHARGE PLASMA FOR CLEANING (ACTIVATION) AND MODIFICATION OF METAL SURFACES WHILE WELDING, BRAZING, AND COATING DEPOSITION //Progress in Physics of Metals/Uspehi Fiziki Metallov. – 2021. – T. 22. – №. 1. [DOI:10.15407/ufm.22.01.103](https://doi.org/10.15407/ufm.22.01.103)
- [6]. Kadyrmetov A. M. et al. Efficiency of surface cleaning by a glow discharge for plasma spraying coating //IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – IOP Publishing, 2016. – T. 134. – №. 1. – C. 012010. [doi:10.1088/1757-899X/134/1/012010](https://doi.org/10.1088/1757-899X/134/1/012010)
- [7]. Arustamov V. N. et al. Cleaning the surface of products with glow discharge plasma //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2020. – T. 1686. – №. 1. – C. 012013. [doi:10.1088/1742-6596/1686/1/012013](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1686/1/012013)
- [8]. Kuznetsov V. G. Interaction of cathode spots of a vacuum-arc discharge with a metal surface during its deactivation //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2020. – T. 1713. – №. 1. – C. 012024. [doi:10.1088/1742-6596/1713/1/012024](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1713/1/012024)
- [9]. Kuznetsov, V. G., & Kurbanov, T. A. (2018, July). Improvement of performance properties of products by surface treatment of materials with cathode spots of vacuum arc discharge. In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (Vol. 387, No. 1, p. 012045). IOP Publishing. [DOI:10.1088/1757-899X/387/1/012045](https://doi.org/10.1088/1757-899X/387/1/012045)
- [10]. Kuznetsov V. G., Kurbanov T. A., Kostrin D. K. Calculation of a vacuum system of the installation for cleaning the surface of metal rolling by a cathode spot of a vacuum arc //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2017. – T. 872. – №. 1. – C. 012006. [DOI:10.1088/1742-6596/872/1/012006](https://doi.org/10.1088/1742-6596/872/1/012006)
- [11]. Rikov A. A. et al. Modification of the surface layers with plasma of a vacuum-arc discharge by controlling the energy of precipitating particles //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2018. – T. 1038. – №. 1. – C. 012129. [doi: 10.1088/1742-6596/1038/1/012129](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1038/1/012129)
- [12]. Anikeev V. N., Dokukin M. Y. Research of influence of mobile cathodic stains of the vacuum arc for reception of the adjustable roughness of metal surfaces //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2017. – T. 830. – №. 1. – C. 012075. [DOI:10.1088/1742-6596/830/1/012075](https://doi.org/10.1088/1742-6596/830/1/012075)
- [13]. Kostrin D. K. et al. Decomposition of the hydrocarbon compounds in the vacuum arc discharge plasma //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2017. – T. 789. – №. 1. – C. 012029. [DOI:10.1088/1742-6596/789/1/012029](https://doi.org/10.1088/1742-6596/789/1/012029)
- [14]. Deyneko L. M. et al. Structure and properties of the nitrogenated layer of X40CrMoV5-1-1 steel obtained in the ion-plasma two-stage vacuum-arc discharge //Probl. At. Sci. Technol. – 2024. – T. 2. – C. 115-120. [DOI:10.46813/2024-150-115](https://doi.org/10.46813/2024-150-115)
- [15]. Столяр Н.Ф., Данилюк А.Л., Борисенко В.Е. Электрические характеристики твердотельного вакуумного планарного триода. Доклады Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. 2017(8 (110)):41-7.
- [16]. В.Н. Арустамов, Х.Б. Ашуров, И.Х. Худайкулов. Ионизационные процессы в катодном пятне вакуумной дуги. Доклад Академия наук Ташкент, Узбекистан, 2021г, сс. 19-25.

Mualliflar haqida ma'lumotlar

Kaxramonov Boburjon Ro'ziboyevich

Ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti, Ion plazma texnologiyalari katta ilmiy xodimi, fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD).
e-mail: boburjon2285@gmail.com. Tel: (97)141 22

85

PECVD usulida 550°C da uglerod nanostrukturalari sintezi va ularning strukturaviy tahlili

УДК 621.315.592:544.022.822:546.26

Ismatov A.A., Mirzaqandova S. X., Ashurov X.B., Xudayqulov I.X., Adilov M.M.

Annotatsiya. Ushbu ishda Fe/Al₂O₃/SiO₂/Si ko'p qatlamli strukturada uglerod nanonaychalarini (UNN) past haroratda sintez qilish imkoniyati o'rganildi. UNN lar 550°C haroratda plazma bilan kuchaytirilgan kimyoviy bug' fazasida cho'ktirish (PECVD) usuli yordamida o'stirildi. Tajribalarda Si(100) va Si(111) kristall orientatsiyali tagliklarda turli qalinlikdagi SiO₂ bufer qatlamlari (120 nm va 160 nm) qo'llanildi. Fe katalizator plyonkasi EB-PVD usulida hosil qilinib, Al₂O₃ yordamchi qatlam orqali barqarorlashtirildi. Hosil qilingan nanostrukturalarning morfologiyasi, element tarkibi va strukturaviy xossalari SEM, EDX va Raman spektroskopiyasi yordamida kompleks tahlil qilindi. Natijalar UNN o'sish jarayoni SiO₂ bufer qatlam qalinligi va taglikning kristallografik orientatsiyasiga sezilarli darajada bog'liq ekanini ko'rsatdi. Raman tahlili SiO₂(160 nm)/Si(111) substratida o'stirilgan UNN namunalarida grafitlash darajasi yuqoriroq va defektlilik darajasi pastroq ekanini tasdiqladi. SiO₂ qatlami qalinlashishi katalizator–taglik o'zaro ta'sirini kamaytirib, katalizator nanozarrachalarining faolligini saqlab qolishga yordam berishi aniqlandi. Olingan natijalar past haroratli PECVD jarayonida UNN sifatini boshqarishda bufer qatlam qalinligi va taglik orientatsiyasini optimallashtirish muhim omil ekanini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: PECVD, uglerod nanostrukturalari, Raman spektroskopiya, SEM, EDX.

Аннотация. В данной работе исследована возможность синтеза углеродных нанотрубок (УНТ) при низкой температуре в многослойной структуре Fe/Al₂O₃/SiO₂/Si. УНТ выращивались при температуре 550 °С методом плазменно-усиленного химического осаждения из газовой фазы (PECVD). В экспериментах использовались подложки Si(100) и Si(111) с различной толщиной буферного слоя SiO₂ (120 нм и 160 нм). Каталитическая плёнка Fe формировалась методом электронно-лучевого физического осаждения из паровой фазы (EB-PVD) и стабилизировалась с помощью вспомогательного слоя Al₂O₃. Морфология, элементный состав и структурные свойства полученных наноструктур были комплексно исследованы с использованием методов сканирующей электронной микроскопии (SEM), энергодисперсионного рентгеновского анализа (EDX) и рамановской спектроскопии. Результаты показали, что процесс роста УНТ существенно зависит от толщины буферного слоя SiO₂ и кристаллографической ориентации подложки. Анализ рамановских спектров подтвердил, что образцы УНТ, выращенные на подложке SiO₂(160 нм)/Si(111), обладают более высокой степенью графитизации и меньшим уровнем дефектности. Установлено, что увеличение толщины слоя SiO₂ снижает взаимодействие между катализатором и подложкой, способствуя сохранению активности каталитических наночастиц. Полученные результаты показывают, что оптимизация толщины буферного слоя и ориентации подложки является важным фактором управления качеством УНТ в процессе низкотемпературного PECVD-синтеза.

Ключевые слова: PECVD, углеродные наноструктуры, рамановская спектроскопия, SEM, EDX.

I.KIRISH

Uglerod nanostrukturalari, xususan uglerod nanonaychalari (UNN) o'zining yuqori elektr o'tkazuvchanligi, mexanik mustahkamligi va katta sirt maydoni sababli nanoelektronika, sensorlar hamda energiya saqlash qurilmalarida keng qo'llanilmoqda [1,2]. Biroq UNN va boshqa uglerod nanostrukturalarini past haroratlarda, boshqariladigan usulda sintez qilish dolzarb ilmiy muammo bo'lib qolmoqda [3,4]. Chunki uglerod manbai sifatida foydalaniladigan uglegazlarning parchalanish temperaturasi ma'lum kritik nuqtaga ega.

Plazma bilan kuchaytirilgan kimyoviy bug' fazasida cho'ktirish (PECVD) usuli nisbatan past haroratlarda UNN o'stirish

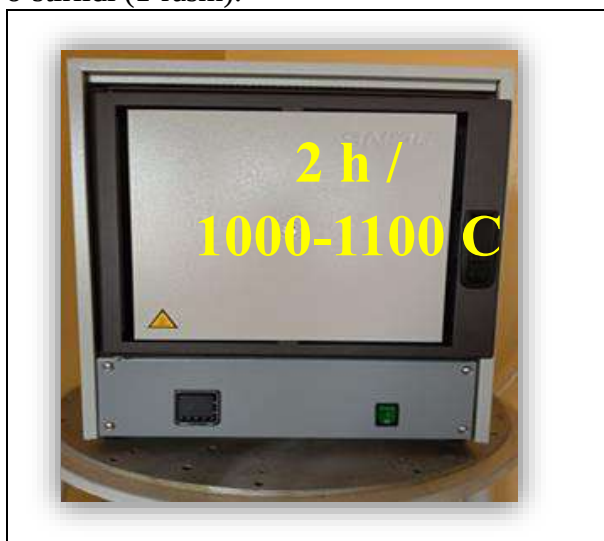
imkoniyati bilan an'anaviy CVD usulidan samaraliroq hisoblanadi [5]. Plazma ta'sirida uglevodorodlar parchalanishining jadallashuvi hisobiga sintez jarayoni ancha tezlashadi [6]. Past haroratlarda UNN hosil bo'lishi faqatgina sintez metodi bilan emas, balki, reaksiya davomida foydalaniladigan prekursorlar turiga, ularning oqim miqdoriga, katalizatorlar va buffer qatlamlar turi va qalinliklariga ham bevosita bog'liq [7]. Bundan tashqari UNN sintezida keng qo'llanilib kelayotgan Si tagliklarining kristall orientatsiyasi o'zgarishining sirtida hosil bo'layotgan nanostrukturalar sifatiga ta'siri tadqiq qilingan [8,9]. Taglik va katalizator o'zaro ta'sirini kamaytirish va silisid hosil bo'lishini cheklash

uchun kiritiladigan buffer qatlamlar qalinligi ham UNN sifatiga sezilarli ta'sir qiladi [10,11].

Lekin tadqiqotlarning ko'lamini keng emasligi va olingan natijalarning ma'lum qismlari bir-biridan farq qilishi bu tadqiqotlarda ishonchsizlik va noma'lumliklarni ko'payishiga olib kelgan. Bu borada optimal qatlam qalinligi hamda taglikning kristallografik orientatsiyasini aniqlash va ularning ta'sir mexanizmlarini tahlil qilish asosiy tadqiqot yo'nalishlaridan biri sifatida qaraladi.

II. MATERIAL VA USULLAR

Tadqiqotlarimiz uchun Si(100) va Si(111) kristall orientatsiyali tagliklar tanlab olinib, ularning sirti turli iflosliklarni yo'qotish maqsadida kimyoviy usullarda tozalandi. Undan keyin Si tagliklar 1x2 cm o'lchamda kesib olinib, Mufel pechiga kiritildi va Si sirtida quruq termik oksidlanish usulida 1000-1100 °C haroratda 2 h mobaynida SiO₂ qatlami o'stirildi (1-rasm).



1-rasm. SiO₂ qatlami o'stirishda foydalanilgan Mufel pechi.

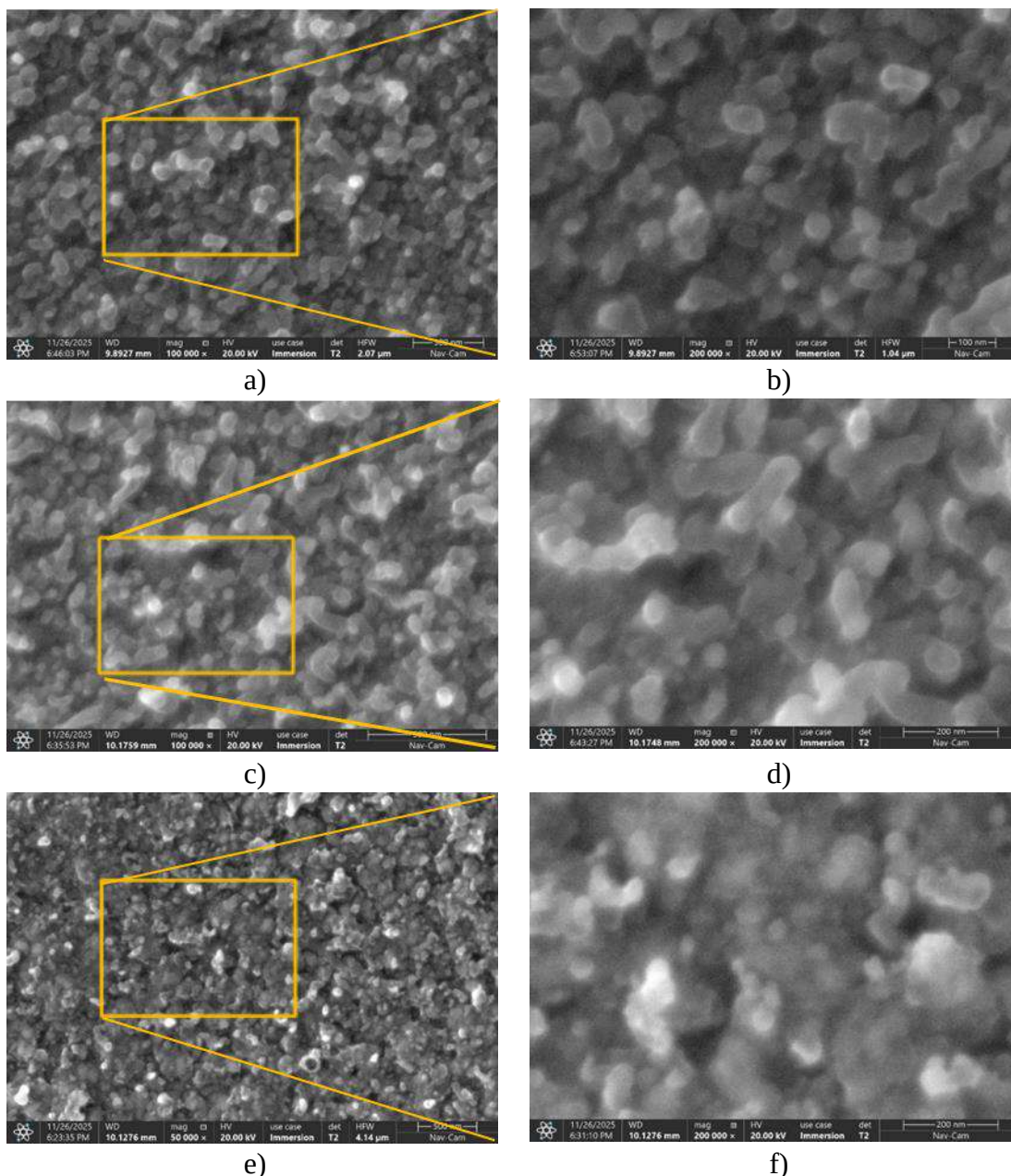
Hosil qilingan bufer qatlamlar qalinligini spektroskopik ellipsiometr yordamida tahlil qilindi va 1000 °C da termik oksidlantirilgan namunalar sirtida 120 nm qalinlikdagi SiO₂ qatlam, 1100 °C dagi namunada esa 160 nm SiO₂ qatlami hosil qilinganligi o'lchandi. Olingan namunalar PVD qurilmasiga kiritilib, dastlab 10⁻⁶ torr bosim hosil qilingan hamda katodga 10 kV kuchlanish va 60 mA tok tuchi berilgan. Hosil bo'lgan elektronlar oqimi tigelda turgan Al₂O₃

materiallariga magnit maydon yordamida aniq tushirilib, material sirti lokal bug'lantiriladi. Bug' fazaga o'tgan Al₂O₃ (30s) yuqorida joylashgan Si tagliklarga borib kondensatsiyalanadi va yupqa qatlam hosil qilinadi. Bu qatlam qalinligi bug'lanish vaqti orqali nazorat qilinadi. Undan keyin shu kamerada va bosim ostida keyingi target material Fe katalizatori ham shu usulda bug'lantiriladi (7s). Hosil bo'lgan Al₂O₃ va Fe plyonkalari yana spektroskopik ellipsiometrda o'lchanib, Al₂O₃ qalinligi 120 nm, Fe esa 8-9 nm qalinlikda ekani aniqlandi. PVD jarayonidan keyin, UNN o'stirish uchun namunalar PECVD qurilmasiga joylashtirilib, 10⁻¹ barr bosim ostida qizdirila boshlaydi. Bu vaqtda kamera ichiga Ar gazi 170 sccm oqimda yuboriladi. Harorat 300 °C dan oshgandan keyin kameraga qo'shimcha H₂ gazi ham 50 sccm oqimda kiritila boshlanadi va plazma generatori yoqiladi. H₂ gazining kiritilishidan asosiy maqsad PVD da hosil qilingan Fe plyonkasi atmosferaga chiqarilganda sirti oksidlanishga uchrashi va katalitik xususiyati kamayib ketishining oldini olish. Harorat 550 °C ga yetganda 5 daqiqalik qizdirish jarayoni boshlanadi. Undan keyin C₂H₂ gazi 25-30 sccm oqimda berila boshlanadi. Plazma va uglerod manbai 10-15 min davomida berilgandan so'ng o'chiriladi. Qizdirgich element ham o'chirilib, Ar+H₂ muhitida sovutiladi.

III. NATIJALAR VA MUHOKAMA

Olingan namunalar sirt morfologiyasi, element tarkibi va strukturaviy xossalarini aniqlash maqsadida SEM, EDX hamda Raman spektroskopiyasi usullari yordamida kompleks tahlil qilindi. Hosil bo'lgan qatlamlarning strukturaviy xususiyatlari Raman spektroskopiyasi yordamida 300–1800 cm⁻¹ spektral oralig'ida, Renishaw Raman spektrometrida 532 nm to'lqin uzunligiga ega lazer nurlanishi asosida o'lchandi. Sirt morfologiyasi va qatlamning nanostrukturaviy holati yuqori aniqlikdagi skanerlovchi elektron mikroskop — SEM (Thermo Fisher Scientific Apreo 2S) yordamida 500 nm va 200 nm masshtablarda olingan tasvirlar asosida batafsil tahlil qilindi. Qatlamning element tarkibi hamda asosiy elementlarning sirt bo'ylab

miqdoriy taqsimlanishi EDX analizi orqali aniqlanib, ularning nisbiy ulushi baholandi.



2-rasm. (a va b) $\text{SiO}_2(160 \text{ nm})/\text{Si}(111)$ namuna, (c va d) $\text{SiO}_2(160 \text{ nm})/\text{Si}(100)$ namuna, (e va f) $\text{SiO}_2(120 \text{ nm})/\text{Si}(100)$ namunalarning morfologik tasvirlari.

Tasvirlar uch xil sharoitga tegishli: 160 nm qalinlikda oʻstirilgan $\text{SiO}_2/\text{Si}(111)$, 160nm qalinlikda oʻstirilgan $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$, 120nm qalinlikda oʻstirilgan $\text{SiO}_2/\text{Si}(100)$. SEM tasvirlaridan koʻrinishicha, UNN lar substrat yuzasida nisbatan bir tekis taqsimlangan boʻlib, bu Al_2O_3 bufer qatlaminin katalizator zarrachalarini barqarorlashtirishdagi muhim rolini koʻrsatadi. Yuqori haroratda termik oksidlanish orqali olingan SiO_2 qatlami sirtining silliqligi va kimyoviy barqarorligi

keyingi qatlamlarning bir xil hosil boʻlishiga sharoit yaratgan. Al_2O_3 qatlaminin 120 nm qalinlikda tanlanishi Fe katalizatorining diffuziyasini cheklab, uning aglomeratsiyasini kamaytirgan, natijada katalizator nanozarrachalarining oʻlchami nisbatan tor diapazonda shakllangan. SEM kuzatuvlari UNN lar asosan silindrsimon shaklga ega ekanini va oʻsish jarayonida kuchli yonma-yon yopishish (bundling) hodisasi cheklanganini koʻrsatadi. Bu holat past haroratli (550°C)

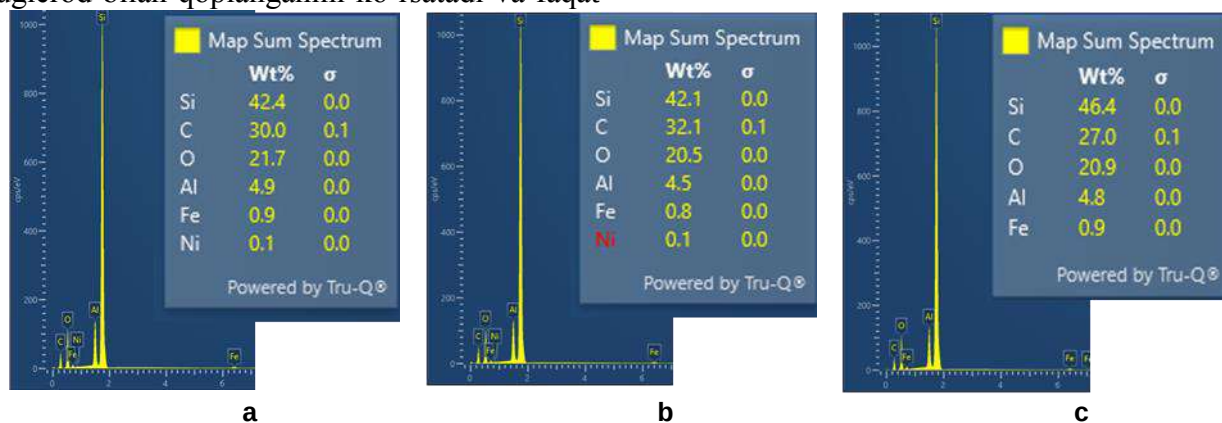
CVD jarayonining plazma ta'siri ostida uglerod manbai faollashuvi bilan izohlanadi.

Plazma mavjudligi katalizator yuzasida uglerod atomlarining samarali parchalanishi va yo'naltirilgan o'sishini ta'minlagan. 8–9 nm Fe qatlam PECVD jarayonida parchalanib, faol katalizator nanozarrachalariga aylangan va UNN yadrolanishi uchun yetarli markazlar hosil qilgan. Natijada qisqa vaqt (5 daqiqa) ichida zich UNN qatlami shakllangan. $\text{SiO}_2(160 \text{ nm})/\text{Si}(111)$ va $\text{SiO}_2(160 \text{ nm})/\text{Si}(100)$ substratlarida UNN nisbatan yuqori zichlikka ega bo'lib, amorf uglerod miqdori kamligi bilan ajralib turadi. Shu bilan birga, ushbu namunalarda UNN diametrlarining nisbatan katta ekani kuzatiladi. Bu holat past haroratli (550°C) PECVD sharoitida Fe katalizator qatlamining yetarlicha mayda nanozarrachalarga parchalanmasligi bilan izohlanadi. Ya'ni, uglerod prekursorining parchalanishi ta'minlangan bo'lsa-da, katalizatorning cheklangan faolligi UNN yadrolanish markazlari sonini kamaytirib, kam sonli, ammo yirik diametrli nanotrubkalarining o'sishiga olib keladi.

Bunga qarama-qarshi ravishda, $\text{SiO}_2(120 \text{ nm})/\text{Si}(100)$ substratida SEM tasvirlari sirt yuzasining katta qismi amorf uglerod bilan qoplanganini ko'rsatadi va faqat

ayrim lokal hududlardagina UNN o'sishi kuzatiladi. Bu holat parchalanib hosil bo'lgan uglerod atomlari yetarli darajada aktiv katalizator markazlarini topa olmagan sababli, energetik jihatdan qulayroq bo'lgan amorf uglerod qatlamini hosil qilgani bilan izohlanadi. Mazkur natija shuni ko'rsatadiki, past haroratlarda UNN sintezi jarayonida faqat uglerod prekursorining parchalanishi emas, balki katalizator qatlamining aktivatsiya energiyasi va uning nanozarrachalarga parchalanish qobiliyati hal qiluvchi omil hisoblanadi. Shuningdek, turli qalinlikdagi SiO_2 bufer qatlamlari (masalan, 120 nm va 160 nm) bilan olingan $\text{Si}(100)$ substratlaridagi SEM natijalari UNN va amorf uglerod miqdoridagi sezilarli farqlarni ko'rsatadi. Bu holat katalizator shakllanishida substrat va katalizator o'rtasidagi o'zaro ta'sir kuchi nafaqat material turiga, balki ular orasidagi masofaga, ya'ni oksid qatlam qalinligiga ham bog'liq ekanini anglatadi.

Qalinroq SiO_2 qatlam katalizatorning substrat bilan kuchli o'zaro diffuziyasini cheklab, uning nanozarracha holatida nisbatan yuqori faollikni saqlab qolishiga imkon beradi. Natijada UNN o'sishi uchun qulayroq sharoit yuzaga keladi.



3-rasm. a) $\text{SiO}_2(160 \text{ nm})/\text{Si}(111)$ namuna, b) $\text{SiO}_2(160 \text{ nm})/\text{Si}(100)$ namuna, c) $\text{SiO}_2(120 \text{ nm})/\text{Si}(100)$ namunalarning EDX tahlillari.

EDX tahlilidan o'stirilgan uglerod nanonaychalari (UNN) mavjudligini element tarkibi bilan tasdiqlandi, shuningdek bufer qatlam (SiO_2 , Al_2O_3) qalinligi va taglik orientatsiyasiga bog'liq ravishda sirt bo'yicha asosiy elementlar ulushi qanday o'zgarishi baholandi. EDX spektrlarda C, O, Al, Si, Fe elementlari barqaror qayd etilgan (3-rasm).

Ayrim spektrlarda Ni (nikel) juda kichik miqdorda ko'rinadi (odatda 7.5–8.3 keV atrofidagi liniyalar). Bu maqsadli dopant emas, balki iz miqdordagi instrumental/texnologik kontaminatsiya sifatida talqin qilindi.

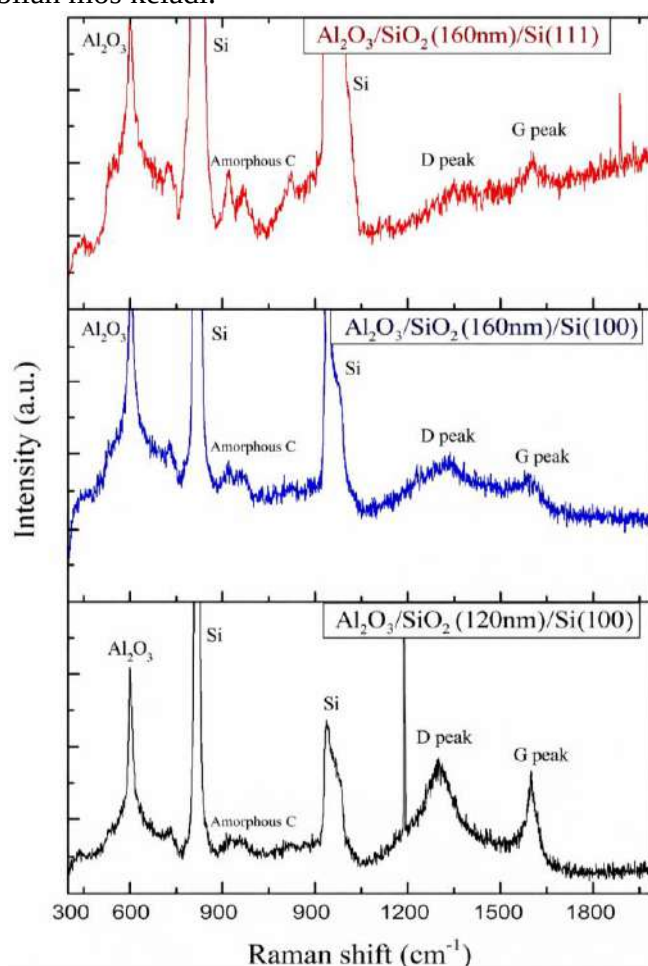
Raman spektrlari Renishaw spektrometrida 532 nm lazer bilan, $300\text{--}1800 \text{ cm}^{-1}$ oraliqda o'lchangan. Bu spektrlarda

yakuniy uchta namuna taqqoslangan (4-rasm). D va G piklari (UNN sifatini indikator) - barcha namunalar spektrida uglerodga xos ikki asosiy pik mavjud: D piki ($\sim 1350 \text{ cm}^{-1}$ atrofida) — defektlar, tartibsizlanish, amorf komponent ulushi, G piki ($\sim 1580 \text{ cm}^{-1}$ atrofida) — sp^2 bog'langan grafitlashgan tuzilma (grafen qatlamlari/UNN devorlarining tartibli tebranishi) indikator. Shuning uchun I_D/I_G nisbati kamayishi odatda grafitlash darajasi yuqori va defektlar kamroq ekanini anglatadi.

SiO_2 (160 nm)/Si(111) substratida o'stirilgan UNN namunasi uchun I_D/I_G nisbati 0,85 ni tashkil etadi. Bu uch namuna ichida eng past qiymat bo'lib, mazkur sharoitda o'stirilgan UNN larda grafitlash darajasi nisbatan yuqori va strukturaviy defektlar kam ekanini ko'rsatadi. Ushbu natija SEM tahlilida kuzatilgan nisbatan zich va kam amorf uglerodli morfologiya bilan mos keladi.

SiO_2 (160 nm)/Si(100) substratida o'stirilgan UNN lar uchun I_D/I_G nisbati 1,1 ga teng. Bu qiymat Si(111) namunasiga nisbatan yuqoriroq bo'lib, defektlar va tartibsiz komponentlar ulushi ortganini bildiradi. Mazkur holat substrat orientatsiyasining katalizator zarrachalarining shakllanishi va UNN yadrolanishiga ta'siri bilan izohlanadi.

Eng yuqori I_D/I_G qiymati SiO_2 (120 nm)/Si(100) substratida o'stirilgan UNN namunasi uchun qayd etildi va 1,2 ga teng. Bu holat mazkur namuna tarkibida defektlar va amorf uglerod ulushi eng yuqori ekanini ko'rsatadi. Raman natijalari SEM tasvirlarida kuzatilgan sirtning katta qismi amorf uglerod bilan qoplanganligi va UNN o'sishining faqat ayrim lokal hududlar bilan cheklanganligi haqidagi xulosalarni to'liq tasdiqlaydi.



4-rasm. PECVD metodi orqali sintez qilingan turli namunalardagi UNNlarining Raman spektrlari.

Har uch spektrda “Amorf uglerod” keng PECVD sharoitida plazma parchalanishi fon komponenti mavjud. Bu past haroratli natijasida hosil bo'ladigan uglerod

radikallarining bir qismi tartibsiz (amorfi) faza sifatida qolishi mumkinligini ko'rsatadi. Bu holat SEMda kuzatilgan "toza o'sish" bilan zid emas: UNN mavjud, lekin fon komponenti uglerodning bir qismi yuqori tartibga yetmaganini bildiradi. Spektarlarda juda kuchli Si piki (odatda $\sim 520 \text{ cm}^{-1}$) va qo'shimcha Si bilan bog'liq signallar ko'rinadi. Shuningdek, past chastotalarda Al_2O_3 bilan bog'liq vibratsion signallar ham qayd etilgan va bu bufer qatlam mavjudligini tasdiqlaydi.

IV. XULOSALAR

Ushbu ishda $\text{Fe}/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{SiO}_2/\text{Si}$ strukturada 550°C haroratda PECVD yordamida UNN sintezi amalga oshirildi. Kompleks SEM-EDX-Raman tahlillari UNN hosil bo'lganini ishonchli tasdiqladi. SEM kuzatuvlari UNN morfologiyasi va sirt qoplanishi bufer qatlam sharoitiga sezgir ekanini ko'rsatdi: 1100°C da hosil qilingan SiO_2 qatlamda o'sish bir xilroq va zichroq bo'ldi, 1000°C da esa lokal notekislik va sifat pasayishi alomatlari kuchaydi. EDX spektrlari sirt tarkibida C elementining sezilarli ulushga ega ekanini ko'rsatib, UNN mavjudligini element tarkibi orqali tasdiqladi. Si, O va Al signallari esa taglik hamda $\text{SiO}_2/\text{Al}_2\text{O}_3$ qatlamlar hissasiga mos keldi. Raman spektrlari barcha namunalarda D va G piklarning mavjudligini qayd etdi, piklarning nisbiy intensivligiga ko'ra SiO_2 (160 nm)/Si(111) namunasi nisbatan pastroq defektlilik va yuqoriroq grafitlash darajasini namoyon qildi. SiO_2 (120 nm)/Si(100) namunasi esa yuqoriroq defektlilik darajasini namoyon etdi. Umuman olganda, natijalar SiO_2 qatlam qalinligini oshirish va taglik orientatsiyasini tanlash past haroratli PECVD sharoitida UNN sifatini yaxshilashga xizmat qilishini ko'rsatadi.

Adabiyotlar:

[1]. Hughes, K. J., Iyer, K. A., Bird, R. E., Ivanov, J., Banerjee, S., Georges, G., & Zhou, Q. A. (2024). Review of carbon nanotube research and development: materials and emerging

applications. *ACS Applied Nano Materials*, 7(16), 18695-18713.

[2]. Choudhary, M., Sharma, A., Aravind Raj, S., Sultan, M. T. H., Hui, D., & Shah, A. U. M. (2022). Contemporary review on carbon nanotube (CNT) composites and their impact on multifarious applications. *Nanotechnology Reviews*, 11(1), 2632-2660.

[3]. Wang, Q., Wang, X., Chai, Z., & Hu, W. (2013). Low-temperature plasma synthesis of carbon nanotubes and graphene based materials and their fuel cell applications. *Chemical Society Reviews*, 42(23), 8821-8834.

[4]. Magrez, A., Seo, J. W., Smajda, R., Mionić, M., & Forró, L. (2010). Catalytic CVD synthesis of carbon nanotubes: towards high yield and low temperature growth. *Materials*, 3(11), 4871-4891.

[5]. Gangele, A., Sharma, C. S., & Pandey, A. K. (2017). Synthesis of patterned vertically aligned carbon nanotubes by PECVD using different growth techniques: a review. *Journal of nanoscience and nanotechnology*, 17(4), 2256-2273.

[6]. Park, D., Kim, Y. H., & Lee, J. K. (2003). Synthesis of carbon nanotubes on metallic substrates by a sequential combination of PECVD and thermal CVD. *Carbon*, 41(5), 1025-1029.

[7]. de los Arcos, T., Garnier, M. G., Oelhafen, P., Mathys, D., Seo, J. W., Domingo, C., ... & Sánchez-Cortés, S. (2004). Strong influence of buffer layer type on carbon nanotube characteristics. *Carbon*, 42(1), 187-190.

[8]. Ibrahim, I., Bachmatiuk, A., Warner, J. H., Büchner, B., Cuniberti, G., & Rummeli, M. H. (2012). CVD-grown horizontally aligned single-walled carbon nanotubes: synthesis routes and growth mechanisms. *Small*, 8(13), 1973-1992.

[9]. González, I. Z., Valenzuela-Muñiz, A. M., Gauvin, R., Miki-Yoshida, M., & Verde-Gómez, Y. (2020). Influence of the synthesis temperature and silicon concentration on the properties of Si doped MWCNT. *Diamond and Related Materials*, 104, 107743.

[10]. Quinton, B. T., Leedy, K. D., Lawson, J. W., Tsao, B., Scofield, J. D., Merrett, J. N., ... & Mukhopadhyay, S. M. (2015). Influence of oxide buffer layers on the growth of carbon nanotube arrays on carbon substrates. *Carbon*, 87, 175-185.

[11]. Kim, J. S., Jang, Y. W., & Im, I. T. (2013). Growth of vertical carbon nanotubes according to the Al_2O_3 buffer layer preparation. *Journal of Industrial and Engineering Chemistry*, 19(5), 1501-1506.

Муаллифлар ҳақида маълумот

1-Askar, Anvar o'g'li, Ismatov – tayanch doktorant, U.A. Arifov nomidagi ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti, Amaliy nanotexnologiyalar laboratoriyasi, kichik ilmiy xodim. E-mail: asqarismatov878@gmail.com

2-Sohibjamol, Xolmo'min qizi, Mirzaqandova – stajyor-tadqiqotchi, U.A. Arifov nomidagi ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti, Amaliy nanotexnologiyalar laboratoriyasi. E-mail: sohi9093@gmail.com

3-Xotam, Baxronovich, Ashurov – texnika fanlari doktori, professor, U.A. Arifov nomidagi ion-plazma

va lazer texnologiyalari instituti, institut direktori. E-mail: ashurov@iplt.uz

4-Ilyos, Xolmuradovich, Xudayqulov – PhD, U.A. Arifov nomidagi ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti, Asbob-uskunalaridan jamoaviy foydalanish markazi, direktor. E-mail: i_khudaykulov@mail.ru

5-Muhammadjon, Masharipovich, Adilov – PhD, U.A. Arifov nomidagi ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti, Amaliy nanotexnologiyalar laboratoriyasi, laboratoriya mudiri. E-mail: ashurov@iplt.uz

Polikristall yarimo'tkazgichlarda tenzoqarshilik mexanizmlari

Sulaymonov Husanboy Mannopovich

Farg'ona davlat texnika universiteti, O'zbekiston, 150107, Farg'ona, ko'ch. Farg'ona, 86

Annotatsiya. Maqolada polikristall yarimo'tkazgichlarning tenzoqarshilik mexanizmlari tahlil qilingan. Tenzorezistiv effektning yangi mexanizmi taklif etilgan: polikristall yarimo'tkazgich bir o'qli deformatsiyaga uchraganda, kubik shaklidagi kristallitining deformatsiya yo'nalishiga ko'ndalang va bo'ylama yoqlaridagi sirt holatlari o'rtasida zaryad tashuvchilarning oqib o'tishi sodir bo'ladi. Tenzoqarshilik ko'effitsiyenti uchun analitik ifoda olingan.

Kalit so'zlar: $(Bi_{0.3}Sb_{0.7})_2Te_3$ polikristall plyonkalar, elektr qarshilik, tsiklik mexanik deformatsiya, temperaturaviy qarshilik ko'effitsienti, tenzosezgirlik, datchiklar.

Abstract. The analysis of mechanisms of tenzo-resistance polycrystalline semi-conductor samples is carried out. The new mechanism of tenzo-resistance effect is offered: in a case of polycrystalline semiconductor deformation occurs transition carriers of a charge between superficial conditions cross and longitudinal to the direction of deformation of crystalite sides of the cubic form. It is received the analytic expression for tenzo-sensuality factor.

Keywords: polycrystalline $(Bi_{0.3}Sb_{0.7})_2Te_3$ thin films, electrical resistance, cyclic mechanical deformation, temperature coefficient of resistance, strain sensitivity, sensors.

Yarimo'tkazgichlarning deformasion xossalari o'rganishga oid eksperimental ma'lumotlardan shu narsa ko'rinadiki, PbS ning mono- va polikristall namunalarida pyezozarshilik effektning qonuniyatlari katta farqlanadi. Masalan, tegishli harorat va legirlash darajasida monokristall uchun tenzosezgirlik ko'effitsiyenti (TSK) o'zgarish kattaligi bo'lsa, u holda polikristall uchun TSK deformatsiya kattaligi $\varepsilon = \Delta l / l_0$ ning nochiq funksiyasidan iborat [1].

Ma'lum bo'lishicha [1,2], polikristallardagi bo'ylama tenzoeffektning monokristall pyezozarshiligidan farq qiluvchi asosiy xususiyatlari quyidagilardan iborat:

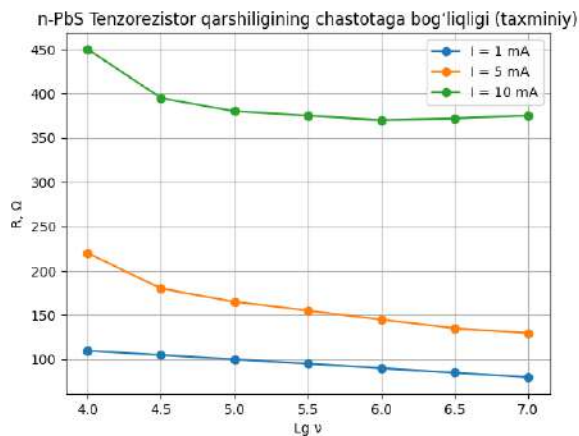
- $K = \Delta R / (R_0 \varepsilon)$ - tenzosezgirlik ko'effitsiyenti va qarshilikning nisbiy o'zgarishi $\Delta R / R_0$ ning qiymatlariga legirlash darajasi, aralashma turi va havoda termik ishlov berish juda kuchli ta'sir etadi. Yuqori qarshilikli namunalar uchun K nisbiy birlikdan ham ortiq ancha katta qiymatlarni qabul qiladi va zaryad tashuvchilar konsentratsiyasi ortishi bilan K keskin kamayib ketadi;
- past temperaturalar sohasida ($T < 300$ K) da, ayniqsa yuqori qarshilikli namunalarda, K va $\Delta R / R_0$ qiymatlar T ga kuchli chiziqli bog'liq (deyarli eksponensial qonuniyat bo'yicha kamayadi). Zaryad tashuvchilar konsentratsiyasi oshishi bilan tenzosezgirlik va qarshilikning temperaturaniy ko'effitsiyentlari α_{tkk} va α_{tkS} berilgan harorat uchun doimiy qiymatga intiladi;
- bir yo'nalishdagi siqilish va cho'zilish deformatsiyalarida K ning qiymatlari 10 martagacha farq qilishi mumkin. Bundan tashqari yuqori qarshilikli PbS uchun kichik ε da tenzoqarshilik o'zini anomal tutadi: $K < 0$, ya'ni siqilishda R oshadi va aksincha, cho'zilishda kamayadi;

g) $K(\varepsilon)$ bog'lanishi n-PbS uchun monoton kamayuvchi funksiya, p-PbS uchun esa monoton emas, shu bilan birga hatto ba'zi bir kichik qarshilik namunalar uchun, masalan zaryad tashuvchilar konsentratsiyasi $n = 7 \cdot 10^{14} \text{ sm}^{-3}$ bo'lganda ε ortishi bilan TSK ning oshishi kuzatiladi.

d) kam legirlangan (deyarli stexiometrik tarkibdagi) namunalarda tok zichligining ortishi bilan TSK keskin kamayadi, bu esa tenzoqarshiliklarning VAX da chiziqli sohani paydo bo'lishi bilan sodir bo'ladi.

PbS ning bir jinsli bo'lmagan (presslangan polikristallar) namunalarida anomal katta pyezozarshiliklarning hosil bo'lishini N.N. Arsenyeva-Geyl polikristall qatlamlarda p-n o'tishlar hosil bo'lishi bilan tushuntiradi va K ning juda katta qiymatlarini deformatsiyalardagi kristallararo to'siqlar balandligini o'zgarish bilan bog'laydi. Ammo B.X. Gurevich shuni ta'kidlaydiki, Arsenyeva-Geyl talqin etgan tenzoeffekt katta deformatsiyalarda hosil bo'ladigan ko'ndalang makroskopik yorilish tufayli kontakt qarshilik o'zgarish effektining aynan o'zidir, ya'ni qo'rg'oshin sulfididagi tenzoeffekt u "yorilish" effekti deb ataluvchi kuchsiz kontakt effekti xarakteriga ega bo'lgan va ma'lum o'xshashlikda ko'mirli mikrofon ishi bilan ("mikrofon effekti") talqin etib bog'laydi. [1] dagi tadqiqotlarning natijalari, xususan shuni ko'rsatadiki, K kattaligini zaryad tashuvchilar konsentratsiyasi, aralashma turi, harorat, tok zichligi va nisbiy deformatsiya ishorasi va qiymati bog'liqligi odatdagi oqib o'tish nazariyasi asosida yoki mikrofon effekti bilan to'liq tushuntirib bo'lmaydi, chunki PbS dagi TSK ni yuqori qiymatlari hali biror mikroyemirilishlar hosil bo'lishi haqida gap bo'lishi ham mumkin bo'lmagan $2,5 \cdot 10^{-6}$ nisbiy birlikdagi deformatsiyalarda hosil

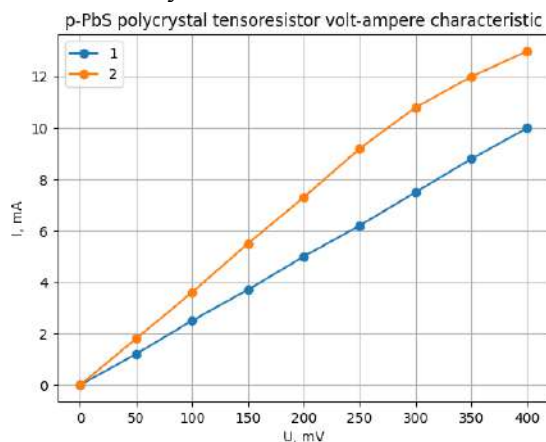
bo'ladi. Oxirgi paytda oqib o'tish nazariyasi faol o'rganilib, amorf yarimo'tkazgichlar, kuchli legirlangan kristall yarimo'tkazgichlar yoki ikki xil moddalar - dielektriklar va metallar aralashmasidan



1-rasm. n-PbS dan tayyorlangan tenzorezistor qarshiligining xona haroratida o'zgaruvchan tok chastotasiga bog'liqligi. Tok kuchi $I = 1.0$ (1), 5.0 (2), 10.0 (3) mA.

iborat tartibsiz sistemalarning elektr o'tkazuvchanligini hisoblashda qo'llanilmoqda [3,5]. Polikristall yarimo'tkazgichlar tenzoqarshiliklarini oqib o'tish nazariyasi yordamida ma'lum materiallar uchun hisoblash katta qiyinchiliklar bilan bog'liq.

Shuningdek, polikristall namunalardagi pyezoqarshilik hodisasida potensial to'siq effekti ma'lum rol o'ynasa ham, PbS da topilgan tenzoeffekt xususiyatlarini bir o'lchovli potensial to'siq mexanizmi tasavvurlari asosida oxirigacha tushunib bo'lmaydi.



2-rasm. p-PbS dan tayyorlangan polikristall tenzorezistorning iste'mol kuchlanishining turli chastotalaridagi volt-ampere xarakteristikasi: $\nu = 2$ (1), 200 (2) kGs.

Potensial to'siqlarning mavjudligini payqash maqsadida [1] lampali voltmetr yordamida

sinusoidal kuchlanishning turli qiymatlari uchun polikristall PbS namuna qarshiligining chastotaga bog'lanishi olingan (1-rasm). Shuni ta'kidlash kerakki, kuchlanish U ning ma'lum chegaraviy qiymatgacha R qarshilik ν chastotaga bog'liq bo'lmay, keyin $R(\nu)$ ning nochiziqli bog'lanishi boshlanadi. 1-rasmdagi 1, 2 va 3 egri chiziqlar $n = 6,3 \cdot 10^{18} \text{ sm}^{-3}$ li n tipli PbS polikristall tenzorezistor uchun mos ravishda 1,5 va 10 mA tok kuchi qiymatlari uchun $R(\nu)$ bog'lanishini ifodalaydi.

Ko'rinib turibdiki, o'zgaruvchan kuchlanishning chastotasi ortishi bilan namunalarning qarshiligi kamayadi, hamda tok zichligi ortishi bilan u yanada seziladi.

Ushbu hodisani polikristall namuna hajmida o'z qarshiligi va sig'imiga ega bo'lgan potensial to'siqlarning mavjudligi haqidagi tasavvurlardan kelib chiqqan holda tushuntirish mumkin, xolos. 2 va 3 egri chiziqlarda shartli ravishda ν ni orttirish bilan R ni tez va sekin tushish sohalari ajratiladi. Ulardan birinchisini tor potensial to'siqlar bilan, ikkinchisini esa kengroq to'siqlar bilan bog'langan deb hisoblash mumkin ($R_c = 1/i\omega C$), demak, keng to'siq oz sig'imga ega bo'lib katta chastota va kuchlanishlarda shuntlanadi.

Namunaning qarshiligini sezilarli kamayishi 63 mV dan yuqori kuchlanishlarda kuzatiladi. Ta'minlovchi kuchlanish chastotasi orttirilishi bilan polikristall VAX egri chiziqlarining siljishida ham potensial to'siqlar aniq aks etadi. 2-rasmda p-PbS dan olingan zaryad tashuvchilar konsentratsiyasi $n_p = 3.5 \cdot 10^{18} \text{ s}^{-3}$ li tenzoqarshilikning o'zgaruvchan tok chastotalari $\nu_1 = 2 \text{ kGs}$ (2-rasm, 1-chiziq) va $\nu_2 = 200 \text{ kGs}$ (2-rasm, 2-chiziq) qiymatlari uchun VAX keltirilgan.

Bu grafiklardan qarshilikning nisbiy o'zgarishini ($\sim 50\%$) aniqlash mumkin (kuchlanishning tadqiq etilgan sohasida ν ning ortishi bilan VAX ning chiziqliligi buzilmaydi):

$$\frac{R(\nu_2) - R(\nu_1)}{R(\nu_1)} = \frac{I(\nu_2) - I(\nu_1)}{I(\nu_1)} \approx 0.5$$

PbS polikristall qarshiliklarining chastotaga bog'liqligini o'rganish dastlabki qarashda go'yo namunalarni pyezoqarshiligi asosan to'siq mexanizmi tufayliday va katta chastotalar ($\nu \sim 10^6 - 10^7$) da $K \rightarrow 0$. Ammo bunday emas. Tajriba ko'rsatadiki, bir jinsli bo'lmagan PbS namunalarning TSK si $\nu \rightarrow \infty$ da yo'qolmay, $K(\nu)$ ning 1-rasmdagi $R(\nu)$ bog'lanishi kabi tekis bog'liqligi kuzatiladi. Bunday (tashqi maydon yo'nalishida) potensial to'siqlarning mavjudligi tufayli pressalangan polikristallardagi pyezoqarshilik effektini to'liq tushuntirmaydi va PbS polikristallarda tenzosezgirlikning boshqa

mexanizmlari bo'lishi mumkinligi haqidagi fikrga olib keladi.

Shuni ta'kidlash joizki, mikrokontaktlash deb atalgan effekt ham muammoni hal etmaydi. Unga ko'ra TSK ma'lum darajada namuna hajmida kristall donalari orasidagi mikrokontaktlar tekish yuzalarining o'zgarishi bilan bog'liqdir. Mexanizmning qissasi namuna tayyorlangan kukunning dispersligi va uning qovushishi bilan to'liq aniqlanadi. Bunda zaryad tashuvchilarning namuna butun hajmi bo'yicha notekis taqsimlanishi inkor etilmaydi va yetarlicha qovushtirilgan, ammo bu barcha defektlar, xususan g'ovaklik bo'linish chegarasi va shu kabilarni to'la yo'qotmaydi. Siqish deformatsiyasi namunani zichlashtirib kontakt tekish yuzalarini oshiradi, cho'zish deformatsiyasi esa namunani g'ovakliklarini ushbu yuzani kamaytiradi va shu sababli unda $K_m(\varepsilon)$ ishorasi cho'zilishda ham siqilishda ham musbatdir:

$$K = \frac{R - R_0}{R_0} \cdot \frac{l_0}{l - l_0} = \frac{\Delta R}{R_0 \varepsilon}$$

PbS polikristall yarim o'tkazgichlardagi pyezoqarshilik effektining ifodalanishida tilga olingan uchta mexanizmga yana quyidagi uchtasini qo'shish mumkin:

1. Alohida kristallitlarning hajmiy pyezoqarshiligi. Ammo kristallitlarning xaotik joylashishi tufayli hajmiy pyezoqarshilikni barcha fazoviy yo'nalishlarda o'rtachalashtirish lozim, bu esa oqib-o'tishli polikristallardagi tenzorezistiv effektini miqdor jihatidan kamayishiga olib keladi. Shuningdek, donalar orasida oqib o'tish jarayonlari bilan bog'liq bo'lgan katta pyezoqarshilik effektlari kichik hisoblanishi mumkin emas ham bo'lardi. Shunga qaramay PbS kabi tor zonali yarim o'tkazgichlarda kichik effektlar bilan bog'liq hajmiy tenzoeffekt hissasi ma'lum sharoitlarda kichik emas. Kichik effektlarning ta'siri to'g'risidagi taxminlarning foydasiga kichik qarshilikli PbS polikristallarni TSK katta deformatsiyalar sohasida haroratga kam bog'liqligi va monokristall namunalaridagi kabi bir necha o'n birlikni tashkil etishi mumkin bo'ladi.

2. Yupqa dielektrik qatlamlar orqali tok o'tishi mexanizmi. Polikristallarning tenzoeffektiga qo'shgan hissasi yupqa va baland bo'lmagan kristallararo potensial to'siqlar holida sezilarli bo'lishi mumkin.

3. Geometrik faktor hisobiga uning qarshiligini o'zgarishi. TSK dagi bu hissa PbS uchun $\nu = 0,35$ ga teng bo'lgan va deformatsiya tufayli kam o'zgaradigan Puasson koeffitsiyenti ($K_{\text{geom}} = 1 + 2\nu$) bilan aniqlanadi. K_{geom} ning maksimal qiymati bir necha birlikni tashkil etib uni amalda hisobga olmasa ham bo'ladi.

Pyezoqarshilikning 6 ta mexanizmida hajmiy pyezoqarshilik va geometrik faktordan tashqari, barcha 4 tasini o'zgaruvchan kuchlanishning yuqori chastotalarida inkor etish mumkin. Shuning uchun, ushbu mexanizmlar PbS turidagi kichik zonali yarim o'tkazgich birikmalarining polikristall namunalaridagi tenzoeffekt haqidagi savolni to'liq hal etmaydi. Keyin polikristallarni yangi mexanizmlarini taklif etib [1] da PbS uchun bu hodisani nazariy tavsiflashga urinishlar bo'lgan, ammo ularning ko'rib chiqishlari miqdoriy emas, balki sifat jihatidan bo'lgan.

Polikristall yarim o'tkazgichlardagi tenzorezistorli effekt yuqorida ko'rsatilgandek, monokristallarga qaraganda ma'lum xususiyatlarga ega. Bu avvalom bor, tabiiyki, bir jinsli bo'lmagan struktura hisobigadir, xususan, turli oriyentatsiyalangan kristall donachalar har xil shakl, o'lcham va kristallararo qatlamni mavjudligidir (ammo zona strukturasining kuchli o'zgarishi va zaryad tashuvchilar donachalarning chegaraviy sohalariga sochilishi shartli darajada kinetik hodisalarda aks etadi). Bir jinsli emaslik parametrlari ko'pincha texnologik faktorlar va tashqi ta'sirlarga kuchli bog'liq. Nobirjinslilikning kelib chiqish tabiatiga to'xtamay polikristall yarim o'tkazgichning elektr o'tkazuvchanligiga ta'sir etuvchi asosiy faktorlarni ko'rsatamiz:

- a) sirtga yaqin sohadagi hajmiy zaryad;
 - b) kristallararo dielektrik qatlam, xususan, g'ovaklar;
 - v) kristallitlararo chegaradagi Sirtqi holatlarning mavjudligi;
 - g) stexiometriyadan chetlashish va ko'p komponentli birikmalar hollarida turlicha kvazimuvozanat fazali holatlarning mavjudligi.
- Ushbu faktorlarning xossalari ma'lum materiallarga bog'liq holda qay darajadadir mexanik deformatsiyaga bog'liq.

Tenzorezistiv effektini tekshirishda odatda birinchi ikki faktorni birgalikda ko'rishadi va to'siqli pyezoqarshilikni o'rganish predmetini tuzishadi. Ammo shuni ta'kidlash lozimki, tenzoeffektning to'siq mexanizmini o'rganishga bag'ishlangan ishlarda (masalan, [1] da) birjinsli bo'lmagan strukturalarning bir o'lchovli modellari ko'rib chiqilgan, xolos, ya'ni elektr toki o'tish yo'nalishi bo'ylab joylashgan (turli to'rtburchak shakldagi) bir o'lchovli potensial to'siqlarning chiziqli zanjiri. Kelgusida biz ularni "bo'ylama to'siqlar" deb ataymiz. Shunga ishonch hosil qilish mumkinki, ushbu model to'siqli tenzoeffektning ba'zi bir muhim tomonlarini yoritib, uning barcha xususiyatlarini qamrab ololmaydi. "Ko'ndalang to'siqlar" va ularga mos zaryadlarning fazoviy

sohalari (ZFS) ham bir tomonlama deformatsiyaga juda sezgir va polikristall yarim o'tkazgich pyezoqarshiligida asosiy rollardan birini o'ynaydi. Birinchi vazifa, deformatsiya ta'sirida ko'ndalang sirtga yaqin ZFS modulyasiyasining TSK ga qo'shgan hissasini hisobga olishdan iborat.

To'ldirish jarayoni o'zgarishi, ya'ni deformatsiya Sirtqi holatlarni qayta zaryadlanishi pyezoqarshilikka kuchli aks etishi shart, ayniqsa kichik zonali yarim o'tkazgichlar uchun, chunki Sirtqi holatlarning aktivatsiya energiyasi oksidlar uchun kam.

Sirtqi holatlarning tenzosezgirlikka ta'siri bir o'lchovli potensial to'siq monoenergetik Sirtqi sath mavjudligi hol uchun ham muhokama qilingan.

Ikkinchi vazifa, polikristall TSK ni ko'ndalang PQQ (ya'ni tokka perpendikulyar to'siqlarni hosil qilishda ishtiroq etgan PQQ) ni e'tiborga olgan holda hisoblash.

Stexiometrik tarkibdan chetga chiqish ham namunalarining tenzometrik xossalriga ba'zida kuchli ta'sir etadigan polikristallarning strukturasi nomkammalliklariga olib keladi. Bunday masala [1] da pleyonkalar ko'rib chiqilgan. [3] dagi xalkogenid birikmalar holatini fazali diagrammasi sinchikovlik bilan o'rganish shuni ko'rsatdiki, aniq stexiometriya (P, X, T) ni juda kichik intervalda erishiladi. Tashqi deformatsiya ta'sirida esa ushbu sohada polikristall elektr o'tkazuvchanligi deyarli sakrab o'zgaradigan fazaviy aylanishlar kvaziqaytuchan bo'ladi. Tenzoqarshilikning bunday fazaviy aylanishlar bilan bog'liq bo'lgan mexanizmi haqida batafsil to'xtamay, tok uchun alohida qism qilib kiritish bilan hisobga olinadi.

Soddalashtirish maqsadida kub shaklidagi kristall donachasini unga yaqin bo'lgan dielektrik qatlamlari ko'rib chiqamiz. PbS polikristallini 1-rasmda ko'rsatilgandek alohida yachalarga bo'lish mumkin. Polikristall uchta OX, OY va OZ fazaviy yo'nalishlarda davriy almashinuvchi bir xil (identiq) parametrli bir xil kristallardan tuzilgan.

Masalan bunday jun quyilish tufayli polikristallining impedans-qarshiligi

$$Z = r_0 Z_0 \quad (1)$$

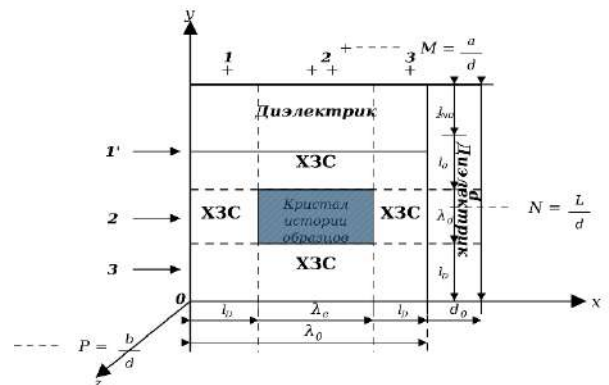
kabi aniqlanadi, bunda

$$r_0 = \frac{Ld}{ab}$$

L, a va b - namunaning uzunligi, eni va balandligi; $d = l_0 + d_0$, l_0 va d_0 - kristallitning chiziqli o'lchami va dielektrik qatlamning qalinligi; Z_0 - bitta yachaning impedansi.

3-rasmda OX bo'ylab joylashgan dielektrik qatlamlari bilan olingan alohida kristallitning energetik zona diagrammasi sxematik keltirilgan. Sirtki holatlar (PQQ spektri bo'lishi mumkin) va tomondan hajmdan erkin zaryad tashuvchilar ushlab

olinishi energetik zonadagi ortiqcha zaryadning chegaraviy qatlam fazaviy zaryad sohasini hosil bo'lishiga olib keladi. Ushbu qatlam qalinligi L_d (Debay ekranlanish uzunligi va to'siq balandligi ϕ_s - sirtki elektrostatik potensial) deformatsiya yo'qligida barcha olti yo'nalishda bir xil deb hisoblanadi.



3-rasm. Kubik shakldagi kristall donning XOY tekislik bilan kesilishining modeli va asosiy geometrik parametrlari.

Aniqlik uchun n-turdagi yarim o'tkazgichni ko'rib chiqamiz, akseptorli PQQ ko'pincha o'tish zonasi elektronlari bilan almashinib turadi. Unda kristallit sirtlarida manfiy zaryadlar (hosil bo'ladi) uning chegaraviy qatlamlarida esa elektronlar kamayib qolgan musbat fazaviy zaryadlar hosil bo'ladi. FZS ni elektr o'tkazuvchanligi uchun vaziyatlar hajmidagi sohalari farq qiladi. Z_0 ni elektr xossalriga ko'ra bir necha sohalariga bo'lish qulay. Buning asosida o'lchov qarshiligini ekvivalent elektr sxemasi orqali olish mumkin. Shuning uchun biror qarshiliklar va sig'imga deformatsiya ta'sirida o'zgarishi mumkin.

3-rasmdagi elektr sxemadan kelib chiqsak, polikristall bitta kristall donasi yachasining impedansi

$$Z_1 = (2R_{d\parallel} + Z_{kp}^{-1})^{-1} + Z_{d\Box} \quad (2)$$

Bu yerda $R_{d\parallel}$ va $Z_{d\Box}$ - bo'ylama va ko'ndalang dielektrik qatlamlar qarshiligi va impedansi, Z_{kr} - kristallit impedansi.

$$Z_{D\parallel} = \frac{R_{D\parallel} + i\omega C_{D\Box} R_{D\parallel}^2}{1 + (\omega C_{D\Box} R_{D\parallel})^2}$$

$i = \sqrt{-1}$, ω - iste'mol kuchlanishining siklik chastotasi; $R_{D\parallel}$ - bo'ylama dielektrik qatlamning aktiv qarshiligi; $C_{D\Box}$ - ko'ndalang dielektrik qatlamning elektr sig'imi.

$$Z_{kp} = \left(\frac{2}{R_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{2}{R_3} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{4}{R_1} \right)^{-1}$$

bu yerda $R_1 = R_{11} + R_{12} + R_{13}$, $R_3 = R_{31} + R_{32} + R_{33}$; bunda $R_{11}=R_3$; R_{ab} - bo'ylama hajmiy zaryadlar sohasining mos ravishda xarakterli sohalarining aktiv qarshiligi (3-rasm).

$$Z_2 = R_2 + \frac{R_{21} + i\omega C_{21}R_{21}^2}{1 + (\omega C_{21}R_{21})^2} + \frac{R_{23} + i\omega C_{23}R_{23}^2}{1 + (\omega C_{23}R_{23})^2}$$

bunda $R_x=R_{22}$ - kristallitning kvazineytral hajmining qarshiligi;

C_{21} , C_{23} va R_{21} , R_{23} - ko'ndalang hajmiy zaryadlar sohasining mos sig'implari va aktiv qarshiliklari.

Qat'iy qilib aytganda, agar (1) formuladan foydalanmasak, u holda (2) ifodalarning har bir holda har bir blokning real joylashuvini va individual xususiyatlarini hisobga oluvchi tuzatma koeffitsiyentlar kiritish zarur.

Ba'zi bir xususiy hollarni ko'rib chiqamiz:

1. $\omega=0$ - doimiy tok bo'lgan hol. (2)÷(5) formulalardan

$$Z_0 = R_0 = (2R_{D\parallel} + R_{kp}) + R_{D\perp}$$

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + 4R_2},$$

$$R_2 = R_x + R_{21} + R_{23}$$

a) aytaylik $R_{D\parallel}$, $R_{D\perp} \gg R_{kr}$ bo'lsin. U holda (6) dan $Z_0=R_{D\perp}$ va qarshilik deformatsiya ta'sirida faqat ko'ndalang dielektrik qatlam qarshiligi hisobiga o'zgarishi mumkin. Bunda polikristallning pyezoqarshiligi tunnel mexanizmi orqali sodir bo'ladi.

b) agar $R_{D\parallel} \gg R_{kr} > R_{D\perp}$ bo'lsa, (6) dan

$$R_0 = R_{D\perp} + R_{kp}$$

ifodani olamiz. Undan $R_1 \gg R_2 \gg R_3$ shart bajarilganda

$$R_0 = R_{D\perp} + R_{21} + R_{23} = R_{\sigma 1}$$

ya'ni, bir o'lchovli potensial to'siqlar modeli bo'yicha pyezoqarshilik tasavvurlariga mos keluvchi ifodani hosil qilamiz. Ammo bu holda bo'ylama hajmiy zaryadlar sohasi (BHZZ) ning sirt holatlarini deformatsiya ta'sirida qayta zaryadlanishi tufayli ko'ndalang hajmiy zaryadlar sohasi (KHZZ) ga ta'sirini hisobga olish zarur. Umumiyroq holda $R_2 > R_x$, $R_2 \ll R_1$ shartlar bajarilganda (8) ko'rinishni oladi

$$R_0 = R_x + R_{D\perp}$$

2. O'ta yuqori chastotali kuchlanishlar holati - $\omega \rightarrow \infty$. Bu holda (2) formula

$$Z_0 = R_\infty = (2R_{D\parallel} + R_x^{-1} + 4R_1^{-1})^{-1}$$

ifodaga keladi. Bu yerda $R_{D\parallel} \gg R_x$, R_1 bo'lganda

$$R_\infty = (R_x^{-1} + 4R_1^{-1})^{-1}$$

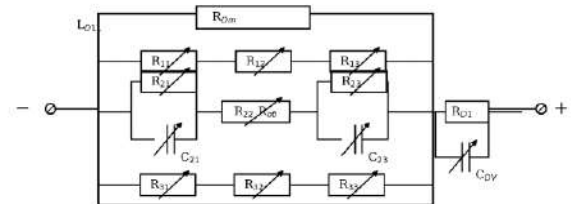
ni olamiz, $R_x \ll R_1$ shartda esa -

$$R_\infty = R_x \left(1 - \frac{4R_x}{R_1}\right)$$

Biroq shuni qayd etish joizki, oxirgi ifodada $\omega \rightarrow \infty$ da polikristallardagi tenzoeffekt faqat hajmiy pyezoqarshilik tufayli yuza beradi deb aytish

mumkin emas, chunki sirt holatlarining qayta zaryadlanishi R_x ning sezilarli o'zgarishlariga olib kelishi mumkin.

Bu holda polikristallarning bir o'qli deformatsiyada yetarlicha yuqori tenzosezgirli zaryad tashuvchilarning bo'ylama sirt holatlardan ko'ndalang sirt holatlarga va, aksincha, oqib o'tish jarayonlari bilan bog'langan.



4-rasm. Kristall don qarshiliklarining ekvivalent elektr sxemasi

Bunda ixtiyoriy bir o'qli deformatsiyada atomlarning siljishi kristallning bo'ylama va ko'ndalang yoqlarida qarama-qarshi ishoraga ega, natijada bu sirtlarda sirt energetik sathlar deformatsiya ta'siridagi siljishlari qarama-qarshi bo'ladi. Bu o'z navbatida elektronlarning energetik sathlar ko'tarilgan sirtidan energetik sathi pasaygan sirtga oqib o'tishiga sabab bo'ladi.

Aynan mana shu hodisa tor zonali yarimo'tkazgichlarning polikristallaridagi pyezoqarshilikning bosh mexanizmi bo'ladi. R_f qarshiliklarni konkret hisoblash uchun sirt aralashmaviy holatlar konsentratsiyalari va aktivatsiya energiyalari, legirlash darajasi va deformatsiyaga bog'liq ravishda o'zgaruvchi bo'ylama va ko'ndalang potensial to'siqlarining parametrlari $L_{D\parallel}$, $L_{D\perp}$, $\varphi_{s\parallel}$ va $\varphi_{s\perp}$ larni bilish zarur. Bu $\varphi_{s\parallel}$ parametrlar o'z navbatida o'tayotgan tok zichligi j ga ham bog'liqdir.

Tashqi doimiy tok manbai qutblari 4-rasmda ko'rsatilgandek ulanganda 5-rasmda keltirilgan chap potensial to'siq balandligi kamayadi, unga mos holda hajmiy zaryadlar sohasi ham torayadi. Ushbu to'siqdan o'ng tomondagi potensial to'siqqa zaryad tashuvchilar aksincha kechadi. Shu sababli polikristall yarimo'tkazgichlarning VAX nochiziqli bo'lishi mumkin.

Izlanayotgan L_0 va φ_s kattaliklar Puasson tenglamasi

$$\nabla^2 \varphi = \frac{4\pi e}{\varepsilon} \left[n_0 \left(e^{\frac{e\varphi}{kT}} - 1 \right) - p_0 \left(e^{-\frac{e\varphi}{kT}} - 1 \right) \right]$$

ni yechish bilan topiladi, bunda ε - yarim o'tkazgichning dielektrik singdiruvchanligi; n_0 , p_0 - hajmiy elektronlar va teshiklarning muvozanatli

konsentratsiyalari. Kichik energiyali aralashmalar to'liq ionlangan va Maksvell-Bolsman taqsimoti o'rinli, deb qabul qilamiz.

Bir o'lchovli holda (6) tenglama

$$\begin{aligned}\varphi|_{x=0} &= \varphi_s, \\ \frac{d\varphi}{dx}\bigg|_{x \rightarrow \infty} &= 0\end{aligned}$$

chegaraviy shartlarga ega. Qat'iy qilib aytganda, R_{11} , R_{13} , R_{31} va R_{33} qarshiliklarga mos keluvchi hajmiy zaryadlar sohalari uchun (12) tenglamani yechish katta qiyinchiliklar tug'diradi, chunki bu sohalarida elektrostatik potensial faqat x ga emas, balki y va z o'zgaruvchilariga ham bog'liq. Shuning uchun ma'lum soddalashtirish kiritib, qaralayotgan sohada φ bir o'lchovli funktsiya, deb hisoblaymiz. Agar

$$Y = \frac{e\varphi(x)}{kT}, \quad \lambda = \frac{n_0}{n_i} = \frac{n_i}{p_0}, \quad L_* = \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_s kT}{e^2 n_i}}$$

shakl almashtirishlar qilsak, u holda (12) va (13) lar

$$\frac{dY}{dx} = L_*^{-1} F(\lambda, Y),$$

$$\begin{aligned}F(\lambda, Y) \\ = \sqrt{\lambda(e^Y - 1) - \lambda^{-1}(e^{-Y} - 1) + (\lambda^{-1} - \lambda)}\end{aligned}$$

natijalarini olamiz, bunda n_i - xususiy yarim o'tkazgichda zaryad tashuvchilar konsentratsiyasi. Sirt oldi hajmiy zaryadlar sohasining kengligini

$$L_D = L_* \int_0^{Y_s} \frac{dY}{F(\lambda, Y)}$$

munosabatdan topamiz. Bunga noma'lum $Y_s = \frac{e\varphi_s}{kT}$ parametr kiradi va uni musbat hajmiy zaryad Q_v^+ va manfiy sirt zaryad Q_s^- larning tenglik sharti $Q_v^+ = Q_s^-$ dan aniqlaymiz.

$$\begin{aligned}Q_{sv}^+ &= \frac{4\pi e}{\epsilon_n} \int_0^{L_D} \left[n_0 \left(\exp \frac{e\varphi(x)}{kT} - 1 \right) - p_0 \left(\exp \frac{e\varphi(x)}{kT} - 1 \right) \right] dx \\ &= 2en_i L_* F(\lambda, Y_s)\end{aligned}$$

$$Q_{ss}^- = -e \int_0^{E_s} f_s(E_s) g_s(E_s) dE_s$$

bunda $f_s(E_s)$ - sirt energetik sathining egallanganlik darajasi, $g_s(E_s)$ - bu sathlarning holatlar zichligi. Akseptor tipidagi monoenergetik sirt sathi uchun

$$Q_{ss}^- = \frac{-eN_s}{e^{\frac{E_s - E_F}{kT}} + 1}$$

munosabat o'rinli, bunda N_s va E_s - sirt holatlar konsentratsiyasi (m^{-2}) va aktivlashish energiyasi, E_F - Fermi energiyasi. $L_{D\parallel}$ va $\varphi_{s\parallel}$, $L_{D\perp}$ va $\varphi_{s\perp}$ kattaliklarini umumiy holda faqat sonli usul bilan hisoblash mumkin. Ular juft-juft holda mos ravishda R_1 , R_{21} va R_{23} qarshiliklarni aniqlaydi.

Yuqorida 3-rasmda keltirilgan model asosida PbS tipidagi polikristall yarim o'tkazgich namunalarning tenzosezgirlik ko'effitsiyentini umumiy (1) va chegaraviy (10), (11) formulalar asosida hisoblasak

$$\begin{aligned}\omega &= 0 \\ K_0 &= \frac{R_x}{R_0} K_x + \frac{R_{b\perp}}{R_0} K_{b\perp} \\ \omega &\rightarrow \infty\end{aligned}$$

$$K_\infty = \frac{R_x}{R_0} \left(1 - \frac{8R_x}{R_1} \right) K_x + 4 \left(\frac{R_x}{R_1} \right)^2 \frac{R_1}{R_\infty} K_1$$

Ifodalarga kelamiz. Bu yerda

$$R_1 = R_x \frac{1 - \lambda_1}{(1 - \lambda_1)^2}$$

Kristallit kvazineytral hajmining qarshiligi bo'lib, unga

$$R_x = \rho \frac{\ell_0}{S_t}, \quad \lambda_1 = \frac{L_{D\parallel} + L_{D\perp}}{\ell_0}, \quad \lambda_2 = \frac{2L_D}{\ell_0}.$$

qarshiliklar R_0 va R_∞ (10) va (11) formulalar bilan aniqlanadi. R_1 va $R_{b\perp}$ lar esa quyidagi munosabatlardan topiladi.

$$\begin{aligned}R_1 &= R_x p f_1, \\ f_1 &= \frac{L_0}{\ell_0} \int_{Y_s}^0 \frac{\exp(Y) + \lambda^2 \exp(-Y)}{F(\lambda, Y)} dY \\ R_{b\perp} &= R_x (f^+ + f^-) + R_{D\perp} \\ f^\pm &= \frac{L_D}{\ell_0 (1 - \lambda_1)^2} \int_{Y_s}^0 \frac{F^{-1}(\lambda, Y) dY}{\exp(Y) \pm \lambda^{-2} \exp(-Y)}\end{aligned}$$

Agar ko'ndalang dielektrik qatlamlar orqali elektr toki tunnel mexanizmi asosida oqib o'tadi deb hisoblasak, u holda $R_{D\perp}$ ni 5-rasmga ko'ra

$$R_{D\perp} = R_D \exp \left(- \frac{2\sqrt{2m_n^*}}{h} \sqrt{W_s - E_d} d_0 \right)$$

ko'rinishida ifodalash mumkin.

Polikristall pyezozarshiligiga kvazineytral hajmlar, ko'ndalang va bo'ylama potensial to'siqlar sohalarining qo'shadigan parsial ulushlarini mos holda aniqlovchi K_x , $K_{b\perp}$ va K_1 tenzosezgirlik ko'effitsiyentlari

$$\begin{aligned}K_x &= \frac{dR_x}{R_x d\epsilon}, \\ K_{b\perp} &= \frac{dR_{b\perp}}{R_{b\perp} d\epsilon} = K'_{b\perp}, \\ K_1 &= \frac{dR_1}{R_1 d\epsilon} = K''_{b\perp},\end{aligned}$$

ko'rinishida aniqlanadi. (14) ni (19) ga qo'yib

$$\begin{aligned}K_x &= 1 + 2\nu + \bar{m} + K_{\text{reom}}^s, \\ K_{\text{reom}}^s &= \frac{d(L_{D\parallel} + L_{D\perp})}{\ell_0 d\epsilon} + 4 \frac{dL_{D\perp}}{\ell_0 d\epsilon}.\end{aligned}$$

larni olamiz. Bu yerda K_{reom}^s - sirt elektron holatlarining qayta zaryadlanishi natijasida bo'ylama va ko'ndalang hajmiy zaryadlar sohalar

geometrik o'lchamlarining modulyasiyalanishi bilan bog'liq tenzosezgirlik;

ν - kristall uchun Puasson koeffitsiyenti; $\bar{m}$ - fazoviy yo'nalishlar bo'yicha $(m_{11} + m_{12})/2$ ni o'rtachalashtirish natijasida olingan elastoqarshilik doimiyliigi.

(22) ifodadan ko'rinadiki, agar kristall doning kam qarshilik sohasining o'lchami

$l_0 > L_D$, ya'ni hajmiy zaryadlar sathlarining o'lchamlaridan juda katta bo'lsa, bu esa o'z navbatida ingichka zonali kristall ikki sirt holatlar konsentratsiyasi N_s oz hollarda bajariladi, K_{geom}^s ulushi juda kichik va uni e'tiborga olmasak ham bo'ladi. Xuddi shunday holat boshqa bir chegaraviy shart $l_0 \ll L_D$ va $dL_0/d\varepsilon \ll l_0$ da ham o'rinlidir. Tabiiyki $dL_0/d\varepsilon \ll l_0$ shart bajarilganda, ma'lum texnologik sharoitlarda ustirilgan yuqori qarshilik namunalarda amalga oshadi, K_{geom}^s kattalik yetarlicha qiymatlarga ega va natijada deformatsiya vaqtida kvazineytral hajmlar geometrik o'lchamlarining modulyasiyasi polikristallarda katta pyezoqarshilik effektiga olib keladi. (16) va (17) larni (21) va (20) larga qo'yib,

$$K_{b\Box} = \left[1 + 2\nu + m + \frac{d(f^+ + f^-)}{(f^+ + f^-) d\varepsilon} \right] \frac{R_x(f^+ + f^-)}{R_{b\Box}} + \left[1 + 2\nu_D + m_D \right] \frac{R_{D\Box}}{R_{b\Box}} + \exp \left(-\frac{2\sqrt{2m_n^*}}{h} \sqrt{W_s - E_d + \frac{\Delta W}{\sqrt{W_s - E}}} \right) d_0 \frac{R_{D\Box}}{R_{b\Box}}$$

$$K_{b\parallel} = 1 + 2\nu + m - \frac{df_1}{f_1 d\varepsilon}$$

fodalarga kelimiz. Bu yerda ν_0 va m_0 - ko'ndalang dielektrik qatlamning Puasson koeffitsiyenti va elastoqarshilik doimiysi; ΔW - bir o'qli deformatsiyada kristallitning dielektrik bilan chegarasidagi potensial to'siq balandligining o'zgarishi. Shuni ta'kidlash joizki, berilgan lokalizatsiya kristallit va ko'ndalang dielektrik qatlamlardagi deformatsiya kattaliklari ε_1 va ε_2 larning qiymatlari turlichadir:

$$\varepsilon_1 = \frac{dE_2}{\ell_0 E_2 + d_0 E_1} \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \frac{dE_1}{\ell_0 E_2 + d_0 E_1} \varepsilon,$$

bunda E_1 va E_2 - mos holda kristallit va ko'ndalang dielektrik qatlam Yung modullari (3-rasm). Oxir oqibatda

$$K_{geom}^s, \frac{d(f^+ + f^-)}{(f^+ + f^-) d\varepsilon}, \frac{df_1}{f_1 d\varepsilon} \text{ ba } \Delta W_s,$$

kattaliklarni hisoblash (10)-(14) tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi.

Bu esa faqat sonli hisob usulidagina bajarilishi mumkin. Oxirgi kattaliklarning barchasi sirt holatlar energetik sathlarining deformatsiya tufayli siljishi va buning oqibati o'laroq, ko'ndalang sirt elektron holatlari o'rtasida zaryad tashuvchilarning oqib o'tish effekti bilan bog'langan.

5-rasm. Elektr toki o'tish yo'nalishida kristall don energetik zonasining sxematik diagrammasi.

Shunday qilib, ushbu maqolada polikristall yarim o'tkazgichlarning deformatsiya ta'sirida elektr qarshiligining o'zgarishi, ya'ni tenzoqarshilik masalasi kubik kristall donlar modeli asosida nazariy tahlil qilingan va tenzoqarshilikning hozirgacha ma'lum bo'lgan mexanizmlari ko'rib chiqilgan. Kubik kristall don bir o'qli deformatsiyaga uchraganda tenzoqarshilikning yangi mexanizmi yaratilgan: kristall donning impedansi hisoblab chiqilgan, so'ngra tok yo'nalishiga (deformatsiya yo'nalishi bilan bir xil mos kelgan) bo'ylama va unga tik ko'ndalang sirt elektron holatlar ta'siri hisobga olingan holda tenzoqarshilik koeffitsiyenti hisoblangan, kvadraturada analitik natijalar olingan.

Adabiyotlar

- [1] He J., *et al.* Recent advances of wearable and flexible piezoresistive pressure sensor devices and its future prospects. *Journal of Materiomics*, 6(1), 86–101 (2020). DOI: 10.1016/j.jmat.2019.10.002
- [2] Yu H., *et al.* Flexible temperature–pressure dual sensor based on 3D spiral thermoelectric Bi_2Te_3 films. *Nature Communications*, 15, 2521 (2024). DOI: 10.1038/s41467-024-46836-1
- [3] Daliev Kh. S., Ahmedov M. M., Onarkulov M. K. Influence of the temperature and cyclic deformations of $(\text{Bi}_x\text{Sb}_{1-x})_2\text{Te}_3$ films on their resistance. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 94(5), 1369–1373 (2021). DOI: 10.1007/s10891-021-02419-1
- [4] Sulaymonov X. M. Tsiklik deformatsiyalar ta'sirida $(\text{Bi}_{0.3}\text{Sb}_{0.7})_2\text{Te}_3$ yupqa plyonkalar qarshiligining temperaturaviy bog'lanishi. *Ilmiy-texnik jurnal FerPI (STJ FerPI)*, 2015, №4, 104–106. (Rus tilida).

Стратегии оптимизации термоэлектрических параметров в системе Bi–Sb–Te для термоэлектрической генерации

УДК: 537.32:621.315.592

Д.А.Юсупова¹, С.З.Сирождидинова¹, М.Ш.Рузиматова¹¹Ферганский государственный университет, кафедра «Физика», Фергана, [150100], Узбекистан. E-mail: dilfuza.physic@mail.ru

Annotatsiya: Bi–Sb–Te tizimi 300–450 K oralig'ida ishlaydigan past temperaturali termoelektr generatorlar uchun asosiy materiallardan biri hisoblanadi. Ushbu ishda p-tipli Bi–Sb–Te materiallari parametrlarini SPB modeli asosida hisoblash yondashuvi taklif qilindi. ZT(T,p) xaritalari, Pisarenko bog'lanishlari va optimal legirlash oynasi aniqlandi. Zonalar yaqinlashuvi ZT ni oshirishi va optimal tashuvchilar konsentratsiyasini yuqoriroq sohaga siljitishi ko'rsatildi.

Kalit so'zlar: Bi–Sb–Te, termoelektrik generatsiya, ZT, SPB model, Pisarenko bog'lanishi, zonalar yaqinlashuvi, legirlash, tashuvchilar konsentratsiyasi.

Аннотация: Система Bi–Sb–Te является одной из основных платформ низкотемпературных термоэлектрических материалов для генерации в диапазоне 300–450 K. В работе выполнена расчётная оптимизация параметров p-типа Bi–Sb–Te в рамках SPB-модели. Построены карты ZT(T,p), определены зависимости Писаренко и окно оптимального легирования. Показано, что сближение зон повышает ZT и смещает оптимальную концентрацию носителей в область более высоких значений.

Ключевые слова: Bi–Sb–Te, термоэлектрическая генерация, ZT, SPB-модель, зависимость Писаренко, сближение зон, легирование, концентрация носителей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Термоэлектрическое преобразование энергии представляет собой один из перспективных способов прямого получения электричества из теплового потока, особенно в системах утилизации низкопотенциального тепла и автономного энергоснабжения [1]. Ключевым параметром, описывающим потенциальную эффективность термоэлектрического материала, является безразмерная добротность:

$$ZT = \frac{S^2 \sigma T}{\kappa} = \frac{S^2 \sigma T}{\kappa_E + \kappa_L}$$

где S — коэффициент Зеебека, σ — электропроводность, T — абсолютная температура, κ — суммарная теплопроводность, κ_E и κ_L — электронная и решёточная составляющие теплопроводности. Повышение ZT принципиально осложняется тем, что величины S , σ и κ_E не являются независимыми: изменение концентрации носителей, эффективной массы и механизмов рассеяния одновременно влияет на электрический и тепловой перенос [2]. Повышение термоэлектрической эффективности связано с необходимостью одновременной оптимизации электронного и теплового транспорта, что делает задачу поиска «наилучшего термоэлектрика»

многопараметрической и существенно зависящей от особенностей зонной структуры и механизмов рассеяния [3, 4]. Поэтому оптимизация термоэлектрических свойств требует согласованного управления электронной подсистемой (для повышения коэффициента мощности $PF = S^2 \sigma T$) и фононной подсистемой (для снижения κ_L). Среди наиболее эффективных низкотемпературных термоэлектрических материалов особое место занимают соединения на основе теллурида висмута, отличающиеся сложным характером взаимосвязи между электронной структурой, концентрацией носителей и теплопереносом. Для низкотемпературной области (вблизи комнатной температуры) наиболее значимыми остаются материалы семейства Bi_2Te_3 , включая твёрдые растворы с Sb_2Te_3 (p-тип) и Bi_2Te_3 (n-тип). Их практическая ценность определяется сочетанием высокой термоэлектрической эффективности при 300–450 K и технологической реализуемости в виде объёмных поликристаллических материалов. В системе Bi–Sb–Te можно целенаправленно изменять свойства за счёт выбора соотношения Bi/Sb/Te, управления концентрацией носителей (через легирование и дефектную химию), а также контроля микроструктуры, влияющей на κ_L и эффективную подвижность [5,6].

При этом для термоэлектрической генерации (TEG) принципиально важна специфика эксплуатации: термоэлемент работает на температурном градиенте, а материал имеет фиксированное легирование, т.е. «перенастройка» концентрации носителей с температурой невозможна. Следовательно, в инженерном смысле наиболее полезно не только знание максимума ZT при одной температуре, но и понимание того, в каких областях параметров (T, p) материал сохраняет высокий ZT на всём рабочем интервале температур. В этой логике эффективным инструментом становятся карты проектирования (design maps) $ZT(T, p)$, позволяющие: (i) визуализировать область повышенных значений ZT , (ii) определить траекторию оптимальной концентрации $p_{opt}(T)$, и (iii) оценить ширину «окна легирования», важного для технологической воспроизводимости и

устойчивости характеристик в режиме генерации.

Одной из перспективных материаловедческих стратегий в Bi–Sb–Te является сближение зон (BC, band convergence) — сближение по энергии нескольких экстремумов зонной структуры, что увеличивает эффективную долинную вырожденность N_v и/или массу плотности состояний m_d^* . В термоэлектрических моделях это может приводить к более благоприятному соотношению между S и σ , однако реальный выигрыш часто ограничивается снижением подвижности μ из-за изменения эффективной массы и усиления рассеяния [7, 8]. Поэтому при вычислительном анализе важно рассматривать сценарий, где рост плотности электронных состояний (DOS, density of states) учитывается вместе с учётом снижения подвижности μ .

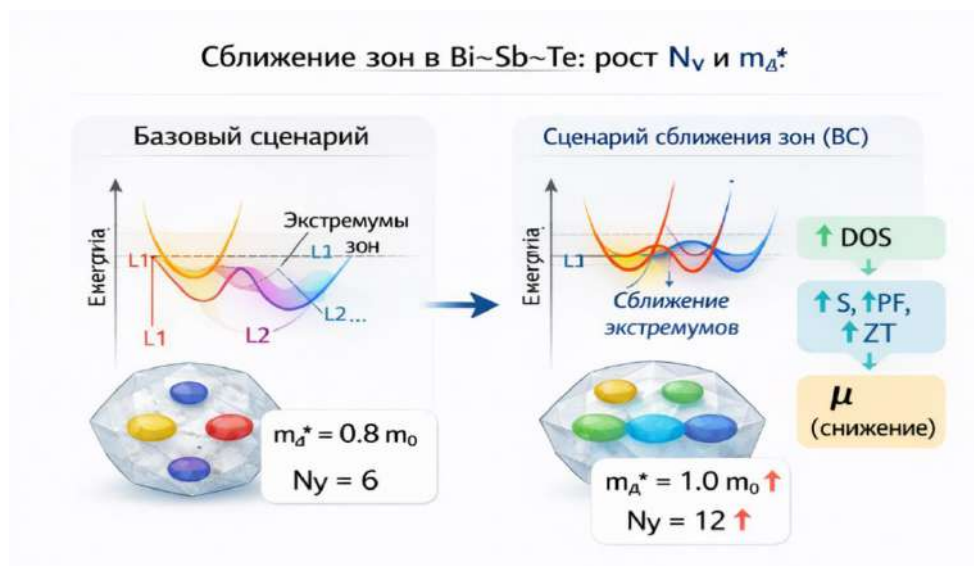


Рис.1. Концепция сближения зон (band convergence) в Bi–Sb–Te и её отражение в параметрах модели (N_v , m_d^*) с учётом снижения μ .

Для корректной интерпретации транспортных характеристик материалов семейства Bi_2Te_3 важное значение имеет анализ их кристаллической структуры, межатомных связей и особенностей электронной зонной структуры [9, 10]. Существенное влияние на термоэлектрические свойства материалов на основе Bi_2Te_3 оказывает легирование,

позволяющее изменять концентрацию носителей, подвижность и энергетическую структуру материала [11, 12].

Для p-типа Bi_2Te_3 особый интерес представляет определение оптимального диапазона концентраций носителей, обеспечивающего наилучшее соотношение между коэффициентом Зеебека,

электропроводностью и теплопроводностью [13].

Цель настоящей работы — выполнить вычислительное проектирование р-типа Bi–Sb–Te для режима TEG в диапазоне 300–450 К и сформировать практические рекомендации по оптимизации параметров. Для достижения цели решаются следующие задачи:

1. построить карты проектирования $ZT(T, p)$ для базового сценария и сценария сближения зон;
2. определить окно оптимальных концентраций p_{opt} и проследить его температурную эволюцию;
3. рассчитать зависимости Писаренко $S(p)$ и связать их с окном p_{opt} как с практическим критерием настройки легирования;
4. построить сечения $ZT(p)$ при $T = \{300, 350, 400, 450\}$ К для анализа формы максимума и смещения оптимума;
5. сформировать вычислительную «дорожную карту» дальнейшей экспериментальной оптимизации состава и технологии получения материалов Bi–Sb–Te для термоэлектрической генерации.

2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Работа выполнена как вычислительное исследование, ориентированное на режим термоэлектрической генерации (TEG) в диапазоне температур 300–450 К. Задача сформулирована как анализ зависимостей термоэлектрических характеристик от температуры T и концентрации носителей p с построением карты $ZT(T, p)$, а также сечений $S(p)$ (зависимость Писаренко) и $ZT(p)$ при выбранных температурах. Выбор модельных параметров и их варьирование в рамках рассматриваемых сценариев согласуется с ранее выполненными исследованиями электрофизических свойств термоэлектрических материалов на основе висмут-сурьма-теллуридов [14]. Такой подход позволяет определить оптимальные области по p и оценить чувствительность эффективности к

отклонениям легирования и к изменению зонных параметров.

Безразмерная добротность записывается как:

$$ZT = \frac{S^2 \sigma T}{\kappa}, \quad \kappa = \kappa_e + \kappa_L$$

где κ_e - электронная, κ_L — решёточная теплопроводность. Для электронного вклада используется обобщённый закон Видемана–Франца:

$$\kappa_e = L \sigma T,$$

где L - коэффициент Лоренца, рассчитываемый в рамках транспортной модели и не принимаемый постоянной величиной.

Коэффициент Лоренца определяется по формуле

$$L = \left(\frac{k_B}{e}\right)^2 \left[\frac{\left(r + \frac{7}{2}\right) F_{r + \frac{5}{2}}(\eta)}{\left(r + \frac{3}{2}\right) F_{r + \frac{1}{2}}(\eta)} - \left(\frac{\left(r + \frac{5}{2}\right) F_{r + \frac{3}{2}}(\eta)}{\left(r + \frac{3}{2}\right) F_{r + \frac{1}{2}}(\eta)} \right)^2 \right],$$

где k_B - постоянная Больцмана, e - элементарный заряд, $F_j(\eta)$ — интеграл Ферми–Дирака порядка j , η — приведённый уровень Ферми, r — показатель энергетической зависимости времени релаксации, задаваемой соотношением $\tau \propto \varepsilon^r$, характеризующий механизм рассеяния носителей заряда

Решёточная теплопроводность задаётся простой убывающей функцией:

$$\kappa_L(T) = \kappa_{L,300} \frac{300}{T}$$

где $\kappa_{L,300} = 1.2 \text{ Вт м}^{-1} \text{ К}^{-1}$. Такая параметризация обеспечивает воспроизводимый базовый сценарий и позволяет сосредоточить анализ на влиянии концентрации носителей и зонных параметров.

Для описания переноса применена одно-параболическая модель зон (SPB), в которой термоэлектрические коэффициенты выражаются через приведённый уровень Ферми η и полные интегралы Ферми–Дирака:

$$F_j(\eta) = \int_0^\infty \frac{x^j}{1 + \exp(x - \eta)} dx$$

где $x = \frac{\varepsilon}{k_B T}$ - безразмерная энергия носителя, j — порядок интеграла Ферми–Дирака.

В настоящем исследовании для базового сценария принято $\gamma=0$, что соответствует приближению постоянного времени релаксации и используется как упрощённая параметризация для инженерного сравнения влияния концентрации носителей и зонных параметров. Анализ влияния концентрации носителей и зонных параметров представляет практический интерес также с точки зрения изучения термоэлектрических свойств и механизмов чувствительности сплавов системы Bi–Sb–Te [15].

В термоэлектрических исследованиях широко используется зависимость Писаренко $S(p)$, отражающая связь между коэффициентом Зеебека S и концентрацией носителей заряда p . Она позволяет оценить влияние уровня легирования и особенностей зонной структуры на термоэлектрические параметры материала. Коэффициент Зеебека вычисляется по формуле:

$$S = \frac{k_B}{e} \left[\frac{\left(r + \frac{5}{2}\right) F_{r+\frac{3}{2}}(\eta)}{\left(r + \frac{3}{2}\right) F_{r+\frac{1}{2}}(\eta)} - \eta \right]$$

Концентрация дырок выражается как

$$p(\eta, T) = N_v \cdot \frac{2(2m_d^* k_B T)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} F_{1/2}(\eta)$$

где $F_j(\eta)$ - интеграл Ферми–Дирака порядка j , m_d^* - эффективная масса плотности состояний, N_v - эффективная долинная вырожденность, T — абсолютная температура, $\hbar$ — постоянная Планка.

Электропроводность определяется классическим соотношением

$$\sigma = e p \mu.$$

В работе сравниваются два сценария:

- **Base (базовый):** $m_d^* = 0.8m_0$, $N_v=6$, $\mu_{300}=0.02$ м²/Вс.
- **ВС (реалистичный сценарий сближения зон):** $m_d^* = 1m_0$, $N_v=12$, при этом учитывается реалистичный штраф по подвижности из-за увеличения m_d^* :

$$\mu_{300}^{BC*} = \mu_{300}^{Base*} \left(\frac{m_d^*}{m_{d,0}^*} \right)^{-\gamma} \gamma=1.$$

Чтобы связать “чистую” SPB-часть с реалистичным уровнем рассеяния, подвижность задана функцией температуры и концентрации:

$$\mu(T, p) = \mu_{300} \left(\frac{T}{300} \right)^{-\alpha} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{p}{p_{ref}} \right)^\beta} \right)$$

где μ_{300} - подвижность при 300 К, α - показатель температурной зависимости, p_{ref} и β описывают снижение μ при росте p . В расчётах использованы $\alpha=1.5$, $\beta=1$, $p_{ref}=2 \times 10^{19}$ см⁻³.

Таким образом, сценарий ВС моделирует физически реалистичную ситуацию, в которой повышение плотности состояний сопровождается частичным снижением подвижности μ . Иными словами, улучшение термоэлектрических параметров достигается ценой определённых транспортных потерь.

Карты проектирования $ZT(T, p)$ формировались в температурном диапазоне $T=300-450$ К (шаг 5 К). Для каждого значения температуры выполнялось сканирование по приведённому уровню Ферми $\eta \in [-6, 6]$ (401 точка), после чего вычислялись $p(T, \eta)$, $S(\eta)$, $L(\eta)$, $\sigma(T, p)$, $\kappa_e(T, p) = L\sigma T$ и $ZT(T, \eta)$. Далее значения ZT интерполировались на логарифмическую сетку концентраций $p \in [10^{18.6}, 10^{19.8}]$ см⁻³ (220 точек), что позволяло получить матрицу $ZT(T, p)$ и траекторию оптимальной концентрации $p_{opt}(T)$ как максимум ZT по η при каждом T (см. рис. 2).

На следующем шаге рассчитывались зависимости Писаренко $S(p)$ при $T=\{300, 350, 400, 450\}$ К и на них наносилось окно оптимального легирования, определённое по набору значений $p_{opt}(T)$ (5–95% диапазон) (см. рис. 3). Аналогично строились сечения $ZT(p)$ при тех же температурах с выделением окна p_{opt} , что позволяло визуализировать максимум ZT и его смещение между сценариями (см. рис. 4).

III. РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2 представлены карты проектирования $ZT(T, p)$ для p-типа Bi–Sb–Te в диапазоне 300–450 К: (а) базовый сценарий и (б) сценарий сближения зон (band convergence) в реалистичной постановке (BC). В обоих картах прослеживается характерная область

эффективного легирования т.е. повышенных значений ZT в координатах $(T, \log_{10}(p))$. Максимум по концентрации формирует “хребет” (ridge) эффективности, который удобно описывается траекторией $\rho_{opt}(T)$ - концентрацией, при которой ZT достигает максимума при фиксированной температуре (белая линия на рис. 2).

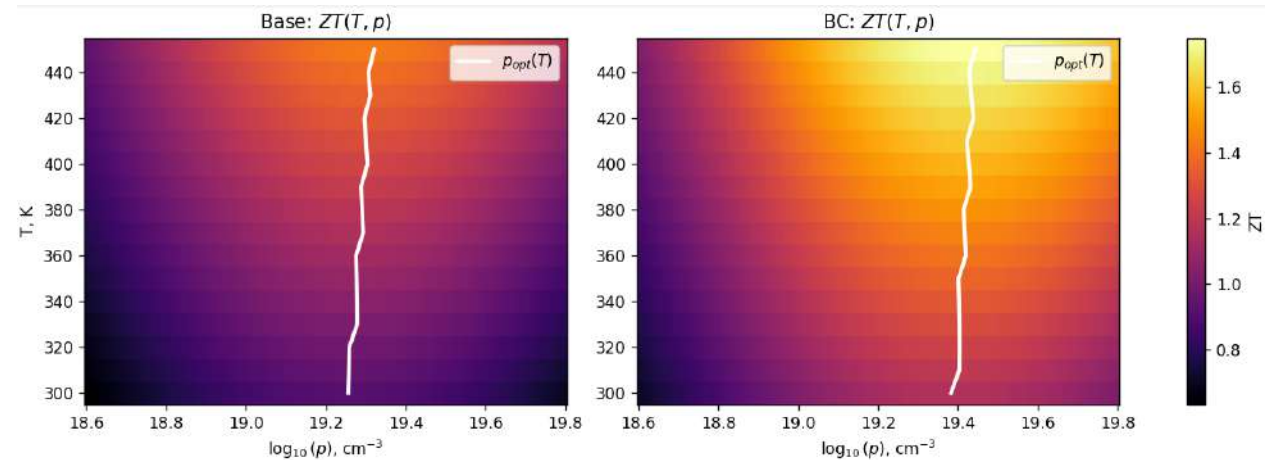


Рис. 2. Карта проектирования (design map) термоэлектрических свойств р-типа Bi–Sb–Te в рамках одно-параболической модели зон (SPB) в диапазоне 300–450 К: (а) базовый сценарий и (b) сценарий band convergence BC ($m_d^* = 1.0m_0$, $N_v = 12$, штраф по подвижности $\mu_{300} \propto (m_d^*)^{-1}$). Цветовая шкала соответствует полю $ZT(T, p)$ в координатах T и $\log_{10}(p)$. Белая кривая показывает $\rho_{opt}(T)$, обеспечивающую максимум ZT при каждой температуре.

Сравнение панелей рис. 2 показывает две принципиальные особенности сценария ВС по отношению к базовому:

- 1. поле высоких значений ZT становится более “богатым” (в среднем ZT выше в значительной части области (T, p)),
- 2. траектория $\rho_{opt}(T)$ смещается в сторону более высоких концентраций носителей.

Это согласуется с физикой параметризации сближения зон: увеличение N_v и m_d^* повышает плотность состояний вблизи уровня Ферми, а значит изменяет связь между η и p , что приводит к смещению оптимального окна легирования.

Таблица 1. Параметры расчётных сценариев и ключевые итоговые метрики (р-тип Bi–Sb–Te, режим генерации 300–450 К)

Параметр / метрика	Базовый сценарий (Base)	Реалистичный сценарий сближения зон ВС с учётом снижения μ
m_d^*	0.8 m_0	1.0 m_0
N_v	6	12
μ_{300} , $m^2/V \cdot s$	0.0200	0.0160
α в $\mu(T, p)$	1.5	1.5
β в $\mu(T, p)$	1.0	1.0
p_{ref} , cm^{-3}	2×10^{19}	2×10^{19}
$\kappa_{L,300}$, $Вт \cdot м^{-1} \cdot К^{-1}$	1.2	1.2
Температурный диапазон	300–450 К	300–450 К
Окно ρ_{opt} (5–95%), cm^{-3}	$1.809 \times 10^{19} \dots 2.062 \times 10^{19}$	$2.494 \times 10^{19} \dots 2.753 \times 10^{19}$
$ZT_{300-450}$	≈ 1.169	≈ 1.461

Смещение оптимального окна концентрации носителей в сценарии ВС в область более высоких значений согласуется с представлениями о сближении зон и с результатами исследований, посвящённых оптимизации термоэлектрических свойств теллуридов висмута и сурьмы посредством легирования [7, 12, 13].

Для технологической реализации термоэлектрических материалов в режиме генерации важно, чтобы фиксированное легирование обеспечивало высокий уровень ZT не при одной температуре, а во всём рабочем диапазоне. Поэтому вместо единичного значения $p_{opt}(T)$ при заданном T в работе введено окно оптимального легирования, определённое как 5–95% диапазон по набору значений $p_{opt}(T)$, извлечённых из карты $ZT(T,p)$ (рис. 2) при $T=300\text{--}450\text{ K}$.

В базовом сценарии получено

$$p_{opt}^{Base} = (1.809 - 2.062) \times 10^{19} \text{ см}^{-3},$$

тогда как в сценарии ВС-В окно оптимума смещается в область более высоких концентраций:

$$p_{opt}^{BC} = (2.494 - 2.753) \times 10^{19} \text{ см}^{-3}.$$

Сдвиг p_{opt} в ВС является ожидаемым следствием параметризации стратегии

сближения зон (ВС) через увеличение массы плотности состояний m_d^* и долиной вырожденности N_v : при большем DOS требуемая концентрация для достижения оптимального режима по η оказывается выше. Практически это означает, что при реализации условий, соответствующих сближению зон, целевую настройку состава и дефектной химии следует ориентировать на более высокие концентрации носителей по сравнению с базовым сценарием. Полученные зависимости также согласуются с представлениями о влиянии особенностей кристаллической и электронной структуры Bi_2Te_3 -подобных материалов на транспортные параметры [9, 10].

На рис. 3 приведены зависимости Писаренко $S(p)$ при $T=\{300, 350, 400, 450\}$ K для обоих сценариев. Кривые демонстрируют ожидаемую тенденцию: коэффициент Зеебека уменьшается при росте концентрации носителей, что отражает усиление вырождения и смещение уровня Ферми. При этом с увеличением температуры значения S для фиксированной концентрации оказываются выше, что согласуется с термодинамической природой S и его чувствительностью к распределению носителей по энергиям.

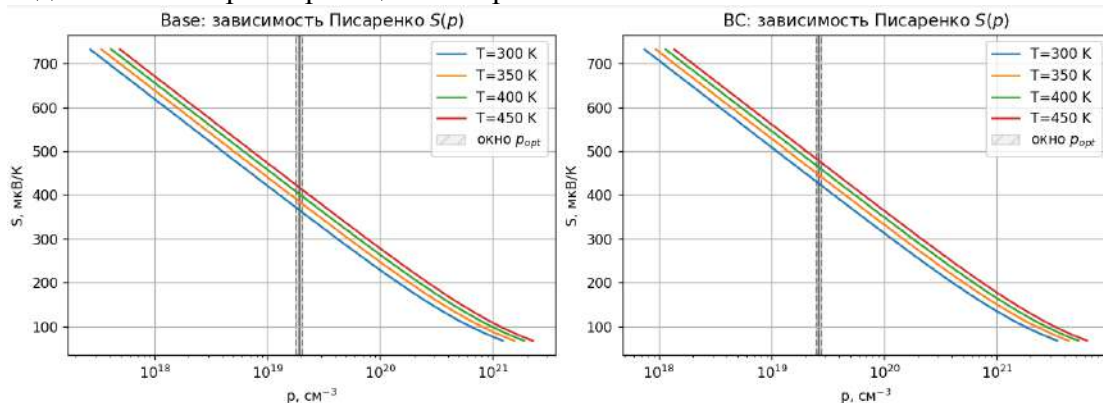


Рис. 3. Зависимость Писаренко $S(p)$ для р-типа Bi-Sb-Te при температурах 300, 350, 400 и 450 K: (а) базовый сценарий и (б) сценарий ВС. Полупрозрачная область обозначает окно оптимальной концентрации p_{opt} (5–95% диапазон значений $p_{opt}(T)$, полученных из карты $ZT(T,p)$, Рис. 2) и показывает значения S , соответствующие оптимальному легированию в рабочем температурном диапазоне термоэлектрической генерации.

Ключевой элемент интерпретации рис. 3 — нанесение полупрозрачной области, соответствующей окну p_{opt} из рис.2.

Благодаря этому зависимость Писаренко используется не как “общая теоретическая кривая”, а как практический инструмент:

она показывает, какие значения S соответствуют оптимальному легированию в рабочем диапазоне температур термоэлектрической генерации (300–450 K). В частности, сдвиг окна ρ_{opt} в ВС означает, что оптимальный режим достигается при

более высоких концентрациях, где S закономерно ниже, однако суммарный эффект (с учётом σ и κ_e) приводит к выигрышу в ZT , что подтверждается картой рис. 2 и кривыми рис. 3.

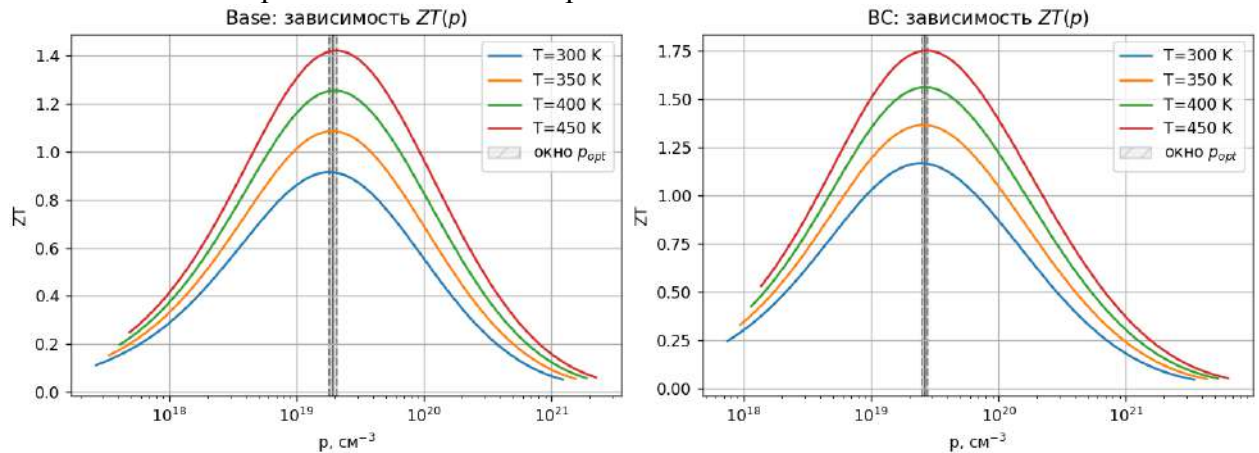


Рис. 4. Расчётные зависимости $ZT(p)$ для p-типа Bi-Sb-Te при температурах 300, 350, 400 и 450 K: (a) базовый сценарий и (b) сценарий ВС. Полупрозрачная область соответствует окну ρ_{opt} (5–95% по $\rho_{opt}(T)$, Рис.2). Наличие выраженного максимума $ZT(p)$ отражает компромисс между ростом электропроводности и увеличением электронного вклада в теплопроводность при повышении концентрации носителей.

Рис. 4 показывает зависимости $ZT(p)$ при тех же температурах $T = \{300, 350, 400, 450\}$ K. Во всех случаях наблюдается выраженный максимум ZT по концентрации, что является прямым следствием конкурирующих тенденций: рост p увеличивает σ , но одновременно снижает S и повышает электронный вклад в теплопроводность κ_e . Поэтому после определённого значения p дальнейшее увеличение концентрации приводит к убыванию ZT .

Полупрозрачная область ρ_{opt} на рис. 4 располагается вблизи вершины кривых, что показывает согласованность результатов: окно, найденное из карты $ZT(T, p)$, действительно соответствует области максимума $ZT(p)$ на одномерных сечениях. Для ВС кривые $ZT(p)$ располагаются выше по уровню, а оптимальная область смещается вправо, что соответствует общему тренду рис. 2 и подтверждает преимущество стратегии сближения зон при реалистичном учёте штрафа по подвижности.

Для генераторного режима целесообразно оценивать эффективность не в одной температурной точке, а как

интегральную характеристику по диапазону :

$$\overline{ZT}_{300-450} = \frac{1}{450 - 300} \int_{300}^{450} ZT(T) dT.$$

По полученным расчётам (для заданного набора параметров модели) средние значения составили:

$$\overline{ZT}_{300-450}^{Base} \approx 1.169,$$

$$\overline{ZT}_{300-450}^{BC} \approx 1.461,$$

Таким образом, сценарий ВС обеспечивает заметный рост интегральной эффективности в рабочем диапазоне температур TEG, а не только локальное улучшение при одной температуре.

IV. ОБСУЖДЕНИЕ

Генераторный режим принципиально отличается тем, что термоэлемент работает на распределении температур, тогда как легирование материала фиксировано. Поэтому информативнее не одна кривая $ZT(T)$, а именно область высоких ZT в координатах (T, p) . Построенная карта (Рис.2) позволяет оценить, насколько “широк” оптимум по концентрации и насколько устойчив материал к технологическим вариациям p .

Наличие траектории $p_{\text{opt}}(T)$ даёт ориентир для целевой настройки концентрации, а ширина области высоких ZT определяет практическую воспроизводимость.

Зависимость Писаренко $S(p)$ сама по себе отражает общий тренд “больше p — меньше S ”. Однако её практическая ценность резко возрастает, когда на график нанесено окно p_{opt} : тогда становится видно, какие значения S соответствуют оптимальному режиму именно для TEG в 300–450 К. Это превращает Рис.3 в инструмент контроля легирования: измеренный экспериментально S можно сопоставлять с расчётным диапазоном S в окне p_{opt} . Сечения $ZT(p)$ (Рис.4) демонстрируют чётко выраженный максимум, возникающий из конкуренции эффектов: увеличение p повышает σ , но снижает S и увеличивает электронную теплопроводность κ_e . Поэтому ZT растёт до некоторого оптимального диапазона концентраций и затем уменьшается. Совпадение области максимума $ZT(p)$ с окном p_{opt} , полученным из Рис.2, подтверждает внутреннюю согласованность результатов и корректность логики design map $\rightarrow$ Зависимость Писаренко $\rightarrow$ ZT(p).

Сближение зон (BC) в данной работе отражено через увеличение N_v и m_d^* , то есть через усиление плотности состояний вблизи уровня Ферми. В “идеализированных” сценариях такой подход мог бы давать завышенный выигрыш, если считать μ неизменной. Поэтому в BC-B введён учёт снижения подвижности μ , который моделирует ухудшение транспорта при увеличении эффективной массы и/или усилении рассеяния. Даже при этом реалистичном допущении карта $ZT(T, p)$ показывает расширение области высоких ZT и смещение оптимального окна к большим p .

Таким образом, BC демонстрирует, что стратегия сближения зон может оставаться эффективной даже при частичной потере подвижности, если выигрыш от роста DOS доминирует над снижением μ .

Практические выводы для оптимизации.

Полученные карты $ZT(T, p)$, зависимости Писаренко $S(p)$ и сечения $ZT(p)$ позволяют сформулировать прикладные рекомендации для настройки состава и легирования p-типа Bi–Sb–Te под TEG в диапазоне 300–450 К.

Во-первых, целевая область концентраций должна выбираться в пределах окна p_{opt} , определённого по рис. 2 и табл. 1, поскольку именно там обеспечивается максимальный уровень ZT во всём диапазоне температур.

Во-вторых, при реализации условий сближения зон (BC) оптимум смещается к более высоким концентрациям, что необходимо учитывать при выборе дефектной химии и легирующих добавок.

В-третьих, зависимости Писаренко дают прямую связь между оптимальным легированием и измеряемым параметром S , что позволяет использовать S как быстрый критерий контроля качества и воспроизводимости образцов.

Таким образом, предложенный вычислительный подход может служить практическим инструментом предварительного проектирования состава и параметров легирования перед экспериментальной верификацией.

V. ВЫВОДЫ

1. Построены карты проектирования $ZT(T, p)$ для p-типа Bi–Sb–Te в диапазоне 300–450 К и выделена траектория оптимального легирования $p_{\text{opt}}(T)$.
2. Показано, что сценарий сближения зон BC (рост m_d^* , N_v + учёт снижения подвижности μ) повышает ZT в широком диапазоне (T, p) и смещает оптимальное окно концентраций в сторону больших p .
3. Зависимости Писаренко $S(p)$ с нанесённым окном p_{opt} позволяют связать “теоретическую” оптимизацию с измеряемым параметром S и задают удобный критерий для экспериментальной настройки легирования.
4. Кривые $ZT(p)$ демонстрируют выраженный максимум и показывают, что окно p_{opt} соответствует области максимального ZT, обеспечивая

согласованность результатов Рис.2–Рис.4.

5. Полученные карты $ZT(T, p)$, окно $\rho_{\text{орт}}$ и зависимости $S(p)$ могут использоваться как практический ориентир для выбора легирования и планирования последующей экспериментальной верификации материалов Bi–Sb–Te для TEG в диапазоне 300–450 К.

Доступность данных и кода

Все расчёты выполнены в Python. Используемые скрипты обеспечивают воспроизводимость результатов, включая заданные сетки по T , η и p , кэширование интегралов Ферми–Дирака и автоматическую генерацию графиков (рис. 2–4). При необходимости код может быть предоставлен по запросу.

Литература

- [1]. Bell L.E. Cooling, heating, generating power, and recovering waste heat with thermoelectric systems // *Science*. – 2008. – Vol. 321. – № 5895. – P. 1457–1461. DOI: 10.1126/science.1158899.
- [2]. Goldsmid H.J. Introduction to Thermoelectricity. – 2nd ed. – Cham: Springer, 2016.
- [3]. Mahan G.D., Sofo J.O. The best thermoelectric // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. – 1996. – Vol. 93. – № 15. – P. 7436–7439. DOI: 10.1073/pnas.93.15.7436.
- [4]. Rowe D.M., ed. Thermoelectrics Handbook: Macro to Nano. – Boca Raton: CRC Press, 2006.
- [5]. Snyder G.J., Toberer E.S. Complex thermoelectric materials // *Nature Materials*. – 2008. – Vol. 7. – № 2. – P. 105–114. DOI: 10.1038/nmat2090.
- [6]. Witting I.T., Chasapis T.C., Ricci F., Peters M., Heinz N.A., Hautier G., Snyder G.J. The thermoelectric properties of bismuth telluride // *Advanced Electronic Materials*. – 2019. – Vol. 5. – № 6. – Article 1800904. DOI: 10.1002/aeml.201800904.
- [7]. Pei Y., Shi X., LaLonde A., Wang H., Chen L., Snyder G.J. Convergence of electronic bands for high performance bulk thermoelectrics // *Nature*. – 2011. – Vol. 473. – № 7345. – P. 66–69. DOI: 10.1038/nature09996.
- [8]. Heremans J.P., Jovovic V., Toberer E.S., Saramat A., Kurosaki K., Charoenphakdee A., Yamanaka S., Snyder G.J. Enhancement of thermoelectric efficiency in PbTe by distortion of the electronic density of states // *Science*. – 2008. – Vol. 321. – № 5888. – P. 554–557. DOI: 10.1126/science.1159725.
- [9]. Yusupova D.A., Sirojiddinova S. Analysis of the crystal lattice and band structure of Bi_2Te_3 as a material for thermoelectric and spintronic devices // *Scientific research of the SCO countries: Synergy and integration: Proceedings of the conference*. – Beijing, 2025. – Part 2. – P. 194–202.
- [10]. Yusupova D.A., Sirojiddinova S., Gaynazarova Q. Bi_2Te_3 kristallarida atomlararo bog'lanishlar va elektron tuzilishining o'ziga xos xususiyatlari // *Scientific Bulletin. Physical and Mathematical Research*. – 2025. – Vol. 7. – № 1. – P. 36–43.
- [11]. Onarkulov K., Yusupova D.A., Sirojiddinova S. Nodir yer elementlari bilan legirlangan Bi_2Te_3 qattiq qotishmasining elektrofizik va termoelektrik xossalari // *NamDU Ilmiy Axborotnomasi*. – 2025. – № 11.
- [12]. Yusupova D.A., Sirojiddinova S., Samatova M., Saidakhmatov N. Улучшение термоэлектрических характеристик Bi_2Te_3 посредством элементного легирования сурьмой // *International Scientific Journal "Endless Light in Science"*. – 2025. – P. 115–121. DOI: 10.24412/2709-1201-2025-302-115-121.
- [13]. Yusupova D.A., Sirojiddinova S.Z., Ruzimatova M.Sh. Оптимизация термоэлектрических свойств p-типа Bi_2Te_3 посредством легирования // *Материалы Международной научной конференции «Тенденции развития физики конденсированных сред»*. – Фергана, 2025. – С. 269–274.
- [14]. Yusupova D.A., Sirojiddinova S.Z., Ruzimatova M.Sh. Исследование электрофизических свойств термоэлектрического материала $\text{Bi}_{1-98}\text{Sb}_{0.02}\text{Te}_{3-x}\text{V}_x$ // *Материалы Международной научной конференции «Тенденции развития физики конденсированных сред»*. – Фергана, 2025. – С. 275–281.
- [15]. Yusupova D.A., Sirojiddinova S.Z., Samatova M.A. Bi–Sb–Te tizimidagi qotishmalarning termoelektrik xossalari va deformatsiyaga sezgirlik mexanizmlarining tahlili // *Raqamli innovatsiyalar bo'yicha xalqaro konferensiya: zamonaviy fizikaning dolzarb muammolari va yechimlari*. – Farg'ona, 2025. – Vol. 1. – P. 103–106.

Информация об авторах

Дилфуза, Аминовна, Юсупова – кандидат физико-математических наук, Ферганский государственный университет, кафедра «Физика», доцент. E-mail: dilfuza.physic@mail.ru

Телефон: + 998 90 530 17 23

Сарвинозхон, Зафаржон кизи, Сирожиддинова – Ферганского государственного университета, кафедра «Физика», базовый докторант E-mail: s.sirojiddinova@pf.fdu.uz.

Телефон: +998 90 303 09 70

Муслимахон, Шокиржон кизи, Рuzиматова –, Ферганский государственный университет, кафедра «Физика», магистрантка направления «Физика». E-mail: muslimaruzimatova87@gmail.com

Телефон: +998 91 157 22 51

Rodiy atomlari bilan legirlangan kremniy monokristallarining tuzilmaviy va fazaviy holatlari

UDK 539.216:621.315.592

A.Y. Boboyev¹, A.K.Rafikov², Z.M.Ibrohimov³, M.M.Arabboyeva¹¹Z.M.Bobur nomidagi Andijon davlat universiteti, 1700100, Andijon, O'zbekiston²O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Yadro fizikasi instituti, Toshkent, O'zbekiston³Andijon davlat texnika instituti, Andijon, O'zbekiston

Annotatsiya: mazkur ilmiy ishda rodii atomlari bilan legirlangan kremniy monokristallarining strukturaviy va fazaviy holatlari rentgen difraksiyon usullar yordamida kompleks tarzda tadqiq qilindi. Tadqiqot obyekti sifatida Choxralski usulida o'stirilgan fosfor bilan legirlangan n-tipli kremniy monokristallari tanlandi. Eksperimental jarayonlarda boshlang'ich namuna, yuqori haroratli termik ishlodan o'tgan namuna hamda rodii atomlari diffuziyasi amalga oshirilgan namunalarning sekin va tez sovitilgan holatlari o'rganildi. Rentgen difraksiyon o'lchovlar Empyrean Malvern difraktometri yordamida Bragg–Brentano geometriyasida $2\theta = 10^\circ - 80^\circ$ burchaklar oralig'ida amalga oshirildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, barcha namunalarda asosiy difraksiyon maksimum kremniyning (111) kristallografik tekisligiga mos keladi va bu namunalarning yuqori darajada orientatsiyalangan monokristall ekanligini tasdiqlaydi. Yuqori haroratli termik ishlodan so'ng (111)Si refleksi intensivligi kamayishi va panjara doimiylarining kengayishi kuzatildi, bu esa kristall panjarada mikrokuchlanishlarning ortishi hamda fon kirishmalar taqsimlanishining o'zgarishi bilan izohlanadi. Rodii atomlari diffuziyasidan so'ng esa kristall panjara parametrlari o'zgarishi, ikkilamchi fazalar hosil bo'lishi hamda mikrostrukturaviy o'zgarishlar qayd etildi. Sekin sovitish sharoitida SiRh₃ silitsid fazasi shakllanishi aniqlangan bo'lsa, tez sovitish jarayonida esa RhO₂ oksid nanofazalari hosil bo'lishi kuzatildi. (222)Si va (111)Si reflekslari intensivliklarining nisbati asosida kristall panjaradagi mikrokuchlanishlarning evolyutsiyasi tahlil qilindi. Olingan natijalar rodii atomlari kremniy panjarasiga diffuziya qilganda strukturaviy deformatsiyalar, fazaviy transformatsiyalar va mikrostrukturaviy qayta tashkillanish jarayonlari yuzaga kelishini ko'rsatdi.

Kalit so'zlar: kremniy monokristallari, rodii diffuziyasi, rentgen difraksiyasi, silitsid fazalar, SiRh₃, kristall panjara, mikrokuchlanish, nanoelektronika

Abstract: this study investigates the structural and phase states of rhodium-doped silicon monocrystals using X-ray diffraction techniques. Phosphorus-doped n-type silicon monocrystals grown by the Czochralski method were used as the main research material. Several experimental samples were prepared including an initial reference sample, a thermally annealed sample, and rhodium-diffused samples subjected to slow and rapid cooling regimes. X-ray diffraction measurements were performed using an Empyrean Malvern diffractometer in Bragg–Brentano geometry within the angular range of $2\theta = 10^\circ - 80^\circ$. The results show that the dominant diffraction peak in all samples corresponds to the (111) crystallographic plane of silicon, confirming the highly oriented monocrystalline structure. Thermal annealing resulted in a slight lattice expansion and a decrease in diffraction intensity due to increased microstrain and redistribution of impurity atoms. After rhodium diffusion, significant changes in lattice parameters and additional phase formations were observed. In slowly cooled samples, rhodium silicide (SiRh₃) phases were formed, while rapid cooling led to the formation of RhO₂ oxide nanophases. The ratio of forbidden (222)Si to main (111)Si reflections was used to evaluate microstrain evolution in the crystal lattice. The obtained results demonstrate that rhodium incorporation significantly modifies the structural state and phase composition of silicon monocrystals.

Keywords: silicon monocrystals, rhodium diffusion, X-ray diffraction, silicide phases, crystal lattice microstrain

Аннотация: в данной работе исследованы структурные и фазовые состояния монокристаллов кремния, легированных атомами родия, методом рентгенодифракционного анализа. В качестве объектов исследования использовались монокристаллы кремния n-типа, легированные фосфором и выращенные методом Чохральского. Были исследованы исходные образцы, образцы после высокотемпературной термической обработки и образцы после диффузии родия с медленным и быстрым охлаждением. Рентгенодифракционные измерения проводились на дифрактометре Empyrean Malvern в геометрии Брэгга–Брентано в диапазоне углов $2\theta = 10^\circ - 80^\circ$. Полученные результаты показали, что основной дифракционный максимум соответствует кристаллографической плоскости (111) кремния. После термической обработки наблюдалось увеличение параметра решетки и снижение интенсивности дифракционного максимума, что связано с перераспределением примесей и увеличением микродеформаций. После диффузии родия были обнаружены дополнительные фазовые образования. В условиях медленного охлаждения формируется силицидная фаза SiRh₃, тогда как

быстрое охлаждение приводит к образованию оксидных наночастиц RhO_2 . Отношение интенсивностей отражений (222)Si и (111)Si использовано для оценки микродеформаций в кристаллической решетке.

Ключевые слова: кремний, диффузия родия, рентгенодифракция, силицидные фазы, микродеформации

I. Kirish

Bugungi kunda qattiq jismlar fizikasi va yarimo'tkazgichlar texnologiyasining ustuvor yo'nalishlaridan biri materiallarning elektrofizik xossalari atom darajasida boshqarish hisoblanadi. Monokristalli kremniy (Si), o'zining texnologik moslashuvchanligi va tabiatda keng tarqalganligi tufayli, zamonaviy mikro va nanoelektronikaning "fundamenti" bo'lib qolmoqda. Biroq, zamonaviy qurilmalarning (yuqori chastotali tranzistorlar, quvvatli tiristorlar va yuqori samaradorlikka ega quyosh elementlari) o'lchamlari nanometrlar miqyosiga tushishi, materialning tuzilmaviy mukammalligiga bo'lgan talabni keskin oshirdi. Kristall panjarasidagi har qanday nazorat qilinmagan nuqson yoki qirishma atomlari asbobning foydali ish ko'effitsiyentini pasaytiruvchi asosiy omil bo'lib xizmat qilmoqda. Shu bilan birga Choxral usuli bilan olinadigan kremniy monokristallarida "foydali" va "zararli" xolatlarini keltirib chiqaruvchi kislorod atomlari ham eng ko'p uchraydigan texnologik fon qirishma (konsentratsiyasi 1017-1018 sm⁻³ gacha) hisoblanadi [1]. Kislorod atomlari ayrim hollarda kristall panjarani mustahkamlaydi va dislokatsiyalar harakatini cheklaydi [2]. Issiqlik ishlovlarini berish jarayonlarida (450°C va 650°C atrofida) kislorod atomlari "termo donorlar" hosil qiladi, bu esa materialning solishtirma qarshiligini kutilmagan tarzda o'zgartirib yuboradi [3]. Shuningdek, kislorod pretsipitatlarining (SiO_x) notekis taqsimlanishi kristall ichida kuchli mexanik kuchlanishlarni keltirib chiqarib, zaryad tashuvchilarning sochilishiga va energiya yo'qotilishiga olib keladi [4].

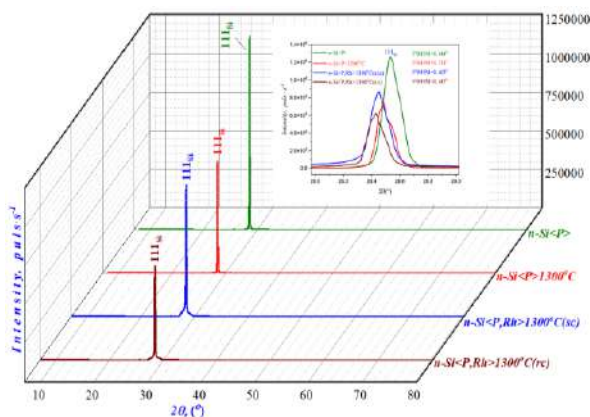
Kremniyni 4d-o'tish metallari, xususan rodiiy (Rh) bilan legirlash, material xossalari modifikatsiya qilishning eng istiqbolli usullaridan biri hisoblanadi. Rodiiy atomlari kremniyning taqiqlangan sohasida ham donorlik, ham akseptorlik xususiyatiga ega bo'lgan chuqur energiya sathlarini (masalan, $E_c - 0.32 \text{ eV}$ va E_v

+ 0.35 eV sohalarida) hosil qiladi [5]. Bu esa zaryad tashuvchilarning rekombinatsiya tezligini keng diapazonda boshqarishga imkon beradi. Shuningdek, rodiiyning kremniydagi diffuziya ko'effitsiyenti yuqoriligi sababli, uni termik diffuziya usuli bilan kiritish orqali monokristall hajmi bo'ylab qirishmalarning bir jinsli taqsimlanishiga erishish mumkin [6]. Bundan tashqari, rodiiy atomlari kislorod va boshqa texnologik kirishmalarni o'z atrofida to'plab (getterlab), kristallning ishchi sohalarini tozalash xususiyatiga ham ega [7]. Rh-O komplekslarining hosil bo'lishi yarimo'tkazgichning yuqori haroratlarga chidamliligini oshiradi [8]. Bu esa ishlab chiqarish jarayonida yuqori haroratli termik oksidlanish va diffuziya bosqichlarida materialning degradatsiyaga uchrashini oldini oladi. Shu bilan birga rodiiy bilan legirlangan kremniyda radiatsiya natijasida hosil bo'lgan nuqsonlar (masalan, A-markazlar yoki YE-markazlar) rodiiy atomlari bilan o'zaro ta'sirga kirishib, o'zlarining elektrik faolligini yo'qotadi [9]. Shu munosabat bilan kremniyni rodiiy va kislorod atomlari bilan birgalikda komplekslarni tuzilmaviy xossalari va fazaviy holatlarini tadqiq qilish, nafaqat qattiq jismlar fizikasidagi fundamental jarayonlarni tushunish, balki amaliy nanoelektronika uchun ekstremal sharoitlarda barqaror ishlaydigan yangi materiallar yaratish imkonini beradi.

II. Namunalar tayyorlash va tadqiqot metodikasi

Tadqiqot obyekti sifatida Choxral usulida o'stirilgan, fosfor bilan legirlangan n-turdagi monokristall kremniy (KEF_15) namunalari tanlandi. Tajribalar uchun namunalar $10 \times 10 \times 1 \text{ mm}^3$ o'lchamda tayyorlandi. Namunalar yuzasining tozaligini ta'minlash maqsadida ularga ikki bosqichli ishlov berildi: avval yuza mexanik sayqallandi, so'ngra kimyoviy ishlov berish orqali organik va anorganik ifloslanishlardan to'liq tozalandi.

Rodiy (Rh) atomlarini namunalar hajmiga kiritish jarayoni gaz fazasidan diffuziya qilish usulida, yuqori vakuumlangan kvars ampulalarda amalga oshirildi. Diffuziya jarayoni izotermal sharoitda, 1300 °C haroratda 5 soat davomida olib borildi. Jarayon yakunlangandan so'ng, kiritilgan atomlar va hosil bo'lgan defektlarning taqsimotiga ta'sirini o'rganish maqsadida namunalar ikki xil meyorda, ya'ni sekin (sc) va tez (rc) sovitildi.



1-rasm. Boshlang'ich n-Si<P> (yashil chiziq), 1300°C haroratda 5 soat davomida issiqlik ishlov berilgan n-Si<P> namunalari (qizil chiziq), rodii atomlari diffuziyasidan keyin sekin sovitilgan n-Si<P,Rh> namunalari (ko'k chiziq) va rodii diffuziyasidan keyin tez sovitilgan n-Si<P,Rh> namunalari (jigarrang chiziq)

Tadqiqot qilingan namunalarning tuzilmaviy va fazaviy holatlarini nazorat qilish Empyrean Malvern rentgen difraktometri yordamida amalga oshirildi. Rentgenodifraksion o'lchovlar Bregg-Brentano geometriyasida o'tkazilib, tarqalish burchi $2\theta_B = 10^\circ \div 80^\circ$ bo'lgan diapazonda uzluksiz skanerlash tezligi 1gradus/min etib belgilandi. Bunda burchak qadami 0.02 gradus etib olindi. Tuzilmaviy cho'qqilarning maksimal qiymatlarini aniqlash va olingan natijalarga grafik ishlov berish uchun OriginPro 2022 dasturiy ta'minotidan foydalanildi.

III. Olingan natijalar va ularning tahlillari

Tadqiqotda kirishma atomlarini (masalan, rodii kabi) maxsus ravishda kiritmagan holda tayyorlangan n-Si<P> namunalarning rentgenotuzilmaviy holati baholandi (1-rasm yashil rangli chiziq). Bu esa

o'z navbatida issiqlik ishlovi ta'sirida kremniy kristall panjarasida yuzaga keladigan tabiiy tuzilmaviy o'zgarishlar, fon kirishmalar (ayniqsa kislorod) hamda fosfor atomlarining qayta taqsimlanishi natijasida paydo bo'ladigan ikkilamchi fazalarni aniqlashdan iborat. Nazorat namunasining rentgenogrammasida $2\theta = 28.54^\circ$ burchakda (111)Si kristallografik yo'nalishiga mansub yuqori intensivlikdagi ($I = 1268300$ imp/s) difraksion akslanish kuzatildi. Ushbu cho'qqining yuqori intensivligi va tanlanma tabiati namunaning sirti (111) oriyentatsiyaga nisbatan yo'nalganligini ko'rsatadi. (111) akslanish uchun tekisliklararo masofa $d = 3.125 \text{ \AA}$ qiymatidan foydalangan holda n-Si<P> namunalarning panjara doimiyi $a \approx 5.4126 \text{ \AA}$ aniqladi. Shuningdek mazkur aslanishninsh eksperimental qiymatlari yordamida tashkillovchi subkristallitlarning o'lchami hisoblanganda $D \approx 59.7 \text{ nm}$ ni tashkil etdi. Bu qiymat kremniy monokristalli tabiati saqlangan holda, ammo hajmda ma'lum miqdorda chegaraviy sohalar va mikronoqsonlar mavjud bo'lishidan dalolat beradi [10]. Shu bilan birga, nazorat namunasi rentgenogrammasi spektrida past intensivlikdagi qo'shimcha cho'qqilar ham kuzatilgan (2 a, b va c-rasmlarga qarang). Xususan, $2\theta = 30.90^\circ$ burchakda SiP_2 fazasiga tegishli (200) akslanishi kuzatilishi fosfor kirishmasining bir qismi kremniy bilan kimyoviy birikishga moyil sohalarida lokal to'planishi mumkinligini ko'rsatadi. Ushbu akslanishning eksperimental qiymatlarini qayta hisoblashlar yordamida mazkur birikmalar asosida xosil bo'lgan polikristallit sohalarining o'lchami $D \approx 75.1 \text{ nm}$ teng ekanligi aniqlandi. SiP_2 fazasining kuzatilishi ko'p hollarda yuqori haroratli ishlovlar jarayonida fosforning qayta taqsimlanishi va ba'zi "energetik qulay" markazlarda bog'lanishi bilan izohlanadi [11]. Nazorat namunasida kislorod ishtirokida hosil bo'ladigan oksid fazalarining izlari ham aniqlandi. $2\theta = 42.43^\circ$ burchakda SiO_2 fazasiga tegishli (211) akslanish kuzatildi. Mazkur akslani uchun FWHM kattaroq bo'lib, hisoblangan nanokristallitlar o'lchami $D \approx 25 \text{ nm}$ atrofida chiqdi. Shuningdek, ushbu SiO_2 fazasi uchun trigonal P321 fazaviy guruhiga xos panjara

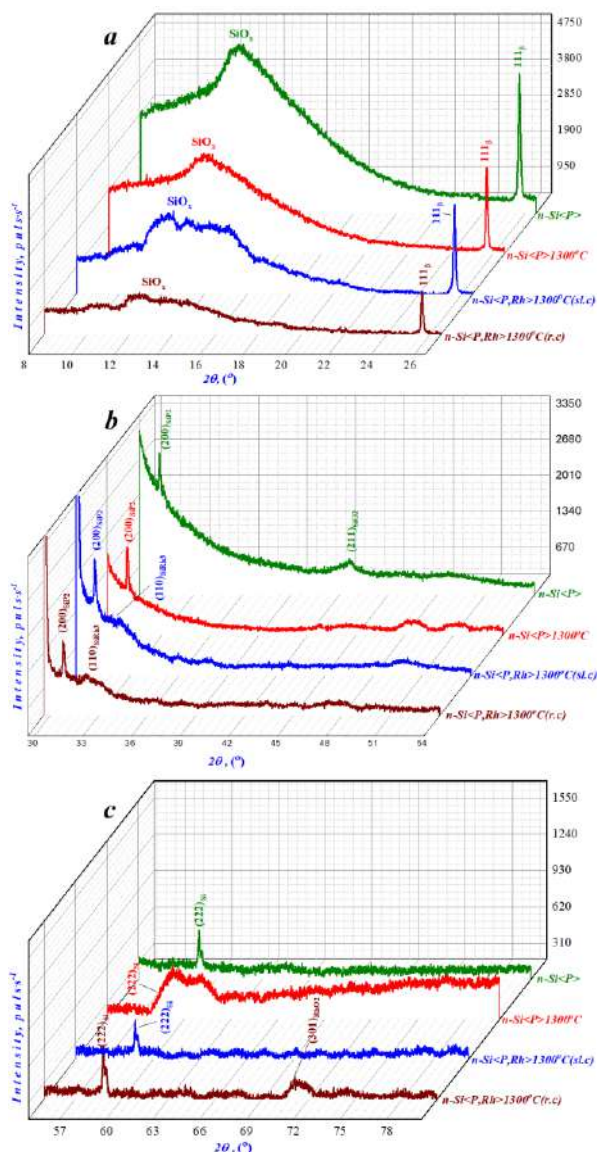
doimiylari $a = b \approx 5.031 \text{ \AA}$ va $c \approx 5.527 \text{ \AA}$ qiymatlarda berilgan. Oksid nanokristallitlarining nisbatan kichik o'lchamda bo'lishi kislorod atomlarining asosan chegaraviy sohalarda, dislokatsiya atrofida yoki sirtga yaqin qatlamlarda pretsipitatlarni hosil bo'lishi bilan tushuntiriladi [10].

Keyingi bosqichda n-Si<P> namunalari 1300°C haroratda 5 soat davomida issiqlik ishlovlari berilgan namunalarining rentgenotuzilmaviy xossalari o'rganildi (1-rasm qizil rangli chiziq). Odatda issiqlik ishlovlaridan kristall panjaradagi ichki kuchlanishlarning qayta taqsimlanishi, diffuziya jarayonlarining jadallashishi, nuqsonlar konfiguratsiyasining o'zgarishi va fon kirishmalar (kislorod, uglerod) hamda fosfor atomlarining dinamik muvozanat holatiga keltirish uchun foydalaniladi [12]. Bunday sharoitda panjara doimiylari, difraksion akslanishlarning turli burchaklar tomon siljishi, intensivlik va yarimkenglikning o'zgarishi orqali tuzilmaviy evolyutsiya baholanadi. Termik ishlovdan keyin (111)Si akslanishi $2\theta = 28.36^\circ$ ga siljigani kuzatildi. Ushbu akslanishning kichik burchaklar tomon siljishi tekisliklararo masofaning biroz o'zgarganini ($d = 3.131 \text{ \AA}$), panjara doimiysi $a \approx 5.423 \text{ \AA}$ gacha ortgani ko'rsatadi. Bundan tashqari (111)Si akslanish intensivligi $I = 758700 \text{ imp/s}$ gacha kamaygan. Bu esa o'z navbatida sirtiy holatlarda mikrodeformatsiyalarni ortishi, diffuziya natijasida tarqalish markazlarining ko'payishi hamda ayrim soha va chegaralarda ikkilamchi fazalar ulushining ortishi dalolat beradi [13]. Shu bilan birga, (111)Si akslanishning eksperimental qiymatlari yordamida subkristallitlarning o'lchami ($D \approx 64.9 \text{ nm}$ gacha) ortgani aniqlandi. Issiqlik ishlovlari natijasida subkristallitlar chegaralarining "yiriklashishi" bilan bog'liq bo'lib, bu jarayon yuqori haroratda termodinamik jihatdan qulay hisoblanadi [14]. Ammo intensivlik kamayishi bilan bir vaqtda subkristallitlar o'lchamining ortishi kristall panjarada tuzilmaviy tartib bir xil emasligini, ya'ni ba'zi sohalarda yiriklashish, boshqa sohalarda esa defektlar va mikrodeformatsiyalarning ortishi dalolat beradi [15].

1300°C haroratda issiqlik ishlovdan keyin SiP_2 fazasiga tegishli (200) cho'qqi $2\theta = 30.86^\circ$ burchakda saqlangan, biroq uning intensivligi pasaygan va hisoblangan polikristallit sohaning o'lchami $D \approx 62.6 \text{ nm}$ atrofida chiqqan. Bu fosforning bir qismi qayta erishi yoki diffuziya orqali kamroq lokal to'planishga o'tishidan dalolat beradi [16]. Boshqacha aytganda, yuqori haroratda fosfor atomlari kremniy hajmi bo'ylab nisbatan bir teks taqsimlanishga intiladi, ammo ayrim energiya jihatdan qulay markazlarda stabil faza holati saqlanib qolishi ehtimol ham bor [17].

Kremniy monokristallarini Choxralskiy usulida o'stirish jarayonida kislorod va uglerod kabi fon kirishmalarining ma'lum miqdorda kristall hajmiga kirib qolishi amaliyotda yaxshi ma'lum [2]. Kislorod atomlari ko'pincha tugunlararo holatida yoki Si-O bog'lari ko'rinishida klasterlarni hosil qilishi, termik ishlovlarda esa SiO_x va SiO_2 kristallitlarigacha rivojlanishi mumkin. Shu sababli rentgenogrammalarda SiO_2 fazasiga tegishli cho'qqilarning paydo bo'lishi fon kirishmalarining faol ishtirokini tasdiqlaydi. SiO_2 nanokristallitlarining 20–30 nm atrofida o'lchamlarda shakllanishi oksid pretsipitatlari zaryad tashuvchilarning harakatlanishiga to'siq bo'lib xizmat qiladi, rekombinatsiya markazlari hosil qilishi yoki aksincha, ayrim texnologik sharoitlarda "getterlash" effekti orqali zararli kirishmalarni to'plab, hajmdagi tozalikni oshirishi mumkin [4].

Mikrodeformatsiyalarning sifat bahosi sifatida (222)Si kabi "taqiqlangan" yoki odatda ideal olmossimon tuzilmada kuchsiz ko'rindigan akslanishlarning mavjudligi va ularning intensivlik nisbatlari qo'llanadi (2 c-rasm qizil chiziqqa qarang). Shakllangan mikrodeformatsiyalarning miqdorini $I(222)/I(111) \approx 2.5 \times 10^{-3}$ nisbati orqali baholash mumkin va ushbu qiymat ideal holatdagi $\sim 10^{-4}$ tartibidan katta bo'lib, kristall panjarada lokal deformatsiyalar, dislokatsiyalar, chegaraviy soha va notekis kirishmalar taqsimoti borligini anglatadi [18]. Issiqlik ishlov jarayonida bunday mikrodeformatsiyalar nuqsonlarning



2-rasm Kichik (a), oʻrta (b) va yuqori (c) burchakli sochilishlarda oshlangʻich n-Si<P> (yashil chiziq), 1300°C haroratda 5 soat davomida issiqlik ishlov berilgan n-Si<P> namunalari (qizil chiziq), rodii atomlari diffuziyasidan keyin sekin sovitilgan n-Si<P,Rh> namunalari (koʻk chiziq) va rodii diffuziyasidan keyin tez sovitilgan n-Si<P,Rh> namunalari (jigarrang chiziq)

annigilyatsiyasi va qayta tashkillanish orqali ichki kuchlanishlar kamayishi hamda kislorod pretsipitatlari, ikkilamchi fazalar (SiP_2 , SiO_2) va ularning panjara doimiylari nomutonositibliklari tufayli yuzaga keladi.

Sekin sovitish meyorida tayyorlangan n-Si<P,Rh> namunalari rentgenogrammalarini tahlil qilish shuni koʻrsatdiki (1-rasm koʻk rangli chiziq), rodii atomlari kremniy kristall panjarasida nisbatan muvozanatli holatga

erishgan. Asosiy difraksion akslari $2\theta = 28.45^\circ$ burchakda kuzatilib, u (111)Si kristallografik yoʻnalishiga tegishli ekani aniqlandi. Mazkur choʻqqining intensivligi 860220 imp/s ni tashkil etdi. Asosiy (111)Si akslanishining yuqori intensivligi kremniy kristall panjarasining umumiy tartiblanganligi saqlanganini koʻrsatadi. Rodii atomlarining diffuziyasiga qaramasdan, kremniyning asosiy olmossimon tuzilmasi buzilmagan. Ushbu akslanish uchun tekisliklararo masofa $d = 3.136 \text{ \AA}$ aniqladi. Choʻqqining burchak boʻyicha joylashuvi panjara doimiysida katta oʻzgarish yoʻqligini anglatib, sekin sovitish jarayoni termodinamik muvozanatga yaqin holatni taʼminlaganini koʻrsatadi [19].

Shu bilan birga, rentgenogrammada $2\theta = 32.2^\circ$ burchakda qoʻshimcha difraksion choʻqqi kuzatilgan. Ushbu choʻqqi SiRh_3 birikmasiga tegishli boʻlib, (110) kristallografik yoʻnalish bilan ifodalanadi. SiRh_3 fazasining tetragonal simmetriyaga ega ekani xamda tekisliklararo masofa $d = 2.778 \text{ \AA}$ aniqlandi. Bu faza rodii atomlarining kremniy bilan kimyoviy birikishga kirishganini koʻrsatadi. Sekin sovitish sharoitida shakllangan SiRh_3 fazasi, asosan, subkristallit chegaralari va sirtga yaqin qatlamlarda joylashgan deb hisoblash mumkin. Bu holat rodii atomlarining diffuziyadan soʻng harakatchanligini yoʻqotib, energetik jihatdan qulay markazlarda stabil holatga oʻtishi bilan izohlanadi [20].

Sekin sovitish meyorida tayyorlangan n-Si<P,Rh> namunalarda shakllanidigan mikrokuchlanishlar darajasini baholash uchun (222)Si va (111)Si akslanishlarining intensivlik nisbati hisoblandi (2 c-rasm koʻk chiziqqa qarang). Sekin sovitish rejimida ushbu nisbat $I(222)/I(111) \approx 5.9 \times 10^{-4}$ ni tashkil etdi. Bu qiymat nazorat namunalari nisbatan kichik boʻlib, rodii atomlari taʼsirida kristall panjaradagi ichki kuchlanishlar maʼlum darajada relaksatsiyaga uchraganini dalolat beradi.

Tez sovitish meyorida tayyorlangan n-Si<P,Rh> namunalari esa rentgenotuzilmaviy holat sekin

sovitish rejimiga nisbatan sezilarli darajada farq qildi (1-rasm jigarang rangli chiziq)). Asosiy (111)Si akslanish $2\theta = 28.42^\circ$ burchakda kuzatilib, uning intensivligi 623530 imp/s gacha kamaygani qayd etildi. Intensivlikning kamayishi tez sovitish natijasida kristall panjarada yuqori darajadagi defektlar va mikrokuchlanishlar saqlanib qolgani bilan izohlanadi [21]. Bunday sharoitda atomlar termodinamik muvozanatga yetib ulgurmaydi va mavjud struktura “muzlatib qo‘yilgan” holatda qoladi.

Tez sovitish meyorida tayyorlangan n-Si<P,Rh> namunalarning rentgenogrammlarida $2\theta = 71.4^\circ$ burchakda qo‘shimcha cho‘qqi kuzatilgan. Ushbu cho‘qqi RhO₂ oksid fazasiga tegishli bo‘lib, (301) kristallografik yo‘nalish bilan ifodalanadi. RhO₂ fazasining tetragonal tuzilmaga ega ekani va kristallit o‘lchami taxminan 8.5 nm va tekisliklararo masofa esa $d = 1.325 \text{ \AA}$ ekanligi aniqlangan. RhO₂ fazasining shakllanishi tez sovitish sharoitida rodiiy atomlarining kislorod bilan faol o‘zaro ta’sirga kirishganini ko‘rsatadi [22]. Bu holat kremniyda mavjud bo‘lgan fon kirishmalardan kislorod atomlarining rodiiy bilan birikishga moyilligini yaqqol namoyon qiladi [23].

n-Si<P,Rh> namunalarda tez sovitish natijasida yuzaga keladigan mikrokuchlanishlar darajasi tez sovitish rejimida sezilarli darajada ortib, $I(222)/I(111) \approx 1.0 \times 10^{-3}$ ni tashkil etdi (2-c-rasm jigarang chiziqqa qarang). Bu qiymat sekin sovitish rejimiga nisbatan ancha katta bo‘lib, tez sovitish jarayoni kristall panjarada yuqori darajada ichki deformatsiyalarni saqlab qolishini ko‘rsatadi [24].

IV.Xulosa

Nazorat namunalarida yuqori haroratli ishlovlar berish natijasida fosfor va fon kirishmalarda kislorod atomlarining qayta taqsimlanishi hisobiga SiP₂ (polikristallit o‘lchami $D \approx 88.4 \text{ nm}$) va SiO₂ ($D \approx 25 \text{ nm}$) kabi ikkilamchi fazalar hosil bo‘lishi aniqlandi.

1300°C haroratda 5 soat davomida qizdirish kremniy panjara doimiysining $a \approx 5.4104 \text{ \AA}$ gacha ortishiga va difraksiya akslanish

intensivligining kamayishiga olib kelishi, bu esa mikrodeformatsiyalar va tarqalish markazlarini ko‘payishiga olib kelishi aniqlandi.

Sekin sovitish (sc) meyorida subkristallitlarning bo‘linish chegaralarida rodiiy atomlari kremniy bilan kimyoviy birikib, tetragonal simmetriyaga ega bo‘lgan SiRh₃ fazasini hosil qilishi aniqlandi.

Rodiiy bilan legirlangan va sekin sovitilgan namunalarda mikrokuchlanishlar darajasi ($I(222)/I(111) \approx 5.9 \times 10^{-4}$) nazorat namunasiga nisbatan kamayishi, bu rodiiy atomlarining panjaradagi ichki kuchlanishlarni relaksatsiya qilish xususiyati mavjudligi aniqlandi.

Tez sovitish (rc) meyorida rodiiy atomlari fon kislorod bilan faol ta’sirlashib, RhO₂ oksid fazasini (kristallit o‘lchami $\approx 8.5 \text{ nm}$) hosil qilishi, bu rodiiyning kuchli getterlik xususiyati mavjudligi aniqlandi.

Tez sovitish jarayonida atomlar muvozanat holatga yetib ulgurmaydi, natijada kristall panjarada yuqori darajadagi ‘muzlatilgan’ defektlar va maksimal mikrokuchlanishlar (1.0×10^{-3}) saqlanib qolishi aniqlandi.

Adabiyotlar

- [1].Jiancheng Li, Junlei Wang, Zeqi Zhong, Zaoyang Li, Yong Wen, Lei Wang, Lijun Liu, Pathway and control of oxygen transport in the melt during single crystal silicon growth by continuous-feeding Czochralski method, Journal of Crystal Growth, Volume 662, 2025, 128183, <https://doi.org/10.1016/j.jcrysgro.2025.128183>.
- [2].Zhao, W.; Li, J.; Liu, L. Control of Oxygen Impurities in a Continuous-Feeding Czochralski-Silicon Crystal Growth by the Double-Crucible Method. Crystals 2021, 11, 264. <https://doi.org/10.3390/cryst11030264>
- [3].Newman, R. Oxygen diffusion and precipitation in Czochralski silicon. J. Phys.: Condens. Matter. 112100. 163-28, (2000). <https://doi.org/10.1088/0953-8984/12/25/201>.
- [4].Peng Dong, Xingbo Liang, Daxi Tian. On the mechanism of carrier scattering at oxide precipitates in Czochralski silicon, Journal of Materials Science: Materials in Electronics, № 4, 2015. <https://doi.org/10.1007/s10854-015-2728-6>
- [5].Boboev, A. Y., Makhmudov, K. A., & Ibrokhimov, Z. M. (2025). Long-Term Relaxation Processes of Electrical Conductivity in Compensated Si<B,S> AND Si<B,Rh>; Monocrystals. East European Journal of Physics, (2), 436-440. <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2025-2-54>
- [6].Utamuradova, Sharifa and Rakhmanov, Dilmurod and Doroshkevich, Alexander and Mezentseva, Zh. V. and Isayev, Rafael and Tatarinova, Alisa, IMPEDANCE SPECTRA OF RHODIUM-DOPED SILICON IRRADIATED

- WITH ALPHA PARTICLES. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=6097790> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.6097790>
- [7].Golubović, J.; Varničić, M.; Štrbac, S. Study of Oxygen Reduction Reaction on Polycrystalline Rhodium in Acidic and Alkaline Media. *Catalysts* 2024, 14, 327. <https://doi.org/10.3390/catal14050327>
- [8].Trzcinski, M.; Balcerowska-Czerniak, G.; Bukaluk, A. XPS Studies of the Initial Oxidation of Polycrystalline Rh Surface. *Catalysts* 2020, 10, 617. <https://doi.org/10.3390/catal10060617>
- [9].Boboev, A. Y., Ergashev, B. M., Yunusaliyev, N. Y., & Madaminjonov, J. S. (2025). Electrophysical Nature of Defects in Silicon Caused by Implanted Platinum Atoms. *East European Journal of Physics*, (2), 431-435. <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2025-2-53>
- [10].Boboev, A. Y., Yulchiev, S. K., Ibrokhimov, Z. M., & Yunusaliyev, N. Y. (2025). The Impact of Various Lighting Conditions on the Photosensitive Properties of Si<B,S> and Si<B,Rh>; Structures. *East European Journal of Physics*, (4), 620-626. <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2025-4-65>
- [11].Xiang Zhang, Shanpeng Wang, Structure and growth of single crystal SiP₂ using flux method. *Solid State Sciences*, Volume 37, November 2014, Pages 1-5 <https://doi.org/10.1016/j.solidstatesciences.2014.08.009>
- [12].Qiqi Wang, Meiling Zhang, Meilin Peng, Effect of annealing conditions on phosphorus inward diffusion from N+ Poly-Si layer in N-type TOPCon solar cells *Materials Science in Semiconductor Processing* Volume 176, 15 June 2024, 108282 <https://doi.org/10.1016/j.mssp.2024.108282>
- [13].Kayed, Kamal & Kurd, Dalal. (2021). The effect of annealing temperature on the structural and optical properties of Si/SiO₂ composites synthesized by thermal oxidation of silicon wafers. <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-246154/v2>.
- [14].Gorbachev I.I., Korzunova E.I., Popov V.V., Khabibulin D.M., Urtsev N.V. Simulation of Austenite Grain Growth in Low-Alloyed Steels upon Austenitization // *Physics of Metals and Metallography*. - 2023. - Vol. 124. - N. 3. - P. 303-309. <https://doi.org/10.31857/S0015323022601738>
- [15].Daldosso, N & Das, Gobind & Larcheri, S & Mariotto, Gino & Dalba, G. & Pavesi, Lorenzo & Irrera, A & Priolo, F & Iacona, Fabio & Rocca, Francesco. Silicon Nanocrystal Formation in Annealed Silicon-Rich Silicon Oxide Films Prepared by Plasma Enhanced Chemical Vapor Deposition. *Journal of Applied Physics - J APPL PHYS*. 101. (2007). <https://doi.org/10.1063/1.2740335>.
- [16].S. Geiskopf, M. Stoffel, X. Devaux, Formation of SiP₂ Nanocrystals Embedded in SiO₂ from Phosphorus-Rich SiO_{1.5} Thin Films. *The Journal of Physical Chemistry C* 2020 124 (14), 7973-7978 <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.9b11416>
- [17].Safarian J, Tangstad M. Phase diagram study of the Si-P system in Si-rich region. *Journal of Materials Research*. 2011;26(12):1494-1503. <https://doi.org/10.1557/jmr.2011.130>
- [18].Marot L, Schoch R, Steiner R, Thommen V, Mathys D, Meyer E. Rhodium and silicon system: II. Rhodium silicide formation. *Nanotechnology*. 21. 365707. (2010). <https://doi.org/10.1088/0957-4484/21/36/365707>.
- [19].L. Schellenberg, J.L. Jorda, J. Muller, The rhodium-silicon phase diagram, *Journal of the Less Common Metals*, Volume 109, Issue 2, 1985, Pages 261-274, [https://doi.org/10.1016/0022-5088\(85\)90058-X](https://doi.org/10.1016/0022-5088(85)90058-X).
- [20].K. Matsukawa, K. Shirai, H. Yamaguchi, Diffusion of transition-metal impurities in silicon, *Physica B: Condensed Matter*, Volumes 401–402, 2007, Pages 151-154, <https://doi.org/10.1016/j.physb.2007.08.134>.
- [21].Garagnani, D., De Padova, P., Ottaviani, C., Quaresima, C., Generosi, A., Paci, B., Olivieri, B., Jalochocki, M., & Krawiec, M. (2022). Evidence of sp²-like Hybridization of Silicon Valence Orbitals in Thin and Thick Si Grown on α-Phase Si(111)√3 × √3R30°-Bi. *Materials*, 15(5), 1730. <https://doi.org/10.3390/ma15051730>
- [22].Trzcinski, M.; Balcerowska-Czerniak, G.; Bukaluk, A. XPS Studies of the Initial Oxidation of Polycrystalline Rh Surface. *Catalysts* 2020, 10, 617. <https://doi.org/10.3390/catal10060617>
- [23].Marie E. Turano, Elizabeth A. Jamka, Maxwell Z. Gillum, K. D. Gibson, Emergence of Subsurface Oxygen on Rh(111). *The Journal of Physical Chemistry Letters* 2021 12 (25), 5844-5849 <https://doi.org/10.1021/acs.jpclett.1c01820>
- [24].Weinrich, Z.N. & Li, X. & Sharma, S. & Craciun, Valentin & Ahmed, M. & Sanchez, E.A.C. & Moffatt, S. & Jones, K.s. (2019). Dopant-defect interactions in highly doped epitaxial Si:P thin films. *Thin Solid Films*. 685. <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2019.05.059>

Исследование электрофизические параметры субнано– секундной оптоэлектроники на основе арсенид галлиевых тиристорных формирователей мощных импульсов

А.Султанов¹, Х. Бозоров¹.

¹ Наманганский государственный технический университет, Узбекистан, г. Наманган.

Аннотация. Разработана технология и найдено оптимальное решение проблем генерации сверхкоротких оптических импульсов большой пиковой мощности на основе гетероструктур GaAs и AlGaAs оптически и электрически связанные обычный $n^+-p^0-n^0$ (GaAs) и опто транзистор P –p-N(AlGaAs)- n^0 –p(GaAs).

Ключевые слова: Гетероструктуры, оптические импульсы, полупроводниковый лазер, оптоэлектронные приборы, фотонно-инжекционный импульсный тиристор.

Abstract. A technology has been developed and an optimal solution has been found for generating ultrashort optical pulses with high peak power using GaAs and AlGaAs heterostructures optically and electrically coupled between a conventional $n^+-p^0-n^0$ (GaAs) transistor and a P–p-N(AlGaAs)- n^0 –p(GaAs) optotransistor.

Keywords: Heterostructures, optical pulses, semiconductor laser, optoelectronic devices, photon-injection pulse thyristor.

Annotatsiya. An'anaviy $n^+-p^0-n^0$ (GaAs) tranzistor va P–p-N(AlGaAs)- n^0 –p(GaAs) optotransistor o'rtasida optik va elektr bog'langan GaAs va AlGaAs geterostrukturalaridan foydalanib, yuqori cho'qqi quvvatiga ega ultra qisqa optik impulslarni yaratish texnologiyasi ishlab chiqildi va optimal yechim topildi.

Kalit so'zlar: Geterostrukturalar, optik impulslar, yarimo'tkazgichli lazer, optoelektron qurilmalar, foton in'ektsiyali impulsli tiristor.

I. ВВЕДЕНИЕ.

Интерес к проблеме генерации сверхкоротких оптических импульсов большой пиковой мощности обусловлен широким их применением в различных областях, таких, как оптическая связь, метрология, системы обработки информации, спектроскопия и т.д.

Идея генерации пикосекундных оптических сигналов за счёт прямой модуляции тока накачки состоит в том, чтобы переводить лазер за порог генерации только в минимальные интервале времени, а оставшуюся часть рабочего цикла держать лазер ниже порога. Длительность импульса излучения составляет по порядку величины несколько пролетных времен и определяется динамикой взаимодействия фотонов с электронное – дырочной плазмой, аналогично тому, как при релаксационных осцилляциях интенсивности [7].

Важной особенностью полупроводниковых лазеров является возможность быстрой непосредственной модуляции излучения путём инъекции тока. Метод прямой токовой модуляции усиления использует эту особенность и позволяет генерировать короткие оптические импульсы непосредственно в лазерном элементе [1,4,5,6,7]. При этом, для того, чтобы подобные лазерные устройства не теряли главные преимущества – компактность, простоту и легкость в управлении, определённые требования предъявляются к

модуляторам электрических импульсов. Необходимы структуры, в которых лазерные и управляющие элементы были бы интегрированы в единую монолитную или гибридную схему. Первое, как правило, является сложной технологической проблемой, а, второе, требует широкополосного согласования низкоомного лазерного диода с СВЧ трактом.

II. МЕТОД.

Режим быстрой модуляции коэффициента усиления изменением тока через лазерный диод можно осуществить сильной ВЧ (более 300 МГц) накачкой, налаженной на слабый постоянный ток [8], электрическими импульсами, формируемыми диодами с накоплением заряда или лавинными транзисторами [9,10], а также электрическими импульсами, получаемыми с помощью пикосекундных оптоэлектронных переключателей с начинкой от другого лазера [11]. Однако, в указанных режимах модуляции вследствие существенного ограничения амплитуды электрического импульса накачки ($I_{накачки} = 500 \text{ mA}$) получение пикосекундных оптических импульсов большой мощности затруднено.

III. ЭКСПЕРИМЕНТ.

В настоящей работе показаны перспективы использования в качестве источника

модулирующих импульсов фотонно - инжекционных импульсных тириستоров (ФИИТ). При включении ФИИТ моделируется импульс тока амплитудой до 40 А с фронтом нарастания 200 пс при временной нестабильности до 5 пс [7]. Длительность и форма импульса тока, как правило, задаётся характером зарядной линии, а частота следования – генератором тока в цепи управления. Такой токовой формирователь использовался нами для накачки лазеров на основе двойных гетероструктур.

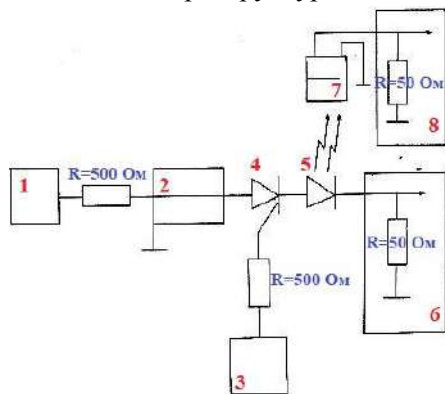


Рис.-1. Принципиальная электрическая схема включения ДГС. 1-стабилизированный источник питания ТВ-2; 2-формирующая коаксиальная 50-омная линия; 3-генератор импульсов управления ИИ-11; 4-ФИИТ; 5-ДГС лазер; 6,8-стробоскопический осциллограф С1-91/3; 7- р-і-п диода

Структура содержит оптически и электрически связанные обычный $n^+-p^0-n^0$ (GaAs) транзистор и оптотранзистор $P-p-N(\text{AlGaAs})-n^0-p(\text{GaAs})$. Фактически имеется вертикальная схема интеграции лазера и модулятора импульсов. Как было показано в [7] при включении тиристора через встроенную в него двойную гетероструктуру протекает импульс тока в 10 А с фронтом 200 пс, длительностью 0,5 - 5 нс и предельной частотой до 50 кГц. Тем самым, создаются условия для эффективной модуляции усиления оптического излучения в активной области двойную гетероструктуру (ДГС).

Оптический сигнал регистрировался с помощью ЛФД-2Ф или р-і-п диода, включаемых в разрыв полосковой линии. Измеряемый сигнал с нагрузочным сопротивлением $R_{\text{наг}} = 50 \text{ Ом}$ подавался на стробоскопический осциллограф С1-91/3. Временное разрешение измерительной схемы с ЛФД составляло 300 пс, а р-і-п диодом 100 пс.

Принципиальная электрическая схема накачки ДГС лазеров представлена на рисунке-1.

На рис.-2. приведены форма импульса тока накачки и сигнала, регистрируемого р-і-п диода.

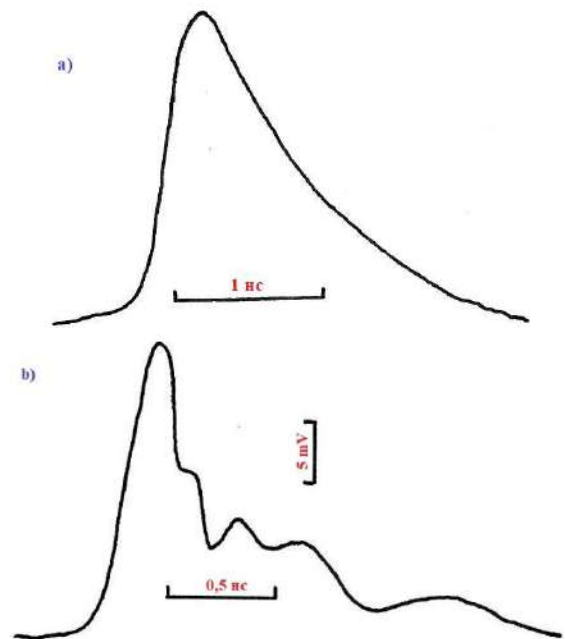


Рис.-2. Осциллограммы импульсов накачки (а) и сигнала фото ответа р-і-п диода.

Динамика излучения полупроводникового лазера описывается скоростными уравнениями [2,3]. Численное решение этих уравнений для лазера на основе двойную гетеро структуру, встроенной в ФИИТ, даёт следующие зависимости плотности электронов N и фотонов S в активной области ДГС-лазера от времени (см. рис.-3).

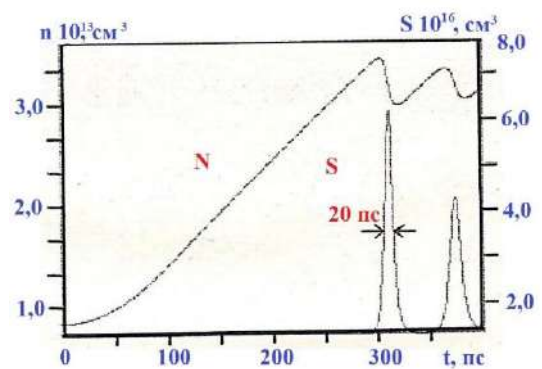


Рис.-3. Зависимость от времени концентрации N электронов и S плотности фотонов в активной области ДГС лазера с активной областью $d=0,05 \text{ мкм}$ при накачки импульсом тока $j = 20 \text{ кА/см}^2$ с фронтом 200 пс. Плотность тока накачки $j = 10^4 \text{ А/см}^2$. Ширина генерируемых оптических импульсов на полувысоте 20 пс, пиковая мощность 3 Вт,

частота повторения 8 ГГц. Этот результат находится на уровне лучших значений пиковой мощности пикосекундных гетеролазеров.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Изучено влияние параметров модулирующего импульса и лазерной структуры на параметры оптических импульсов. Экспериментально реализован режим лазерного излучения в ФИИТ [3,7]. Таким образом найден сравнительно простой путь интеграции источника пикосекундных оптических импульсов и генератора моделирующих импульсов.

Литература

- [1]. Sarkat T. 2007. Epitaxial Design of Direct Optically Controlled GaAs/AlGaAs –based Heterostructure Lateral Superjunction Power Device for Fast Repetitive Switching/ Mazumder S.K. // IEEE Transactions on Electron Devices. Vol. 54. № 3. March.
- [2]. Vainshtein S. N., Yuferev V. S., Kostamovaara J. T., Kulagina M. M., Moilanen H. T. 2010. Significant Effect of Emitter Area on the Efficiency, Stability and Reliability of Picosecond Switching in a GaAs Bipolar Transistor Structure // IEEE Transactions on Electron Devices. Vol. 57, № 4
- [3]. Sultanov A.M., Abdukarimov A.A., Kufian M.Z. 2023. Development of technology for creating high-voltage p0-n0 junctions based in GaAs. BULLETIN OF THE KARAGANDA UNIVERSITY. PHYSICS series № 4 (112). pp. 50-56. b
- [4]. Gusev A.I., Lyubutin S.K., Rukin S.N., Slovikovsky B.G., Siranov S.N. 2017. Study of the process of voltage decay during impact-ionization switching of power thyristors. // Instruments and experimental techniques. // №. 8. P. 95-101.
- [5]. Voitovich V., 2014. How to replace SiC Schottky diodes. / Dumanevich A. // Power Electronics, No. 5.
- [6]. Яременко Н.Г., Карачевцева М.В., Страхов В.А. Фотолюминесценция эпитаксиальных слоев GaAs, легированных кремнием // Известия ВУЗов.- Электроника.- 2008.- № 1.- С. 10-19.
- [7]. Султанов А.М. Монография. 2022. Разработка технологии создания и исследование фотонно-инжекционных коммутаторов на основе гетероструктур GaAs-AlGaAs. Наманган, Usmon Nosir Media, 116 стр.
- [8]. Sultanov A.M., Yusupov E.K., Rakhimov R.G. 2024. Investigation of the Influence of Technological Factors on High-Voltage p0–n0 Junctions Based on GaAs. Journal of nano- and electronic physics. vol. 16 no 1, 01010(5pp) (2024)
- [9]. Sultanov A. M., Mirzarayimov J.Z., 2024. main technological factors affecting the properties of low-doped layers and transistor n+-p0 – n0 STRUCTURES. European Journal of Emerging Technology and Discoveries. ISSN (E): 2938-3617. Volume 2, Issue 3, March.
- [10]. Sultanov A.M, Abdukarimov A.A., Kufian M.Z. 2023. Development of technology for creating high-voltage p0-n0 junctions based on GaAs. DOI 10.31489/2023PH4/50-56. UDC538.915.
- [11]. Султанов А.М, Мирзарайимов Ж.З. 2024. УДК 538.915 621.315.592 особенности и перспективы использования фотонное – инжекционных импульсных тиристоров для модуляции усиления полупроводниковых гетеролазеров. the multidisciplinary journal of science and technology. V.4.Issue – 3. ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261, SJIF 2022-2.889, 2024-6.875.

Mualliflar haqida ma'lumot

1. **Sultanov Ahmadjon Majidovich** – f.-m.f.n., dotsent, Namangan davlat texnika universiteti, dotsenti. E-mail: sulix80@mail.ru
2. **Bozorov Xurshid Narzullayevich** – f.-m.b.PhD., dotsent, Namangan davlat texnika universiteti, dotsenti. E-mail: xurshid_bozorov83@mail.ru ;

Валикли лаборатория жинида пахта намуналаридан олинадиган тола ва жинланган чигит миқдорларини аниқлаш тажрибалари натижалари

Эсанов Анвар Ахматович¹, Абдугаппарова Шаходатхон Найибжановна²

¹Толали экинлар илмий тадқиқот институти катта илмий ҳодими

²Андижон давлат университети катта ўқитувчиси.

2025-йил 20-noyabrda berilgan; 2025 yil. 10-dekabr chop etish uchun qabul qilingan

Аннотация. Мақолада кам миқдордаги уруғлик пахта намуналарини ишлаб чиқилган валикли жинда жинланиши жараёнида олинган асосий маҳсулотлар-тола ва жинланган чигитларни миқдорларини тажриба йўли билан аниқлаш натижалари келтирилган.

Калит сўзлар: валикли жин, ишчи барабан, колосник, тезлик, тола, чигит, миқдор, намуна.

Аннотация. В статье представлены результаты экспериментального определения количества основных продуктов - волокна и собранных семян, полученных в процессе сбора небольшого количества образцов семенного хлопка в разработанном валковом джине.

Ключевые слова: валковый джин, рабочий барабан, колосник, скорость, волокно, семя, количество, образец.

Abstract: The article presents the results of experimental determination of the quantity of fiber and harvested seeds - the main products obtained during the process of harvesting small quantities of seed cotton samples in the developed roller gin.

Keywords: roller gin, working drum, grate, speed, fiber, seed, quantity, sample.

I. Кириш.

Илмий тадқиқот ишлари давом эттирилиб, айни вақтда валикли жиннинг ишчи чизмалари асосида унинг тажриба нусхасини тайёрлаш ишлари бажарилди [1, 2] (1-расм). Валикли жиннинг асосий ишчи қисмларига РКМ дан тайёрланадиган ишчи барабан, кесувчи пичоқ, намунани ишчи зонага узатувчи олдинга-орқага ҳаракатланувчи тўғри тўртбурчак шаклидаги тахтачали сургич, айланма ҳаракатларни ишчи қисмларга узатувчи тишли ғилдираклар ва бошқа ёрдамчи қисмлар киради.

Элита уруғчилиги фермер хўжаликларини лабораторияси шароитида ишлов бериладиган энг кам пахта намунасини миқдори 40-45 г миқдорида бўлиши мумкин. Лекин бу лаборатория жинида уруғчилик хўжалигининг иккинчи йилги кўчатзори учун ҳар бир оила бўйича керак бўладиган уруғлик чигитларни ҳам ишлаш учун керакли иш унумдорлигини таъминлаши керакли ҳисобга олиниб, асосий ишчи барабаннинг узунлиги унинг

икки четидаги обоймаси билан биргаликда 210 мм га тенг қабул қилинди (2-расм).



1-расм. Лаборатория валикли жинининг тайёрланган тажриба нусхасини кўриниши

II. Асосий қисм.

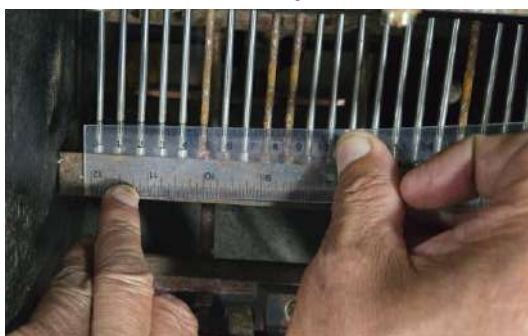
Валикли жиннинг колосникли панжараси жинланган чигитларни геометрик ўлчамларига мос ҳолда тайёрланди. Бунда колосниклар диаметри 4 мм га тенг бўлган цилиндр текис пўлатдан тайёрланиб планкага кавшарланиб маҳкамланди. Колосникларни оралик масофаси 7 мм га тенг танланди (3-расм).

Техник ечимга кўра, колосникли панжара устига ташланган пахта намунасини ишчи барабан ва пичоқларни иш зонасига сиқувчи олдинма-қайтма

харакатланувчи планка билан урувчи пичоқни чизиқли ҳаракати тезлиги бир бирига мутаносиб тарзда бўлгандагина жинлаш жараёни мўътадил кечиши мумкин.



2-расм. Лаборатория валикли жинининг асосий ишчи барабанини узунлигини танлаб олинган варианты



3-расм. Валикли жиннинг колосникли панжарасини ўлчамларини танлаб олиш ҳолати кўриниши

Шунинг учун дастлабки тажрибаларда ишчи барабанни диаметри 60 мм га тенг бўлиб, айланиш тезлиги 30 айл/дақ қабул қилинди. Амалдаги валикли жинларни иш жараёнларини тахлилидан фойдаланган ҳолда, пахта намунасини ишчи барабанни иш зонасига сиқувчи олдинма-қайтма ҳаракатланувчи планка билан урувчи пичоқни чизиқли ҳаракати тезлиги ишчи барабаннинг тезлигидан тўрт марта тезроқ, яъни 120 марта/дақ. га тенг бўлиши таъминланди.

Тажрибалар учун уруғлик пахтанинг “Андижон 35” селекцион навли пахтасидан учта вариантда ва учта такрорланишда, яъни 40 г, 60 г ва 80 г миқдорида электрон тарозида тортилиб жинлаш учун тайёрланди (4-расм).



4-расм. Тажрибалар учун тайёрланган пахта намуналари

Кетма-кетликда ва вариантлар бўйича пахта намуналарини жинлаш натижасида олинган асосий маҳсулотлар тола ва чигит олиниб, маҳсулотлар балансини ўрганиш учун яна электрон тарозида тола ва жинланган чигитни массаси аниқланди. (5-расм).



5-расм. Пахта намунасидан олинган тола ва жинланган чигитни массасини аниқлаш жараёнидан лавҳалар

III. Хулоса.

Ўрганишлар натижасида олинган маълумотлар қуйидаги 1-жадвалда келтирилган.

1-жадвалдаги тажрибалар натижасидан кўриниб турибдики, ишлаб чиқилган валикли лаборатория жини технологик жараёни барқарор бажарганлиги пахтадан олинган тола ва чигитларни электрон тарозида тортилган миқдори изохланган. Чунки барча вариантлар бўйича пахтадан тола ва жинланган чигит бўйича юқори натижалар

олинди. Мисол учун пахта хом ашёси миқдори эса 53,6 – 55,16 % га тенг намуналаридан олинган тола миқдори 43,26 бўлганлиги 1-жадвал натижаларидан -43,55 % миқдорида, жинланган чигитни кўриниб турибди.

1-жадвал

Пахта намуналарини ишлаб чиқилган валикли жинда жинланганда олинган тола ва жинланган чигит миқдорлари

Тажриба вариантлари	Пахта намуналари миқдори, г	Олинган тола миқдори, г./%	Жинланган чигит миқдори, г./%
1	40,0	17,83/44,57	20,86/52,15
		16,76/41,9	21,53/53,82
		17,33/43,32	21,94/54,85
ўртача	40,0	17,31/43,27	21,44/53,6
2	60,0	25,95/43,25	32,27/53,78
		26,13/43,55	32,84/54,73
		25,82/43,00	32,68/54,46
ўртача	60,0	25,96/43,26	32,59/54,31
3	80,0	35,12/43,9	44,56/55,7
		34,82/43,52	44,07/55,08
		34,59/43,23	43,77/54,71
ўртача	80,0	34,84/43,55	44,13/55,16

Ўтказилган тажрибаларда тозаланган, яъни ифлосликлардан холи кам миқдордаги уруғлик пахта намуналари ишлатилганлиги сабабли 1-жадвалда кўрсатилганидек толани миқдорлари жуда юқори кўрсаткичларга эга бўлди. Лекин олинган тола намуналарини сифат кўрсаткичларини тахлил қилиниши зарур деб хулосага келинди. Чунки унинг таркибига калта толалар ва жинлаш жараёнида ҳосил бўладиган аралашмалар,

масалан синган чигит қобиғи, чигит қобиғли тола ва бошқалар, бўлиши мумкин.

Бундан ташқари, жинланган чигитларни қолдиқ тукдорлигини ҳам ўрганилиб, тахлил қилиниши керак. Бу тахлил натижаларига мувофиқ колосникларни оралик масофасини мақбул қийматини тавсия этилиши мумкин. Шу сабабли тажрибалар давом эттирилиб, бу параметрлар оптималлаштирилади.

Фойдаланилган адабиётлар

[1]. Пахтани дастлабки ишлаш бўйича қўлланма, “Ўзпахтасаноат” АЖ, Тошкент, 2019 й., 477 б.
Д.У.Мадрахимов, А.А.Эсонов, Ш.Н.Абдугаппарова, Элита уруғчилик хўжаликларида уруғлик пахта авлодларини етиштиришдаги муаммолар тахлили, Бухоро давлат университети илмий ахбороти, 2024 йил 12 сон.
[2].Ш.Н.Абдугаппарова, Производство валичного оборудования для использования в

лабораториях элитных семеноводческих хозяйств, Воронежский государственный университет, международной научной конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», 2024 г.
[3].Д.У.Мадрахимов, Ш.Н.Абдугаппарова, Лаборатория валикли жинининг тажриба нусхасини тайёрлаш ва асосий ўрганилувчи параметрларни танлаш., «Илғор муҳандислик мактабларини ривожлантиришда фан, таълим ва ишлаб чиқариш интеграцияси: муаммолар ва ечимлар» мавзусидаги республика илмий ва

илмий техник анжуман материаллари тўплами, Наманган-2025 йил.

[4].Мадрахимов Дилшодбек Усупжонович, Эсанов Анвар Ахматович, Абдугаппарова Шаходатхон Нойибжоновна, Элита уруғчилик хўжаликларида уруғлик пахта авлодларини етиштиришдаги муаммолар таҳлили, Бухоро – 2024 йил.

[5].Ш.Н.Абдугаппарова, Производство валичного оборудования для использования в лабораториях элитных семеноводческих хозяйств, Высокопроизводительные вычисления в науке, технике и образовании, Научный конференция, Ворониж 2024 г.

Tsiklik deformatsiyani $(Bi_{0,3}Sb_{0,7})_2Te_3$ polikristall plyonkalarining temperaturaviy qarshiligiga ta'siri

Sulaymonov Husanboy Mannopovich

Farg'ona davlat texnika universiteti, O'zbekiston, 150107, Farg'ona, ko'ch. Farg'ona, 86

Annotatsiya. Ushbu maqolada $(Bi_{0,3}Sb_{0,7})_2Te_3$ polikristall yupqa plyonkalarining elektr qarshiligi tsiklik mexanik deformatsiyalar ostida haroratga bog'liq ravishda qanday o'zgarishi eksperimental ravishda o'rganilgan. Tadqiqotda plyonkalar turli miqdordagi takroriy mexanik yuklama sikllari ta'siridan keyin ularning qarshiligi o'lchangan va harorat bilan bog'liq o'zgarishlar tahlil qilingan. Natijalar shuni ko'rsatadiki, plyonkadagi qarshilikning minimumi haroratning oshishi bilan siljishi, va temperaturaviy qarshilik koeffitsientining kamayishi kuzatilgan. Mazkur o'zgarishlar plyonkaning elektr xossalari yaroqtkazgichdan metallga o'xshash xususiyatlarga o'tishini ko'rsatadi. Ushbu natijalar, $(Bi_{0,3}Sb_{0,7})_2Te_3$ polikristall yupqa plyonkalarini mexanik charchashni aniqlovchi datchik sifatida qo'llash imkoniyatlarini taqdim etadi.

Kalit so'zlar: $(Bi_{0,3}Sb_{0,7})_2Te_3$ polikristall plyonkalar, elektr qarshilik, tsiklik mexanik deformatsiya, temperaturaviy qarshilik koeffitsienti, tenzosezgirlik, datchiklar.

Abstract. This paper presents an experimental investigation of the temperature-dependent electrical resistance of polycrystalline $(Bi_{0,3}Sb_{0,7})_2Te_3$ thin films subjected to cyclic mechanical deformation. The electrical resistance of the films was measured after exposure to various numbers of repeated mechanical loading cycles, and its variation with temperature was systematically analyzed. The results demonstrate a shift of the resistance minimum toward higher temperatures with increasing temperature, accompanied by a decrease in the temperature coefficient of resistance. These changes indicate a transition in the electrical behavior of the films from semiconducting to metal-like characteristics. The obtained results highlight the potential application of polycrystalline $(Bi_{0,3}Sb_{0,7})_2Te_3$ thin films as sensing elements for the detection of mechanical fatigue.

Keywords: polycrystalline $(Bi_{0,3}Sb_{0,7})_2Te_3$ thin films, electrical resistance, cyclic mechanical deformation, temperature coefficient of resistance, strain sensitivity, sensors.

So'nggi yillarda elastik elektronika va datchiklar sohasida harorat va bosimni o'lchovchi yuqori sezgir qurilmalarni ishlab chiqish bo'yicha izlanishlar jadallashdi [1,2]. Bunday piezorezistiv sensorlar oddiy tuzilishga ega bo'lib, tashqi mexanik kuchlanishga javoban o'z elektr qarshiligini o'zgartiradi [3]. Zamonaviy tadqiqotlarda termoelektrik xossalari bilan mashhur bo'lgan $(Bi_{0,3}Sb_{0,7})_2Te_3$ va uning qotishmalari yuqori piezorezistiv sezgirlik ham namoyon etishi, ya'ni mexanik deformatsiya ta'sirida qarshiligi sezilarli o'zgarishi mumkinligi ko'rsatildi [4]. Xususan, $(Bi_{0,3}Sb_{0,7})_2Te_3$ asosidagi yupqa plyonkalar asosida harorat va bosimni bir vaqtda o'lchay oladigan ikki funksiyali datchiklar yaratilmoqda [2]. Shu bilan birga, $(Bi_{1-x}Sb_x)_2Te_3$ tarkibli plyonkalarining elektr o'tkazuvchanligi mexanik kuchlanish ostida qanday o'zgarishi ilmiy jihatdan muhim masala bo'lib qolmoqda. Masalan, 2021-yilda o'tkazilgan tadqiqotda Bi-Sb-Te plyonkalarida harorat va tsiklik mexanik deformatsiya qarshilikka ko'rsatadigan ta'sir mexanizmi tahlil qilingan [3].

Mazkur maqolada $(Bi_{0,3}Sb_{0,7})_2Te_3$ polikristall yupqa plyonkalarining elektr qarshiligi tsiklik

mexanik deformatsiyalar ostida haroratga bog'liq ravishda qanday o'zgarishi eksperimental ravishda o'rganiladi. Tadqiqotdan asosiy maqsad - ushbu yaroqtkazgich plyonkalarni mexanik charchash shikastlanishlari (mexanik charchoq) yig'ilishini aniqlovchi datchik sifatida qo'llash imkoniyatini baholashdan iborat. Shu maqsadda plyonkalar turli miqdordagi takroriy mexanik yuklama sikllari ta'siridan so'ng ularning qarshiligining temperaturaviy xatti-harakati o'lchandi. Deformatsiya darajasi oshishi bilan qarshilikning temperaturaviy koeffitsienti

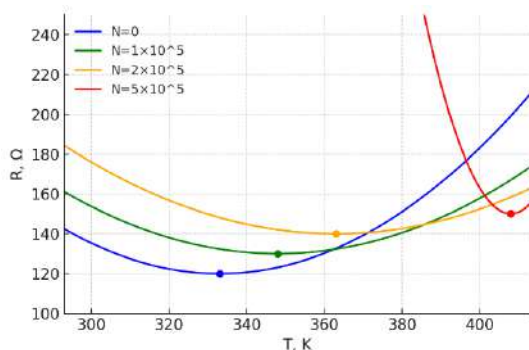
$$\alpha = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT}$$

hamda qarshilik minimumi kuzatiladigan xarakterli harorat $T_{\min}$ ning qanday o'zgarishi tahlil qilindi.

$(Bi_{0,3}Sb_{0,7})_2Te_3$ tarkibli yupqa plyonkalar termik bug'latish usuli yordamida olindi. Boshlang'ich material sifatida Bi_2Te_3 va Sb_2Te_3 birikmalarining 0,3 : 0,7 molyar nisbatdagi aralashmasi ishlatildi. Bug'latish jarayoni $(1-3) \times 10^{-2}$ Pa qoldiq bosimli vakuum kamerada amalga oshirildi. Plyonkalar poliimid (PM-1) asos ustiga

kondensatsiya qilinib, substrat harorati $T_p \approx 360$ K atrofida saqlandi. Bug'lanish intensivligi 150-200 Å/s bo'lib, natijada 3-5 μm qalinlikdagi bir xil plyonka hosil qilindi. Ushbu texnologik sharoitlar Bi-Sb-Te plyonkasining polikristall tuzilishida donalararo bo'shliqlar (g'ovaklik) hosil bo'lishiga olib keladi. Mazkur holat plyonkaning tenzosezgirlikligini, ya'ni deformatsiyaga nisbatan qarshilik o'zgarish koeffitsienti K ni sezilarli darajada oshiradi. Ilmiy manbalarda bunday plyonkalar uchun $K \approx 10^3$ qiymatga yetishi, ya'ni ularning juda yuqori tenzosezgirlikka ega ekanligi qayd etilgan [4].

Tayyorlangan namunalar maxsus qurilmaga o'rnatilib, ularga mexanik tarzda takroriy egilish yuklamalari berildi. Har bir namunaga N marta mexanik yuklama qo'llanildi, bu yerda N - deformatsiya sikllari soni bo'lib, uning maksimal qiymati $N = 5 \times 10^5$ (500 ming) gacha yetkazildi. Yuklama turi sifatida plyonkani egish-orqaga qaytarish usuli qo'llanildi; bunda zich biriktirilgan egiluvchan asos yordamida mexanik ta'sir hosil qilindi. Ushbu jarayon davomida plyonkada davriy zid belgili (ya'ni bir-biriga qarama-qarshi yo'nalgan) mexanik deformatsiyalar yuzaga keldi. Har bir ma'lum miqdordagi N deformatsiya sikllaridan so'ng namunadan elektr toki o'tkazilib, uning qarshiligi turli harorat qiymatlarida o'lchandi. Haroratni o'zgartirish oralig'i $T = 293\text{--}413$ K (20 °C dan 140 °C gacha) qilib belgilandi. O'lchash jarayonida qarshilik to'rt-o'tkazgichli o'lchash sxemasi asosida aniqlanib, natijalar haroratning funksiyasi sifatida ifodalanib, $R(T)$ bog'lanish grafigi qurildi.



1-rasm. $(\text{Bi}_{0.3}\text{Sb}_{0.7})_2\text{Te}_3$ polikristall yupqa plyonkalarining temperaturaviy qarshiligi grafigi.

Grafikda plyonkalarining turli miqdordagi tsiklik mexanik yuklamalar ta'siridan oldin ($N = 0$, ko'k chiziq) va so'ng (egri chiziqlar: $N = 1 \times 10^5$ - yashil,

$N = 2 \times 10^5$ - sariq, $N = 5 \times 10^5$ - qizil) holatlari ko'rsatilgan. Har bir egri chiziq mos ravishda plyonka qarshiligining haroratga bog'liq o'zgarishini ifodalaydi.

Ko'rinib turibdiki, dastlab $N = 0$ holatda qarshilik harorat oshishi bilan kamayib borib, taxminan 333 K atrofida minimum qiymatga (taxminan 120 Ω) erishadi, so'ngra yuqori haroratlarda yana oshishni boshlaydi. Tsiklik deformatsiyalar soni ortib borishi bilan qarshilik-harorat grafigidagi ushbu minimum nuqta o'ng tomonga siljib, ya'ni yuqoriroq haroratlarga ko'chmoqda. Masalan, $N=1 \times 10^5$ sikldan keyingi holatda qarshilik minimumi taxminan 348 K da kuzatilsa, $N = 2 \times 10^5$ sikldan so'ng bu qiymat 363 K gacha siljiydi. Nihoyat, eng katta miqdordagi ($N = 5 \times 10^5$) deformatsiya sikllari ta'sir ettirilgan namuna uchun qarshilik minimumi $T_{\min} \approx 408$ K atrofida qayd etildi.

Haroratga bog'liq qarshilik grafigida kuzatiladigan minimumning deformatsiya sikllari soni ortib borishi bilan yuqori haroratlar tomon siljishi plyonkadagi qarshilikning temperaturaviy koeffitsienti o'zgarayotganidan dalolat beradi. Boshqacha aytganda, N ortishi bilan past haroratlar sohasidagi dR/dT gradienti kamayib boradi va plyonkaning haroratga sezgirlikligi susayadi. Son jihatdan baholash natijalariga ko'ra, dastlabki holatda ($N=0$) o'lchangan temperaturaviy koeffitsient $\alpha \approx -5,6 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ qiymatga ega bo'lgan bo'lsa, $N = 5 \times 10^5$ siklli mexanik yuklama ta'siridan so'ng ushbu ko'rsatkich $\alpha \approx -2,5 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ gacha kamaydi. Bu esa temperaturaviy koeffitsientning manfiy qiymati modul jihatdan taxminan 20 baravar kichiklashganini ko'rsatadi. Mazkur holatda $\alpha = 0$ bo'ladigan harorat, ya'ni qarshilikning $R(T)$ egri chizig'idagi minimum nuqta, dastlabki 333 K atrofidagi qiymatdan 408 K gacha siljidi. Demak, tsiklik mexanik yuklama ta'siri ostida plyonka dastlab ega bo'lgan kuchli yarimo'tkazgichlik xususiyati (manfiy α) bosqichma-bosqich susayib boradi va natijada materialning elektr qarshiligi haroratga deyarli bog'liq bo'lmagan holatga yaqinlashadi ($\alpha \rightarrow 0$).

1-jadval. $(\text{Bi}_{0.3}\text{Sb}_{0.7})_2\text{Te}_3$ polikristall yupqa plyonkalarining tsiklik mexanik yuklama ta'sirida temperaturaviy qarshilik koeffitsienti (α) va qarshilik minimumi kuzatiladigan harorat ($T_{\min}$) qiymatlarining evolyutsiyasi.

Deformatsiya sikllari soni, N	Temperaturaviy koeffitsient, α (K^{-1})	$T_{\min}$, K (± 5)
0 (boshlang'ich)	-5.6×10^{-3}	333

Deformatsiya sikllari soni, N	Temperaturaviy koeffitsient, α (K^{-1})	T_{min} , K (± 5)
10^5	-2.0×10^{-3}	348
2×10^5	-1.0×10^{-3}	363
5×10^5	-2.5×10^{-4}	408

Yuqorida keltirilgan eksperimental natijalardan ko'rinadiki, plyonkaga qo'shimcha mexanik yuklama sikllari qo'llanilishi uning elektr xossalari sezilarli o'zgarishlarni keltirib chiqaradi. Mexanik ta'sirning takroriylik ortib borishi bilan plyonkaning elektr qarshiligi va uning haroratga bog'liqligi bosqichma-bosqich o'zgarib boradi. Dastlab yarimo'tkazgich tipida bo'lgan, ya'ni harorat oshishi bilan qarshiligi kamayadigan plyonka, takroriy deformatsiyalar ta'siri ostida asta-sekin metallga o'xshash xususiyat kasb eta boshlaydi. Ushbu holat qarshilikning haroratdan deyarli mustaqil bo'lib qolishi hamda temperaturaviy qarshilik koeffitsientining nolga intilishi bilan tasdiqlanadi. Natijada plyonkaning boshlang'ich yarimo'tkazgichlik xossalari susayib, uning elektr o'tkazuvchanlik mexanizmi sifat jihatdan yangi holatga o'tadi.

Olingan natijalar $(Bi_{0.3}Sb_{0.7})_2Te_3$ polikristall yupqa plyonkalarining mikrostrukturasi va elektr o'tkazuvchanligi takroriy mexanik deformatsiyalar ta'sirida sezilarli darajada o'zgarishini ko'rsatadi. Dastlab yuqori tenzosezgirlikka ega ($K \approx 10^3$) bo'lgan g'ovak plyonkalar kichik mexanik kuchlanishlarda ham elektr qarshiligining keskin o'zgarishi bilan tavsiflanadi [8]. Biroq tsiklik mexanik yuklama davom ettirilganda plyonka ichida doimiy defektlar to'planib boradi. Jumladan, dislokatsiyalar, mikroyoriqlar va ichki mexanik tarangliklar hosil bo'lib, ular materialdagi effektiv tok tashuvchilar soni hamda ularning harakatchanligiga sezilarli ta'sir ko'rsatadi. Natijada plyonkadagi elektr o'tkazuvchanlik mexanizmi o'zgaradi. Ushbu jarayonni qarshilik-harorat bog'lanishidagi minimum nuqtaning siljishi orqali yaqqol kuzatish mumkin. Aniqlanishicha, deformatsiya sikllari soni N ortishi bilan qarshilik minimumi kuzatiladigan harorat T_{min} monoton ravishda oshib boradi va ma'lum bir qiymatda to'yinishga intiladi (1-jadval). Ilgari o'tkazilgan tadqiqotlarda ham shunga o'xshash holatlar qayd etilgan bo'lib, bunday o'zgarishlar plyonkada ichki kuchlanishlarning to'planishi hamda don chegaralarida potensial to'siqlarning oshishi bilan

bog'liq ekani ta'kidlangan [4]. Agar plyonkaning g'ovak tuzilmasi dastlab yuqori darajada o'tkazuvchan donor kanallarini ta'minlagan bo'lsa, tsiklik deformatsiyalar ta'sirida ushbu kanallar qisman uziladi. Natijada elektr qarshilik ortadi va uning haroratga bog'liqligi xiralashadi, ya'ni materialning boshlang'ich yarimo'tkazgichlik xususiyatlari asta-sekin susayadi.

Keltirilgan mexanik zarar yetkazish jarayoni Bi-Sb-Te materialining energetik zonaviy tuzilishiga ham sezilarli ta'sir ko'rsatadi. Ma'lumki, $(Bi_{0.3}Sb_{0.7})_2Te_3$ tor taqiqlangan zonaga ega bo'lgan yarimo'tkazgich material bo'lib, uning energiya oralig'i taxminan 0,15 eV ni tashkil etadi. Bunday materiallarda elektr o'tkazuvchanlik ma'lum haroratda donor va akseptor qo'shimchalar konsentratsiyasining muvozanati natijasida minimal qiymatga ega bo'ladi [4]. Bizning holatda dastlab qarshilik minimumi taxminan 333 K da kuzatilgan bo'lsa, takroriy mexanik deformatsiyalar ta'sirida ushbu muvozanat nuqtasi yuqoriroq haroratlar tomonga siljidi va 408 K gacha yetdi. Bu holat shuni anglatadiki, deformatsiya sikllari soni ortishi bilan plyonkadagi effektiv donorlash darajasi o'zgaradi hamda intrinsik o'tkazuvchanlikka o'tish harorati oshadi. Boshqacha aytganda, plyonkada bo'sh tok tashuvchilar konsentratsiyasi va ularning turiga ta'sir etuvchi omillar kuchayadi. Jumladan, antidiffuziya jarayonlari, shuningdek, qo'shimcha strukturaviy defektlarning ortishi ushbu o'zgarishlarga sabab bo'lishi mumkin. 2021-yilda o'tkazilgan tadqiqotlarda Bi-Sb-Te plyonkalarida shunga o'xshash xatti-harakatlar chuqur tahlil qilingan bo'lib, mexanik deformatsiya ta'sirida plyonkaning degenerativ yarimo'tkazgich holatiga o'tishi mumkinligi ko'rsatilgan. Bunday holatda materialda metallga xos elektr o'tkazuvchanlik xususiyatlari ustunlik qila boshlaydi [3].

Mazkur ishda olingan natijalar ham ushbu xulosani tasdiqlaydi: $N = 5 \times 10^5$ deformatsiya sikllaridan so'ng temperaturaviy qarshilik koeffitsientining nolga yaqinlashishi natijasida plyonka qarshiligi haroratga deyarli bog'liq bo'lmay qoladi, ya'ni unda metallga o'xshash o'tkazuvchanlik xususiyati namoyon bo'ladi.

Ta'kidlash joizki, olingan bog'lanishlarni amaliy qo'llash nuqtai nazaridan juda muhim va foydali ma'lumotlar sifatida baholash mumkin. Mexanik charchash shikastlanishlarining to'planishi

jarayonida konstruksion materiallarda xuddi shunday mikrodefektlar hosil bo'lib borishi ma'lum. O'tkazilgan tajribalar shuni ko'rsatadiki, bunday defektlarning yig'ilishi yupqa plyonkalarining elektr qarshiligini o'ziga xos tarzda o'zgartiradi. Demak, $(Bi_{0,3}Sb_{0,7})_2Te_3$ polikristall yupqa plyonkasi asosida ishlovchi datchik yordamida mexanik konstruksiyalarning charchash holatini monitoring qilish mumkin bo'ladi. Masalan, agar ushbu turdagi datchik strukturaviy detalga birlashtirilsa, vaqt o'tishi bilan detaldagi charchash yoriqlari soni va darajasi ortib borishi natijasida datchik qarshiligining haroratga bog'liq egri chizig'i mos ravishda o'zgaradi. Bunda qarshilik minimumi kuzatiladigan haroratning siljishi hamda temperaturaviy koeffitsientning kamayishi orqali detaldagi charchash darajasini miqdoriy baholash imkoniyati paydo bo'ladi. Shu tariqa, mazkur material asosida tayyorlangan yupqa plyonkalarini charchoqni yig'uvchi tenzodatchiklar sifatida qo'llash ilmiy-amaliy jihatdan muhim ahamiyat kasb etadi. Bunday datchiklarni turli texnik tizimlar va muhandislik konstruksiyalarida strukturaviy elementlarning sog'lomlik holatini monitoring qilish uchun integratsiya qilish mumkinligi ko'rinmoqda

$(Bi_{0,3}Sb_{0,7})_2Te_3$ polikristall yupqa plyonkalarining tsiklik mexanik deformatsiyalar ostidagi temperaturaviy qarshilik xususiyatlari o'rganilib, quyidagi asosiy xulosalar olindi:

- Temperaturaviy qarshilik koeffitsienti (α) deformatsiya sikllari soni ortib borishi bilan manfiy qiymati modul jihatdan keskin kamayadi. Dastlabki holatda $\alpha \approx -5,6 \times 10^{-3} K^{-1}$ bo'lgan bo'lsa, 5×10^5 siklli mexanik yuklama ta'siridan so'ng ushbu ko'rsatkich $\alpha \approx -2,5 \times 10^{-4} K^{-1}$ qiymatga yetdi. Bu holat plyonkaning haroratga sezgirliги sezilarli darajada pasayayotganini ko'rsatadi.

- Qarshilik-harorat grafigidagi minimum nuqta, ya'ni qarshilik eng kichik qiymatga ega bo'ladigan xarakterli harorat (T_{min}), tsiklik mexanik yuklama ortishi bilan muntazam ravishda yuqori haroratlardan tomon siljidi. Agar boshlang'ich holatda ($N = 0$) $T_{min} \approx 333 K$ bo'lgan bo'lsa, $N = 5 \times 10^5$ deformatsiya sikllaridan so'ng bu qiymat 408 K gacha oshdi. Ushbu siljish plyonkadagi ichki elektr o'tkazuvchanlik mexanizmining o'zgarishini ko'rsatadi. Tsiklik deformatsiyalar ta'siri natijasida plyonka dastlab ega bo'lgan yarimo'tkazgichlik xususiyati bosqichma-bosqich susayib, materialning

elektr xossalari metallga o'xshash o'tkazuvchanlik sohasi tomon siljiydi. Bu holat qarshilikning haroratga bog'liqligi kamayishi bilan tasdiqlanadi.

$(Bi_{0,3}Sb_{0,7})_2Te_3$ polikristall yupqa plyonkalarida tsiklik mexanik ta'sir ostida charchash defektlarining yig'ilishi natijasida elektr qarshilikning haroratga bog'liqligi sezilarli darajada o'zgarishi aniqlandi. Ushbu o'zgarishlar qarshilik-harorat (R-T) grafigi asosida ishonchli tarzda qayd etilishi mumkin. Mazkur holat plyonkalarini atrof-muhit harorat sharoitida in situ datchik sifatida qo'llab, ob'ektlarning mexanik charchash darajasini masofadan monitoring qilish imkonini beradi. Zamonaviy xalqaro tadqiqotlar ham bunday yondashuvning istiqbolli ekanini ko'rsatmoqda: Bi_2Te_3 asosidagi moslashuvchan datchiklar nafaqat issiqlik oqimini, balki mexanik bosimlarni ham yuqori aniqlikda aniqlashda muvaffaqiyatli qo'llanilmoqda [4].

Yuqoridagilardan xulosa qilish mumkinki, $(Bi_{0,3}Sb_{0,7})_2Te_3$ polikristall yupqa plyonkalarda mexanik charchash jarayonini elektr qarshilikning R-T bog'lanishini kuzatish orqali diagnostika qilish imkoniyati mavjud. Kelgusidagi tadqiqotlarda ushbu turdagi tenzodatchiklarni turli materiallar va muhandislik konstruksiyalariga integratsiya qilish, shuningdek, yuqori harorat oralig'ida ($T > 413 K$) ham xuddi shunday tendensiyalarning saqlanish yoki o'zgarish xususiyatlarini o'rganish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Adabiyotlar

- [1] He J., *et al.* Recent advances of wearable and flexible piezoresistive pressure sensor devices and its future prospects. *Journal of Materiomics*, 6(1), 86–101 (2020). DOI: 10.1016/j.jmat.2019.10.002
- [2] Yu H., *et al.* Flexible temperature–pressure dual sensor based on 3D spiral thermoelectric Bi_2Te_3 films. *Nature Communications*, 15, 2521 (2024). DOI: 10.1038/s41467-024-46836-1
- [3] Daliev Kh. S., Ahmedov M. M., Onarkulov M. K. Influence of the temperature and cyclic deformations of $(Bi_xSb_{1-x})_2Te_3$ films on their resistance. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 94(5), 1369–1373 (2021). DOI: 10.1007/s10891-021-02419-1
- [4] Sulaymonov X. M. Tsiklik deformatsiyalar ta'sirida $(Bi_{0,3}Sb_{0,7})_2Te_3$ yupqa plyonkalar qarshiligining temperaturaviy bog'lanishi. *Ilmiy-texnik jurnal FerPI (STJ FerPI)*, 2015, №4, 104–106. (Rus tilida)

Ba'zi p-n o'tishli diodlarning ishlash xususiyatlariga haroratning ta'siri

O'sarov Xamidillo Saydullo o'g'li

Qo'qon universiteti Andijon filiali dotsenti, t.f.f.d., (PhD).

Annotatsiya. Elektron qurilmalar va tizimlarning ishonchliligi va ishlash samaradorligi yarimo'tkazgich materiallarning harorat o'zgarishiga qarshi ko'rsatadigan hossalarga bevosita bog'liqdir. Harorat o'zgarishi yarimo'tkazgich diodlarning ishlash xususiyatlariga sezilarli ta'sir ko'rsatadi. Harorat ortishi yarimo'tkazgich materiali zaryad tashuvchilar konsentratsiyasining ortishi, ularning harakatchanligini kamayishi hamda taqiqlangan zonasining qisqarishiga olib keladi. Ushbu tadqiqotda 1N5400 va 1N5401 turidagi p-n o'tishli diodlarning harorat 25 °C dan 200 °C gacha oraliqda ishlash xususiyatlari o'rganilgan. Natijalar shuni ko'rsatdiki, to'g'ri ulanish holatida harorat ortishi bilan diod kuchlanishi kamayib, tok ortadi, shuningdek statik qarshilik va dissipatsiya quvvati kamayadi. Teskari ulanishda esa diodning tok va kuchlanish ko'rsatkichlari 150 °C gacha bo'lgan harorat oralig'ida sezilarli o'zgarishsiz qoladi. Natijalar elektron qurilmalarni loyihalashda komponentlarning haroratga bog'liq xususiyatlarini hisobga olish zarurligini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: harorat, yarimo'tkazgich, diod, p-n o'tish, to'g'ri ulanish, teskari ulanish.

Аннотация. Надежность и эффективность работы электронных устройств и систем напрямую зависят от свойств полупроводниковых материалов, реагирующих на изменения температуры. Изменение температуры оказывает значительное влияние на эксплуатационные характеристики полупроводниковых диодов. Повышение температуры приводит к увеличению концентрации носителей заряда в полупроводниковом материале, снижению их подвижности и сокращению запрещенной зоны. В данном исследовании изучены эксплуатационные характеристики диодов с p-n переходом типов 1N5400 и 1N5401 в температурном диапазоне от 25 °C до 200 °C. Результаты показали, что при прямом подключении с повышением температуры уменьшается напряжение диода, увеличивается ток, а также снижается статическое сопротивление и dissipation мощности. При обратном подключении ток и напряжение диода остаются почти неизменными в пределах температурного диапазона до 150 °C. Результаты подчеркивают необходимость учета температурных характеристик компонентов при проектировании электронных устройств.

Ключевые слова: температура, полупроводник, диод, p-n переход, прямое подключение, обратное подключение.

Abstract. The reliability and efficiency of electronic devices and systems are directly related to the thermal properties of semiconductor materials. Temperature changes have a significant effect on the operational characteristics of semiconductor diodes. An increase in temperature leads to an increase in charge carrier concentration, a decrease in their mobility, and a reduction in the forbidden band. This study investigates the operational characteristics of p-n junction diodes, types 1N5400 and 1N5401, in the temperature range from 25 °C to 200 °C. The results show that in forward connection, as the temperature increases, the diode voltage decreases, the current increases, and both static resistance and dissipation power decrease. In reverse connection, the current and voltage characteristics of the diode remain almost unchanged within the temperature range up to 150 °C. The results highlight the importance of considering the temperature-dependent properties of components in the design of electronic devices.

Keywords: temperature, semiconductor, diode, p-n junction, forward connection, reverse connection.

I. Kirish.

Harorat o'zgarishlari diodlar, tranzistorlar va operatsion kuchaytirgichlar kabi yarimo'tkazgich qurilmalarining ishlash xususiyatlariga sezilarli ta'sir ko'rsatadi. Haroratning ortishi yarimo'tkazgich diodlarning zaryad tashuvchilar konsentratsiyasining ortishi, ularning harakatchanligining kamayishi hamda taqiqlangan zonasining torayishi kabi o'zgarishlarni keltirib chiqaradi. Ushbu omillar natijasida to'g'ri ulanishdagi kuchlanish kamayishi va teskari oqish toki ortishi mumkin [1,2].

Haroratning ortishi diodning issiqlik qarshiligiga ham ta'sir qiladi va uning issiqlikni samarali tarqatish qobiliyatini o'zgartiradi. Natijada yuqori darajada issiqlik to'planishi tufayli diodning muddatidan oldin ishdan chiqishiga olib keluvchi issiqlik qochishi hodisasi yuzaga kelishi mumkin [3–5]. Umuman olganda, harorat yarimo'tkazgich qurilmalarining ishlashi va ishonchliligiga muhim ta'sir ko'rsatadi. Shu sababli elektron qurilmalarni loyihalashda issiqlik boshqaruvi masalasi alohida ahamiyatga ega [6,7].

Haroratga bog'liq ushbu xususiyatlarni chuqur tushunish ishonchli elektron sxemalarni loyihalash uchun juda muhimdir, chunki ular

turli amaliy qo'llanmalarda qurilmalarning samaradorligi, barqarorligi va umumiy ishlash ko'rsatkichlariga bevosita ta'sir qiladi. Shu sababli muhandislar qurilmalar belgilangan harorat oralig'ida ishlashini ta'minlash uchun o'z loyihalarida issiqlikni boshqarish jarayonlarini hisobga olishlari zarur.

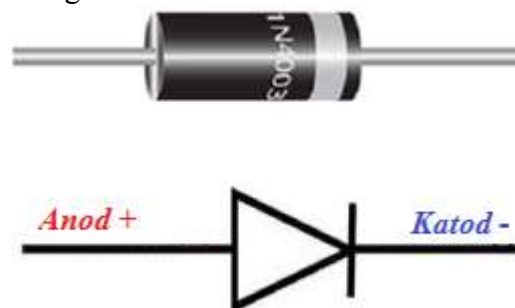
Shu bilan bir qatorda harorat o'zgarishlari diodlardan foydalaniladigan sensor tizimlarida o'lchovlarning aniqligi va ishonchliligiga ham ta'sir qilishi mumkin. Shuning uchun sensor sxemalarida harorat ta'sirini kalibrlash va kompensatsiya qilish muhim hisoblanadi [8]. Bu ayniqsa avtomobilsozlik, aviatsiya-kosmik texnologiyalar va tibbiy qurilmalar kabi sohalarda muhim ahamiyatga ega, chunki ushbu tizimlarda aniq o'lchovlar xavfsizlik va funksionallik uchun muhim ahamiyatga ega. Harorat kompensatsiyasi usullari, masalan, harorat sensorlari yordamida ish sharoitidagi o'zgarishlarni kuzatish va mos ravishda tuzatish kiritish, sensorlarning aniqligiga haroratning salbiy ta'sirini kamaytirishga yordam beradi [9].

Elektron komponentlarning harorati o'zgarishi qurilmaning o'zida hosil bo'ladigan ichki issiqlik yoki unga yaqin joylashgan boshqa qurilmalar tomonidan hosil qilinadigan issiqligi natijasida yuzaga kelishi mumkin. Ko'p hollarda faqat katta quvvat sarflaydigan va ko'p issiqlik chiqaradigan qurilmalar uchun issiqlikni tarqatish choralariga e'tibor qaratiladi. Natijada ayrim elektron qurilmalar muddatidan oldin ishdan chiqishi mumkin, chunki past quvvatli yarimo'tkazgich komponentlar ham muhitdagi issiqlik ta'sirida ishdan chiqishi mumkin.

Ba'zi hollarda bunday nosozliklar ishlab chiqaruvchi tomonidan belgilangan xavfsiz ish harorati rejimida ham yuz berishi kuzatilgan. Shu sababli tadqiqotchilar past quvvatli yarimo'tkazgich qurilmalarining ishlash xususiyatlariga atrof-muhitning harorat o'zgarishi ta'sirini o'rganishlari muhim hisoblanadi. Bunday tadqiqotlar natijasida olingan ma'lumotlar elektron tizimlarni loyihalovchilarga atrof-muhit issiqligi ta'siriga sezgir bo'lgan past quvvatli yarimo'tkazgich qurilmalarini aniqlash va ular uchun mos issiqlik tarqatish choralarini ko'rishda yordam beradi.

p-n o'tishli diod ikkita anod va katod qutbiga ega bo'ladi. Agar anod musbat kuchlanishga, katod esa manfiy kuchlanishga ulangan bo'lsa, qurilma orqali elektr toki oqadi, ya'ni diod to'g'ri ulanish holatida ishlaydi. Diodlar kuchlanishni to'g'rilash, ta'minot manbaidan signallarni ajratish, kuchlanish etalonini hosil qilish, signal amplitudasini boshqarish, signallarni aralashtirish, signallarni aniqlash hamda yoritish tizimlari kabi sohalarda keng qo'llaniladi.

Eng ko'p qo'llaniladigan p-n o'tishli diod turlariga 1N5400, 1N5401, 1N5402 va 1N5404 diodlari kiradi. p-n o'tishli diodning ko'rinishi va sxematik belgisi quyidagi rasmda ko'rsatilgan.



1-rasm. p-n o'tishli diodning tashqi ko'rinishi va sxematik belgisi

Ushbu diodlar ishonchliligi va keng qo'llanilish imkoniyatlari tufayli turli elektron sxemalar va tizimlarda keng qo'llaniladi. Masalan, 1N5400 seriyali diodlar odatda quvvat manbalari va elektron qurilmalarda kuchlanishni to'g'rilash uchun ishlatiladi. 1N5401 diodi ko'pincha signalni ajratish va kuchlanish etaloni sifatida qo'llaniladi. 1N5402 diodi signal amplitudasini boshqarish imkoniyati bilan, 1N5404 diodi esa odatda signallarni aralashtirish va aniqlash jarayonlarida ishlatiladi. Umuman olganda, p-n o'tishli diodlar zamonaviy elektronikaning muhim elementlaridan biri bo'lib, elektron tizimlarning to'g'ri ishlashini ta'minlashda muhim rol o'ynaydi.

Mazkur diodlar turli tok va kuchlanishlarga mos holda ishlab chiqilgan bo'lib, bu ularni turli elektron sxemalarda qo'llash imkonini beradi. Bundan tashqari, ularning kichik o'lchami va nisbatan arzonligi ularni ommaviy ishlab chiqarish va murakkab elektron tizimlarga integratsiya qilish imkonini beradi. Quvvat manbalari va signalni qayta ishlash sxemalaridan tashqari, p-n o'tishli diodlar radiochastota sxemalarida, kuchlanish

stabilizatorlarida hamda kuchlanishni cheklash sxemalarida ham keng qo'llaniladi [10].

Quyidagi 1-jadvalda ishlab chiqaruvchi tomonidan berilgan 1N5400, 1N5401, 1N5402

va 1N5404 diodlarining maksimal ruxsat etilgan ko'rsatkichlari va elektr tavsiflari keltirilgan.

1-jadval

1N5400, 1N5401, 1N5402 va 1N5404 diodlarining maksimal ruxsat etilgan qiymatlari va elektr tavsiflari [11].

Parametrlar	1N5400	1N5401	1N5402	1N5404
Maksimal takrorlanuvchi teskari amplituda kuchlanish (V)	50	100	200	400
Maksimal o'rtacha kvadratik qiymatdagi kuchlanish – RMS (V)	35	70	140	280
Maksimal o'zgarmas teskari bloklovchi kuchlanish (T = 150 °C gacha)	50	100	200	400
T = 75 °C da maksimal o'rtacha to'g'ri rektifikatsiya toki (A)	3	3	3	3
3.0 A amplituda tokda maksimal to'g'ri kuchlanish tushuvi (V)	1,2	1,2	1,2	1,2
T = 25 °C da maksimal teskari tok (μA)	10	10	10	10
T = 100 °C da maksimal teskari tok (μA)	500	500	500	500
Odatdagi o'tish sig'imi (pF)	50	50	50	50
Saqlash harorati diapazoni (°C)	-65 ÷ 175	-65 ÷ 175	-65 ÷ 175	-65 ÷ 175
Ishlash harorati diapazoni (°C)	-65 ÷ 175	-65 ÷ 175	-65 ÷ 175	-65 ÷ 175

p-n o'tishli diodlarning volt–amper xarakteristikasi ularning turli ish sharoitlaridagi ishlash xususiyatlarini yaxlit tushunishga imkon beradi. Shockley diod tenglamasi diod orqali oqayotgan tok va unga berilgan kuchlanish o'rtasidagi bog'liqlikni ifodalaydi va quyidagicha yozilishi mumkin [12]:

$$I_D = I_S \left(e^{\frac{qV_D}{\eta k_B T}} - 1 \right)$$

Bu yerda:

I_D – diod orqali oqayotgan tok;

I_S – qorong'ulikdagi tutilish toki;

V_D – diodning uchlari bo'ylab qo'llanilgan kuchlanish;

q – elektron zaryadining absolyut qiymati;

η – proporsanallik koeffitsienti (1 dan 2 gacha bo'lgan son);

k_B – Boltsman doimiysi;

T – absolyut harorat.

Qorong'ulikdagi tutilish toki (I_S) har bir diodni boshqasidan ajratib turuvchi muhim parametr hisoblanadi. U yorug'lik yo'qligida diodning oqish toki sifatida namoyon bo'ladi. Bu tok dioddagi rekombinatsiya jarayoni bilan

to'g'ridan-to'g'ri proporsionaldir. Shuningdek, harorat oshishi bilan u ortadi, material sifati yaxshilanganda esa kamayadi. Diod tenglamasi shuningdek quyidagi shaklda ham ifodalanishi mumkin:

$$I_D = I_S \left(e^{\frac{V_D}{nV_T}} - 1 \right)$$

Bu yerda V_T termik kuchlanish deb ataladi va xona haroratida (300 K) uning qiymati 25,85 mV ga teng. Agar diod teskari ulanish holatida bo'lsa, diod tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$I_D \approx -I_S$$

Bu shuni anglatadiki, teskari ulanishdagi diod orqali juda kichik manfiy tok oqadi, bu teskari tutilish toki deb ataladi. Shuningdek, diodning qarshiligi ham haroratga bog'liq bo'lib, bu uning ishlash samaradorligi va kuchlanish tushuviga ta'sir qiladi. Diod qarshiligi ikki turga bo'linadi:

1. DC yoki statik qarshilik – diod DC sxemada ishlayotganda ko'rsatadigan qarshilik. U quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$R_{DC} = \frac{V_D}{I_D}$$

2. AC yoki dinamik qarshilik – diodning o'zgaruvchan tok va kuchlanish sharoitidagi qarshiligi.

$$R_{AC} = \frac{dV_D}{dI_D} \approx \frac{\eta V_T}{I_D}$$

Bu yerda η – diodning proporsionallik koeffitsienti. Shuningdek, diod orqali oqayotgan tok qancha kichik bo'lsa, shuncha dinamik qarshilik kattalashadi.

Yuqori haroratlarda diod qarshiligining kamayishi diod orqali tarqaladigan quvvatning kamayishiga olib keladi. DC sxemada diod tomonidan tarqatiladigan quvvat quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$P = V_D \cdot I_D$$

Bundan tashqari, yarimo'tkazgichning dielektrik va izolyatsiya materiallarining harorat barqarorligi diodning yuqori harorat sharoitlarida ishlashiga sezilarli ta'sir ko'rsatadi. Shu sababli, elektron tizimlarni loyihalashda yarimo'tkazgich qurilmalar bilan birga yetarli darajada sifatli dielektrik materiallar ishlatilishini ta'minlab, qurilmalarni ishonchli termal ishlashga moslashtirish muhimdir.

Adabiyotlar sharhi

[13] ishda rux oksidi (ZnO) Schottky bar'yer diodining yuqori haroratdagi xususiyatlariga ta'siri o'rganilgan bo'lib, unda ideal koeffitsient 240–400 K harorat oralig'ida deyarli o'zgarmas bo'lib qolishi, bu esa ushbu harorat oralig'ida kontaktning barqarorligini tasdiqlashi keltirilgan.

[14] ishda polikristalli olmos metall–yarimo'tkazgich diodining elektr xususiyatlariga harorat va seriyali qarshilikning ta'siri o'rganilgan bo'lib, unda 25–300 °C harorat oralig'ida qurilmaning volt-ampere xarakteristikasi ko'rsatilgan.

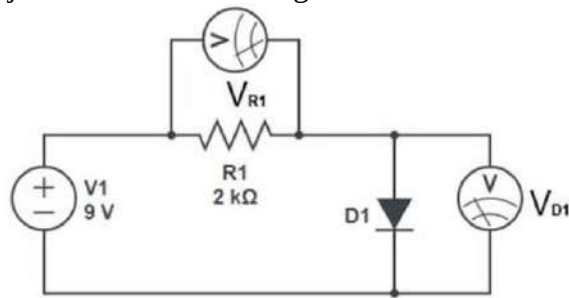
[15] ishda Ti/n–GaAs diodining tok, sig'im, o'tkazuvchanlik va kuchlanish xususiyatlariga haroratning ta'siri o'rganilgan. Tadqiqot shuni ko'rsatadiki, taqiqlangan zona kengligining harorat koeffitsienti kontakt metallining tabiati yoki uning elektromagnit xossalriga bog'liq holda o'zgaradi. Ushbu natija DC magnetron sputtering usuli yordamida Ti/n–GaAs Schottky bar'yer diodi qurish va ishlab chiqarish jarayonida olingan.

Kuchlanish–sig'im xususiyatlari 80–320 K harorat oralig'ida tadqiq qilingan. Diod parametrlarining harorat bilan o'zgarishi taqiqlangan zona kengligidagi lateral nogomogenliklar bilan izohlanadi.

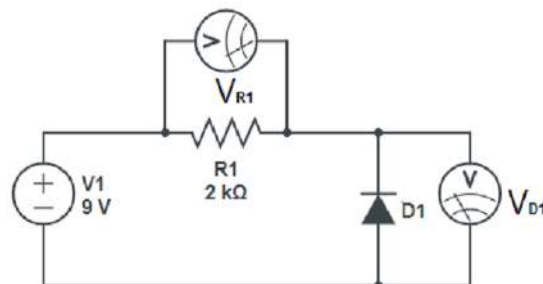
Ko'plab olimlar yarimo'tkazgich diodlarning yuqori va past haroratlarda ishlashiga ta'sirini o'rganishgan bo'lib, yuqori haroratlar yarimo'tkazgich diodlarning ishlash xususiyatlariga sezilarli ta'sir ko'rsatishini aniqlaganlar.

II. Metodologiya

Ushbu tadqiqotda raqamli multimetrlar, elektr qizdirgich, breadboard, Vero board, termometr, batareyalar, ulash simlari, rezistorlar va diodlar (1N5400, 1N5401, 1N5402 va 1N5404) ishlatilgan. Tajriba jarayonida raqamli multimetrlardan seriyali rezistor va diod kuchlanishini o'lchash uchun, termometrdan esa diod qizdirilgan vaqtidagi atrof-muhit haroratini aniqlash uchun foydalanildi. Quyidagi 1- va 2- rasmlarda to'g'ri va teskari ulanishdagi diodlarning tajribasi sxemasi keltirilgan.



1-rasm. To'g'ri ulanishdagi diod tajribasi sxemasi



2-rasm. Teskari ulanishdagi diod tajribasi sxemasi

III. Natijalar

To'g'ri ulanish va teskari ulanish holatlaridagi diodlarni sinovdan o'tkazish natijalari 2- va 3-jadvallarda keltirilgan.

2-jadval

To'g'ri ulanishdagi IN5400 va IN5401 diodlari sinov natijalari

N _o	T, °C	V _{D1} , V	I _{D1} , mA	V _{R1} , V	R _{D1} , Ω	P _{D2} , mW	V _{D2} , V	I _{D2} , mA	V _{R2} , V	R _{D2} , Ω	P _{D2} , mW
1	25	0,34	4,43	8,86	76,75	1,51	0,35	4,40	8,79	79,64	1,54
2	50	0,34	4,43	8,86	76,75	1,51	0,35	4,40	8,79	79,64	1,54
3	75	0,32	4,45	8,89	71,91	1,42	0,35	4,40	8,80	79,55	1,54
4	100	0,26	4,47	8,94	58,17	1,16	0,33	4,41	8,82	74,83	1,46
5	125	0,24	4,48	8,96	53,57	1,08	0,29	4,43	8,86	65,46	1,28
6	150	0,16	4,52	9,04	35,40	0,72	0,26	4,45	8,89	58,49	1,16
7	175	0,11	4,54	9,08	24,23	0,50	0,19	4,48	8,95	42,46	0,85
8	200	0,07	4,56	9,12	15,35	0,32	0,13	4,51	9,01	28,86	0,59

2-jadval natijalaridan ko'rinib turibdiki, to'g'ri ulanish holatidagi diodda harorat ortishi bilan kuchlanish odatda kamayadi, tok esa harorat ortishi bilan ortadi.

3-jadval

Teskari ulanishdagi diodlar sinov natijalari

N _o	T, °C	V _{D1} , V	I _{D1} , mA	V _{R1} , V	V _{D2} , V	I _{D2} , mA	V _{R2} , V
1	25	9,32	0,03	0,06	9,34	0,00	0,00
2	50	9,32	0,03	0,06	9,34	0,00	0,00
3	75	9,32	0,03	0,06	9,34	0,00	0,00
4	100	9,32	0,03	0,06	9,34	0,00	0,00
5	125	9,29	0,05	0,09	9,34	0,00	0,00
6	150	9,21	0,09	0,17	9,33	0,01	0,02
7	175	9,03	0,18	0,35	9,24	0,05	0,10
8	200	8,46	0,44	0,88	8,58	0,39	0,78

3-jadval natijalaridan ko'rinib turibdiki, teskari ulanishdagi diod kuchlanishi va tokiga atrof-muhit haroratining ta'siri taxminan 125÷150 °C gacha e'tiborga olinmaydi. 150 °C dan ortgach, teskari ulanishdagi diod kuchlanishi harorat ortishi bilan kamayadi, teskari oqish toki esa harorat ortishi bilan ortadi.

IV.Xulosa

Olib borilgan IN5400 va IN5401 diodlar uchun to'g'ri ulanishdagi kuchlanish harorat oshishi bilan odatda kamaygan, tok esa harorat oshishi bilan ortgan. Teskari ulanishdagi diod kuchlanishi va tokiga atrof-muhit haroratining ta'siri taxminan 125÷150 °C gacha e'tiborga olinmaydi. 150 °C dan ortgach, teskari ulanishdagi diod kuchlanishi harorat ortishi bilan kamayadi, teskari oqish toki esa harorat ortishi bilan ortadi. Tavsiya etish mumkinki, elektronika qurilmalarini ishlab chiqaruvchi va muhandislar har qanday komponentni ishlatishdan oldin uning harorat ta'siriga oid ma'lumotlarni o'rganishlari lozim.

Foydalanilgan adabiyotlar

- [1].Bernardo C.P.C.V., Lameirinhas R.A.M., de Melo Cunha J.P. et al. A revision of the semiconductor theory from history to applications. Discov Appl Sci.2024,6, 316. <https://doi.org/10.1007/s42452-024-06001-1>
- [2].Obreja V.V.N. An experimental investigation on the nature of reverse current of silicon power pn-junctions, IEEE Transactions on Electron Devices. 2002, 49(1), 155-163. <https://doi.org/10.1109/TED.2002.1291850>
- [3].Bödeker C., Vogt T., Silber D., and Kaminski N. Criterion for the Stability Against Thermal Runaway During Blocking Operation and Its Application to SiC Diodes, IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics. 2016, 4(3), 970-977. <https://doi.org/10.1109/JESTPE.2016.2543526>
- [4].Iannuzzo F., Abbate C., and Busatto G. Instabilities in silicon power devices: A review of failure mechanisms in modern power devices, IEEE Industrial Electronics Magazine. 2014, 8(3), 28-39. <https://doi.org/10.1109/MIE.2014.2305758>
- [5].Whitaker J.C. Semiconductor Failure Modes. In Electronic Systems Maintenance Handbook. CRC Press. 2017.
- [6].Arden L. and Li S. Emerging challenges and materials for thermal management of electronics, Materials. 2014, 17(4), 163-174. <https://doi.org/10.1016/j.mat.2014.04.003>
- [7].Mathew J., and Krishnan S. A Review on Transient Thermal Management of Electronic Devices, Journal of Electronic Packaging. 2022, 144(1). <https://doi.org/10.1115/1.4050002>

- [8].Fleming A.J. A review of nanometer resolution position sensors: Operation and performance, *Sensors and Actuators A: Physical*. 2013, 190, 106-126.
- [9].Croxford A. J., Moll J., Wilcox P.D., and Michaels J.E. Efficient temperature compensation strategies for guided wave structural health monitoring. *Ultrasonics*. 2010, 50(4-5), 517-528.
- [10].Semple J., Georgiadou D.G, Wyatt-Moon G., Gelinck G. and Thomas D Anthopoulos T.D. Flexible diodes for radio frequency (RF) electronics: a materials perspective, *Semiconductor Science and Technology*. 2017, 32. <https://doi.org/10.1088/1361-6641/aa89ce>
- [11].Alldatasheets. IN5400 Datasheet (PDF) Download - CHENG-YI ELECTRONIC CO., LTD. Internet: June 02 2025, <https://www.alldatasheet.com/datasheet-pdf/download/329388/CHENG-YI/IN5400.html>
- [12].Hubbard, S. PN Junctions and the Diode Equation. In *Photovoltaic Solar Energy: From Fundamentals to Applications*, First Edition. Wiley & Sons, Ltd. 2017, 54-66. <https://doi.org/10.1002/9781118927496.ch7>
- [13].Emre G., Tuzemen S., Bayram K. and Coskun C. High Temperature Scottky Diode Characteristics of Bulk ZnO. *Journal of Institute of Physics*. 2007, 19 (19), 1-20.
- [14].Kang W.P., Davidson J. L., Gurbuz Y. and Kerns, D.V. Temperature dependence and effect of series resistance on the electrical characteristics of a polycrystalline diamond metal-insulator-semiconductor diode, *Journal of Applied Physics*. 1995, 78(2).
- [15].Ederha K., Duman S., Nuhoglu C., Urhan F. and Turut A. Effect of temperature on the current (capacitance and conductance) – voltage characteristics of GaAs diode *Journal of American Institute of Physics*. 2014, 116(23).

Granullangan Mg_3Sb_2 termoelektrik materialining mikrotuzilmasi

Omonboyev Fazliddin Lutfiddin o'g'li

Andijon davlat universiteti

Annotatsiya. Ushbu maqolada granullangan Mg_3Sb_2 termoelektrik materialining mikrostrukturasi va kimyoviy tarkibi energiya-dispersiyaviy rentgen spektroskopiya hamda elektron mikroskopiya usullari yordamida tadqiq qilindi. Olingan natijalar zarrachalarning polikristall tuzilishga ega ekanligini va granulararo chegaralar mavjudligini ko'rsatdi.

Rentgen spektroskopiya tahlillari asosida namuna tarkibida Mg va Sb asosiy elementlar bilan bir qatorda O, C va Si elementlari ham aniqlanib, ularning fazoviy taqsimoti bir jinsli emasligi kuzatildi. Xususan, kislorodning zarracha sirtida ortishi zarrachalarda yadro–qobiq tipidagi tuzilma hosil bo'lishini ko'rsatdi.

Kalit so'zlar: Mg_3Sb_2 , EDS, kimyoviy tarkib, oksid qatlam, donalararo chegara, termoelektr material.

Аннотация. В данной статье микроструктура и химический состав гранулированного термоэлектрического материала Mg_3Sb_2 были исследованы с использованием методов энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии и электронной микроскопии. Полученные результаты показали, что частицы имеют поликристаллическую структуру и содержат межзеренные границы.

На основе анализа рентгеновской спектроскопии установлено, что в составе образца наряду с основными элементами Mg и Sb также присутствуют элементы O, C и Si, при этом наблюдается неоднородность их пространственного распределения. В частности, увеличение содержания кислорода на поверхности частиц указывает на формирование в них структуры типа «ядро–оболочка».

Ключевые слова: Mg_3Sb_2 , EDS, химический состав, оксидный слой, межзеренная граница, термоэлектрический материал.

Abstract. In this article, the microstructure and chemical composition of the granulated thermoelectric material Mg_3Sb_2 were investigated using energy-dispersive X-ray spectroscopy and electron microscopy methods. The obtained results showed that the particles have a polycrystalline structure and contain intergranular boundaries.

Based on the X-ray spectroscopy analysis, it was found that, in addition to the main elements Mg and Sb, the sample also contains O, C, and Si elements, and their spatial distribution is not uniform. In particular, the enrichment of oxygen on the particle surface indicates the formation of a core–shell type structure in the particles.

Keywords: Mg_3Sb_2 , EDS, chemical composition, oxide layer, grain boundary, thermoelectric material.

I. KIRISH

So'nggi yillarda ekologik toza va samarali energiya manbalarini yaratish muammosi global miqyosda dolzarb ahamiyat kasb etmoqda. Ushbu yo'nalishda termoelektr materiallar yordamida issiqlik energiyasini bevosita elektr energiyasiga aylantirish texnologiyalari alohida o'rin tutadi.

Mg_3Sb_2 asosidagi yarimo'tkazgich materiallar past issiqlik o'tkazuvchanligi va yuqori termoelektr xossalari bilan ajralib turadi. Ushbu materiallarning termoelektr parametrlariga ularning kristall tuzilishi, temperatura va tarkibiy modifikatsiyalar sezilarli ta'sir ko'rsatadi [1, 2].

II. ADABIYOTLAR TAHLILI

[3, 4, 5] tadqiqotlarda granullangan Mg_3Sb_2 materialida elektr va termoelektr parametrlarning zarrachalararo chegaralar

orqali boshqarilishi ko'rsatib berilgan. Ushbu tizimda donalararo chegaralarda lokal energetik holatlar (tuzoq darajalar) hosil bo'lib, ular zaryad tashuvchilar transportiga sezilarli ta'sir ko'rsatadi. Harorat ortishi bilan bu tuzoq holatlarning ionlashuvi elektr o'tkazuvchanlikning kamayishiga, shu bilan birga Seebeck koeffitsientining ortishiga olib keladi.

Shu bilan birga, zarrachalar yuzasida oksid qatlamlarning hosil bo'lishi va kimyoviy geterogenlik donalararo potensial to'siqlarning shakllanishiga sabab bo'ladi. Bu esa granullangan Mg_3Sb_2 materialida tok o'tish jarayonlarining chegaralar bilan boshqariladigan mexanizm asosida kechishini ta'minlaydi.

Biroq, granullangan Mg_3Sb_2 zarrachalarining mikrostrukturasi, kimyoviy tarkibi va granulararo chegaralar hosil bo'lish

mexanizmlari hali to'liq o'rganilmagan. Shu sababli ushbu ishda granullangan Mg_3Sb_2 materialining element tarkibi energiya-dispersiyaviy rentgen spektroskopiya usuli yordamida tahlil qilinadi va olingan natijalar asosida uning strukturaviy xususiyatlari muhokama etiladi.

III.TADQIQOT METODOLOGIYASI

Tadqiqotlar uchun kukunli texnologiya asosida tayyorlangan granullangan Mg_3Sb_2 zarrachalari tanlab olindi. Dastlab Mg_3Sb_2 kukunlari etil spirit aralashtirilib, bir jinsli aralashma hosil qilindi. Tayyorlangan aralashma issiqlikka chidamli trubasimon keramik substrat ichiga joylashtirilib, 0,3–0,5 kN kuch ta'sirida zichlashtirish orqali granulali Mg_3Sb_2 zarrachalaridan tashkil topgan sterjen ko'rinishidagi namuna hosil qilindi. Ma'lumki, granullangan yarimo'tkazgich tizimlarda zarrachalar orasida donalararo chegaralar shakllanadi va zaryad tashuvchilar transporti aynan shu chegaralarning morfologik va energetik xususiyatlari bilan belgilanadi [6]. Shu sababli ushbu ishda tayyorlangan namunalar strukturasi va tarkibini chuqur tahlil qilish muhim hisoblanadi.

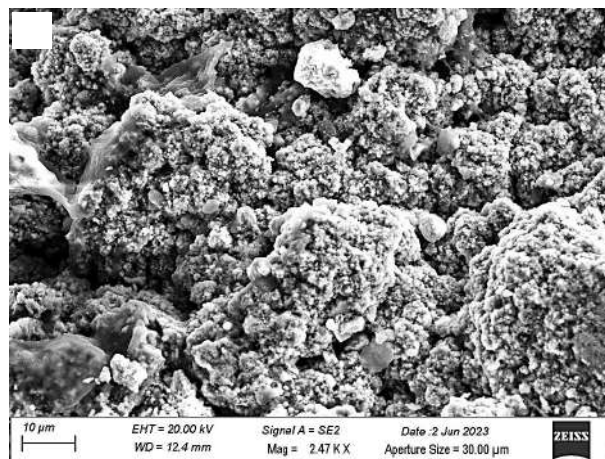
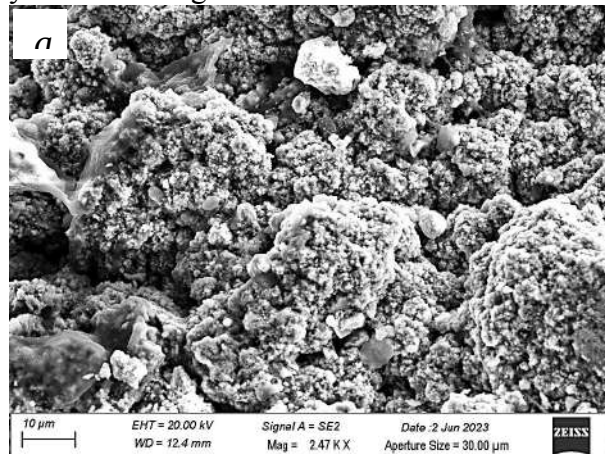
Ushbu tadqiqot ishining ilmiy yangiligi o'tkazilgan tajribalar natijasida qarshilik orqali qizdirib biriktirish usuli yordamida sterjen shaklidagi polikristall tuzilma hosil qilish mumkinligi aniqlandi. Hosil qilingan namunalar mikrostrukturasi va morfologiyasi JEOL JXA-8800R elektron mikroskopi yordamida o'rganildi. Ushbu qurilma 0.1–30 kV tezlatish kuchlanishida ishlaydi, 1 nm gacha bo'lgan tuzilmalarni 25 martadan 650 000 martagacha kattalashtirish imkonini beradi hamda element tarkibini yuqori aniqlik bilan ($\approx 10^{-3}$) aniqlash imkonini beradi.

IV.NATIJALAR VA ULARNING TAHLILI

Namuna issiqqa chidamli trubasimon keramika substratdan ajratib olinib, elektron mikroskop yordamida o'rganildi. Tahlillar shuni ko'rsatadiki, zarrachalar va zarrachalararo chegaralardan tashkil topgan tipik polikristall struktura hosil bo'ladi.

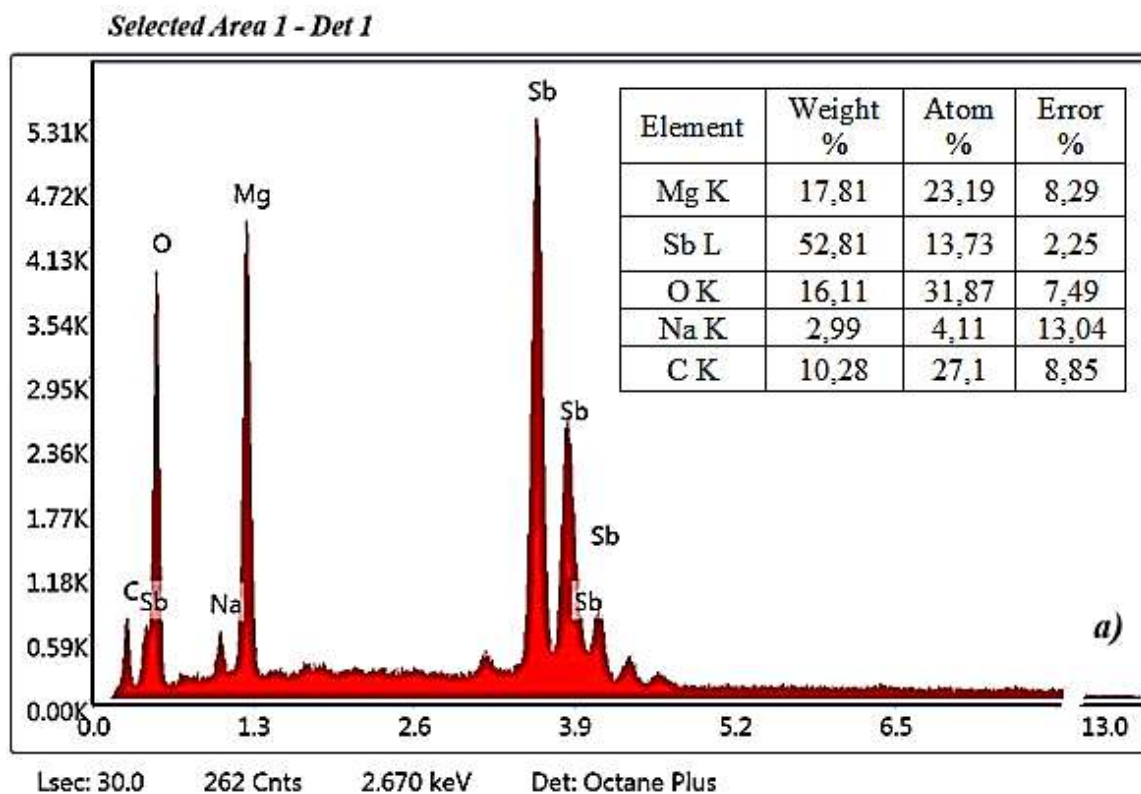
1-rasmdan ko'rinadiki, zarrachalar o'zaro zich joylashgan bo'lib, ular orasida aniq

ifodalangan donalararo chegaralar mavjud. Ushbu chegaralar zarrachalar orasida uzluksiz fazoviy tarmoq hosil qiladi va materialning elektr hamda termoelektr xossalari belgilovchi asosiy strukturaviy element sifatida qaraladi. Granullangan Mg_3Sb_2 namunalarining kimyoviy tarkibi turli lokal sohalarida energiya-dispersiyaviy rentgen spektroskopiya usuli yordamida o'rganildi.



1-rasm. Granullangan Mg_3Sb_2 zarrachalarining mikrostrukturaviy tasviri.

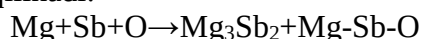
Rentgen spektral xarakteristiksi tahlil natijalariga ko'ra, namuna tarkibi asosan Mg va Sb elementlaridan tashkil topgan bo'lib, qo'shimcha ravishda O, C va Si elementlari ham aniqlangan. Elementlarning taqsimoti zarracha va chegaraviy sohalarida turlicha bo'lib, ayniqsa kislorod miqdori zarracha markazidan sirt tomon ortib borishi kuzatilgan. Bu holat zarrachalar yuzasida oksid qatlamlar shakllanishini ko'rsatadi. Ayrim hududlarda aniqlangan kremniy va uglerod elementlari esa issiqqa chidamli keramika substrat bilan bog'liq bo'lishi mumkin.



2-rasm. Granullangan Mg_3Sb_2 namunadagi rentgen spektral xarakteristika.

Olingan natijalar asosida granullangan zarrachalarning ikki qavatli tuzilishga ega ekanligi aniqlanadi: yadro qismi — Mg_3Sb_2 asosiy faza; sirt qismi — oksidlangan qatlam ($Mg-Sb-O$ tizimi).

Shunga mos ravishda zarrachalarda quyidagi umumiy kimyoviy reaksiya model taklif qilinadi:



Bu esa zarrachalar ichida asosiy yarimo'tkazgich faza saqlanib qolgan holda, sirt sohalarda oksid qatlamlar hosil bo'lishini bildiradi.

Mazkur strukturaviy holat granullangan Mg_3Sb_2 materialining funksional xususiyatlariga bevosita ta'sir ko'rsatadi. Xususan, oksid qatlamlar donalararo chegaralarda potensial to'siqlar hosil qilib, zaryad tashuvchilar transportini chegaralaydi. Shu sababli materialda elektr o'tkazuvchanlik klassik kristallardan farqli ravishda chegaralar bilan boshqariladigan mexanizm asosida amalga oshadi.

Tadqiqotlar olib bo'rish uchun 2-rasmda keltirilgan rentgen spektral xarakteristikasi hamda jadvallarda aniqlangan elementlar tarkibi va miqdoridan foydalanamiz. Zarrachalar tarkibi elementlarning og'irlik va

atom massalari yordamida modda massasini molga aylantirish orqali har bir elementning miqdorini hamda birikma formulasini quyidagicha ifodalash mumkin [9]:

$$\text{Weight \%} \frac{1 \text{ mol}}{\text{Atom massasi, g}} = \text{mol} \quad (1)$$

(1) ifoda asosida aniqlangan har bir mol nisbatlarini eng kichik qiymatiga bo'lamiz:

$$\frac{\text{mol}}{\text{mol eng kichik}} = x \quad (2)$$

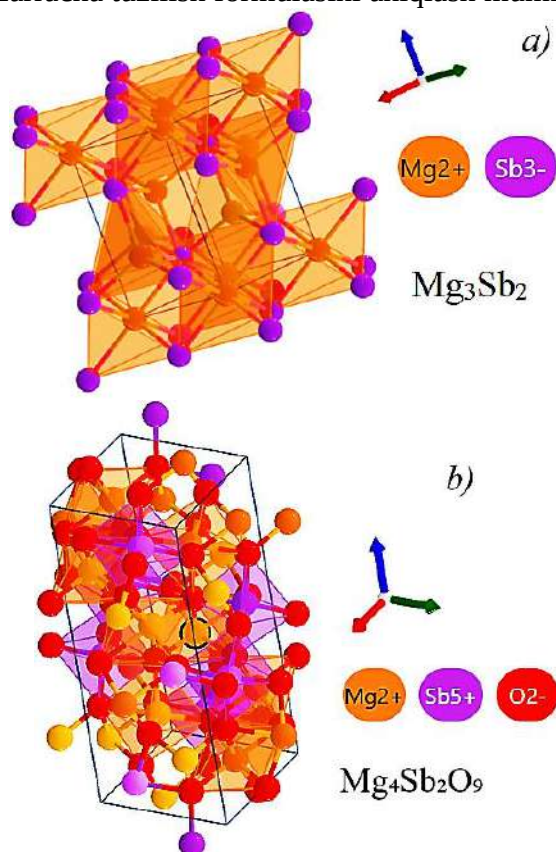
(2) formula orqali har bir element uchun tegishli qiymatlarni aniqlashimiz mumkin. Shunday qilib, (1) ifoda yordamida 2-rasmda keltirilgan element og'irligi va atom massalari yordamida elementlar massasini molini hisoblaymiz.

Hisoblash natijalaridan ko'rinadiki, natriy elementining moli eng kichigiga ekan. (1) ifoda asosida har bir elementlar mol nisbatlarini eng kichik qiymatiga natriy moliga bo'lamiz:

Qoldiqli natijalarni butun songa aylantirish uchun ularni 2 ga ko'paytirib chiqamiz. Demak, $Mg - 11$ ta; $Sb - 7$ ta; $O - 15$ ta; $Na - 2$ ta; $C - 79$ ta. Bu yerda, kislorodning bir qismi hamda natriy va uglerod atomlari keramik taglikka tegishli bo'lgani uchun ularni hisobga olmaymiz.

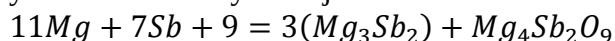
Shunday qilib, tadqiqot metodiga ko'ra [9], hisoblash natijalaridan foydalanib

kimyoviy reaksiya kolkulyatori yordamida zarracha tuzilish formulasini aniqlash mumkin.



3-rasm. Mg_3Sb_2 hamda $Mg_4Sb_2O_9$ birikmalarning kristallografik tuzilishi.

Kimyoviy reaksiya kolkulyatori yordamida reaksiyani bajaramiz.



Demak, zarrachalar birikma yadrosi Mg_3Sb_2 va uning sirt sohalari $Mg_4Sb_2O_9$ tuzilmadan iborat. Endi ushbu birikmalarning tuzilishini elektron dastur [7, 8] yordamida aniqlaymiz.

V.XULOSA

Shunday qilib, qarshilik vositasi bilan nanozarrachalarni qizdirib biriktirish orqali sterjen shaklidagi granullangan Mg_3Sb_2 nano yarimo'tkazgichli materiallar tayyorlash usuli ishlab chiqildi. U 70% etil spirti yordamida tayyorlangan Mg_3Sb_2 zarrachalar qorishmasini trubka shaklidagi issiqqa bardosh masalan, keramik taglikka solish, zarrachalarni qarshilik vositasi yordamida qizdirib biriktirishga asoslangan. Mg_3Sb_2 zarrachalarini qizdirib biriktirish temperaturasi $300 \div 700$ K oraliqlarini tashkil qildi. Kukunsimon zarrachalarni qarshilik vositasida qizdirib biriktirish orqali olingan sterjen shaklidagi granullangan Mg_3Sb_2 yarimo'tkazgich tuzilishi jihatidan donodor

zarrachalar birikmasi hamda zarrachalararo ya'ni donadorliklararo chegara sohalaridan tashkil topgan polikristalga xos tuzilmani hosil qiladi. Donador zarrachalar birikma yadrosi Mg_3Sb_2 birikmadan bo'lib, uning sirt sohalari $Mg_4Sb_2O_9$, $Mg(Sb_2O_5)_2$, MgO_2 , SbO_3 singari oksidlangan nanokompozit qoplamalardan tashkil topgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

- [1].Zevalkink A., Zeier W.G., Pomrehn G., Schechtel E., Tremel W., Snyder G.J. Thermoelectric properties of Mg_3Sb_2 -based materials // Applied Physics Reviews. – 2018. – Vol. 5, No. 2. – 021303.
- [2].Ohno S., Imasato K., Anand S., Tamaki H., Kang S.D., Snyder G.J. Phase boundary mapping to optimize Mg_3Sb_2 thermoelectrics // Joule. – 2018. – Vol. 2, No. 7. – pp. 141–154.
- [3].F.L. Omonboev, A.T. Mamadalimov, L.O. Olimov. Charge Transfer Processes In Granulated Mg_3Sb_2 Particles. Journal E3S Web of Conferences. July, (2023) 28-35
- [4].F.L. Omonboev, A.T. Mamadalimov. Thermoelectric properties of granular Mg_3Sb_2 particles. E3S Web of Conferences 462, 03013 (2023).doi.org/10.1051/e3sconf/202346203013.
- [5].F.L. Omonboev, A.T. Mamadalimov. Microstructure and Morphological Properties of Granulated Mg_3Sb_2 Thermoelectric Material. JOURNAL OF NANO- AND ELECTRONIC PHYSICS. Vol. 17 No 3, 03003(7pp) (2025). [https://doi.org/10.21272/jnep.17\(3\).03003](https://doi.org/10.21272/jnep.17(3).03003).
- [6].Materiallar Explorer.
- [7].ChemicalAid.
- [8].Percent Compositition.

Automated technology for measuring thermoelectric properties in semiconductors

UDK: 621.316.3.05.14.

T.M. Azimov, A.Jumaboev

Fergana State University.

Abstract: This study presents the development of an automated measurement technology for determining the key thermoelectric transport parameters - Seebeck coefficient (α), electrical conductivity (σ), and thermal conductivity (χ) - of $\text{Bi}_2\text{Te}_{2.88}\text{Se}_{0.12}$ thermoelectric elements. An integrated hardware–software system was designed to enable precise temperature control, real-time data acquisition, and automated processing of measurement results. The proposed setup allows simultaneous and accurate evaluation of $\alpha(T)$, $\sigma(T)$, and $\chi(T)$ over a wide temperature range, minimizing human-induced errors and significantly improving measurement repeatability. The obtained temperature-dependent transport characteristics were analyzed to assess the thermoelectric performance and potential application of $\text{Bi}_2\text{Te}_{2.88}\text{Se}_{0.12}$ in cooling devices and low-temperature energy conversion systems. The results demonstrate that automated measurement tools provide an efficient and reliable platform for the characterization of Bi_2Te_3 -based thermoelectric materials and can be further adapted for other promising thermoelectric compounds.

Keywords: thermoelectric materials, thermoelectric elements, Seebeck coefficient, electrical conductivity, thermal conductivity, temperature-dependent characteristics, thermoelectric performance.

Аннотация: В данной работе представлено создание автоматизированной измерительной технологии для определения ключевых термоэлектрических параметров — коэффициента Зеебека (α), электрической проводимости (σ) и теплопроводности (χ) — термоэлектрических элементов состава $\text{Bi}_2\text{Te}_{2.88}\text{Se}_{0.12}$. Разработанная аппаратно-программная система обеспечивает точный контроль температуры, получение данных в режиме реального времени и автоматизированную обработку результатов измерений. Предложенная установка позволяет одновременно и с высокой точностью оценивать $\alpha(T)$, $\sigma(T)$ и $\chi(T)$ в широком диапазоне температур, минимизируя ошибки, связанные с человеческим фактором, и значительно повышая воспроизводимость измерений.

Полученные температурные зависимости транспортных характеристик были проанализированы для оценки термоэлектрической эффективности и перспектив применения $\text{Bi}_2\text{Te}_{2.88}\text{Se}_{0.12}$ в охлаждающих устройствах и низкотемпературных системах преобразования энергии. Результаты показывают, что автоматизированные измерительные комплексы являются эффективной и надёжной платформой для исследования термоэлектрических материалов на основе Bi_2Te_3 и могут быть адаптированы для других перспективных термоэлектрических соединений.

Ключевые слова: термоэлектрические материалы, термоэлектрические элементы, коэффициент Зеебека, электрическая проводимость, теплопроводность, температурные зависимости характеристик, термоэлектрическая эффективность.

1.Introduction

In recent years, the issues of efficient use of energy resources on a global scale, the widespread implementation of renewable sources, and the reduction of heat losses have become increasingly important. A significant portion of the heat flows released by industrial enterprises, household appliances, and transport vehicles is being lost without practical use. One of the technologies that makes it possible to convert this wasted heat energy back into electrical energy is thermoelectric devices [1–3]. Devices operating on the basis of thermoelectric effects are distinguished by the

absence of moving parts, compactness, reliability, and environmental cleanliness [2].

The efficiency of thermoelectric materials is expressed by the relation [1–3].

$$ZT = \frac{\alpha^2 \cdot \sigma}{\chi}$$

Here, (α) is the thermoelectric electromotive force (Seebeck coefficient), (σ) is the electrical conductivity, and (χ) is the thermal conductivity. A detailed study of the temperature dependence of these quantities is a key requirement for determining the practical application areas of materials and for optimizing their performance. Among the most promising materials for low-temperature

thermoelectric devices, alloy systems based on bismuth telluride - in particular, the thermoelectric semiconductors Bi_2Te_3 , Bi_2Se_3 , and Sb_2Te_3 - occupy a special place [4, 8, 13].

Thermoelectric n-type materials based on $\text{Bi}_2\text{Te}_{2.88}\text{Se}_{0.12}$ are of particular interest due to their ability to achieve high thermoelectric efficiency in low and medium temperature ranges (approximately 250–350 K) [5–7]. Thermoelectric semiconductor elements manufactured from such materials can be used in various cooling devices, for maintaining stable temperatures in microelectronic components, as well as in the creation of low-power thermoelectric generators. Therefore, determining and analyzing the temperature dependence of the electrophysical properties of $\text{Bi}_2\text{Te}_{2.88}\text{Se}_{0.12}$ - namely, the thermoelectric electromotive force $\alpha(T)$, electrical conductivity $\sigma(T)$, and thermal conductivity $\chi(T)$ - is an important scientific and practical task.

Traditional measurement methods are often multi-stage, time-consuming, and prone to human-related errors [10,12]. The development of modern electronics and information technologies provides opportunities to automate experimental measurements of thermoelectric parameters, process the obtained data in real time, store them, and visualize the results [10–11]. This not only increases measurement accuracy but also enables rapid statistical and graphical analysis of large volumes of experimental data. The present work is aimed at automating the measurement and analysis process of the parameters α , σ , and χ of thermoelectric semiconductor elements. Within the scope of the work, a hardware–software system - including an experimental setup, measurement circuitry, and computational algorithms - is developed [10–12]. Using this system, it becomes possible to determine the temperature dependence of thermoelectric parameters, record data in digital format, process them through dedicated software, and carry out graphical analysis.

The object of the study consists of n-type thermoelectric semiconductor elements based on $\text{Bi}_2\text{Te}_{2.88}\text{Se}_{0.12}$. The subject of the research is the automated determination and analysis of the temperature-dependent transport properties - thermoelectric electromotive force, electrical conductivity, and thermal conductivity - of these semiconductor elements. The aim of the work is to develop a hardware–software complex that automates the measurement of $\alpha(T)$, $\sigma(T)$, and $\chi(T)$ parameters for thermoelectric semiconductor elements based on $\text{Bi}_2\text{Te}_{2.88}\text{Se}_{0.12}$, and to evaluate the thermoelectric efficiency of the material based on the obtained results. To achieve this aim, a literature review on the physical properties of $\text{Bi}_2\text{Te}_{2.88}\text{Se}_{0.12}$ -based thermoelectric semiconductor elements is carried out; the experimental scheme and measurement methodology for determining α , σ , and χ are improved; and software is developed to enable automatic data acquisition, processing, and storage. Based on the obtained results, the thermoelectric figure of merit (ZT) of the material is evaluated, optimal temperature intervals are identified, and its potential practical applications are analyzed.

The scientific novelty of the work lies in the fact that the process of comprehensive measurement and analysis of the parameters (α), (σ), and (χ) for thermoelectric semiconductor elements based on $\text{Bi}_2\text{Te}_{2.88}\text{Se}_{0.12}$ is implemented using a specially developed automated hardware–software system. This system ensures that the study of thermoelectric materials becomes faster, more accurate, and reproducible. The practical significance of the research is that the developed methodology and hardware–software tools can be applied not only to other Bi_2Te_3 -based thermoelectric alloys but also to the investigation of new promising thermoelectric materials. The results obtained can serve as a methodological basis for designing thermoelectric modules, optimizing their operating modes, and creating energy-efficient and environmentally friendly thermoelectric devices.

II. MATERIALS AND METHODS

Among the most promising materials for low-temperature thermoelectric devices, bismuth telluride Bi_2Te_3 and its alloys – $\text{Bi}_2\text{Te}_3\text{--Bi}_2\text{Se}_3$ and $\text{Bi}_2\text{Te}_3\text{--Sb}_2\text{Te}_3$ – occupy a special place [4, 8, 13]. Thermoelectric elements produced on the basis of these alloys are widely used in low-power generators, coolers, and temperature-stabilizing devices for microelectronic components [1, 2, 4]. The solid solution $\text{Bi}_2\text{Te}_{2.88}\text{Se}_{0.12}$ belongs to the $\text{Bi}_2\text{Te}_3\text{--Bi}_2\text{Se}_3$ system and typically exhibits n-type conductivity, characterized by high thermoelectric efficiency at temperatures around 300 K. Crystal and bulk samples based

$\text{Bi}_2\text{Te}_{2.88}\text{Se}_{0.12}$ are obtained using the Bridgman or zone-melting methods, and their crystal structure, electrical conductivity, Hall coefficient, and temperature-dependent thermoelectric parameters have been extensively studied [5–7].

In the literature, $\text{Bi}_2\text{Te}_{2.88}\text{Se}_{0.12}$ crystals have been prepared both in pure form and doped with CdCl_2 , CdBr_2 , and other dopant additives. The structural properties of the samples (XRD data), as well as the temperature dependence of carrier concentration and mobility, have been analyzed [6, 7, 9]. Such doping is aimed at optimizing carrier concentration and reducing thermal conductivity, thereby increasing the ZT value [1, 6, 7].

In recent years, significant progress has been made in producing nanostructured and textured samples of Bi_2Te_3 -based materials using modern technologies such as rapid sintering, flash sintering, mechanical milling, and others. These approaches allow for a substantial reduction in thermal conductivity by enhancing phonon scattering at grain boundaries [1, 8, 12].

III. RESULTS

Reliable determination of the main transport parameters — (α) , (σ) , and (χ) — of thermoelectric materials is crucial for evaluating their practical application potential. In the literature, two main approaches are

commonly used to measure the Seebeck coefficient: the steady-state temperature gradient method and the heat-pulse (transient) method [2, 10, 12]. In both cases, the temperature difference (ΔT) between the ends of the sample and the thermoelectric electromotive force ($\Delta \varepsilon$) are measured,

$$\alpha = \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta T}$$

and α is calculated using the corresponding relation [2, 10, 12].

For determining electrical conductivity, the four-probe method and the van der Pauw method are widely applied. These techniques help reduce the influence of contact resistance and sample imperfections, and they allow the determination of average resistivity for thin plates of various geometries [11–12].



a



b

1-picture. Thermoelectric parameter measuring device for samples a) appearance of the measuring device b) measuring instruments

For measuring thermal conductivity, both steady-state and transient methods have been proposed for Bi₂Te₃-based materials. In these systems, thermal conductivity χ is determined by measuring the heat flux and the temperature gradient along the sample [8, 10, 12]. Modern research is increasingly focused on hardware–software complexes designed to measure σ , α , and χ simultaneously for the same sample within a single experimental setup over a wide temperature range. Such systems typically integrate a sample holder, electric heater, multiple temperature sensors, a four-probe measurement circuit, an automatic switching unit, a high-precision ADC, and dedicated control and data-processing software [10–12, 14].

A review of the literature shows that although numerous studies have investigated the thermoelectric properties of the Bi₂Te₃–Bi₂Se₃ system, including the Bi₂Te_{2.88}Se_{0.12} solid solution, relatively few works have been devoted to simultaneously determining $\alpha(T)$, $\sigma(T)$, and $\chi(T)$ specifically for thermoelectric legs, using a fully automated hardware–software setup. The present work aims to fill this gap by proposing an automated and integrated approach for Bi□Te□.□□Se□.□□-based thermoelectric legs.

To determine the Seebeck coefficient $\alpha(T)$, the steady-state temperature gradient method is applied. The sample is mounted on a metallic heat-conducting platform inside a thermally insulated chamber. A miniature heater (e.g., a resistive heater) is attached to one end of the sample, while a heat sink is attached to the opposite end. Two temperature sensors (thermocouples or Pt100 sensors) are placed close to the hot end and the cold end to measure T_h and T_c , respectively. The sample ends are connected to a low-noise differential voltage meter (nanovoltmeter) to record the thermoelectric voltage ($\Delta\varepsilon$). For each measurement point, after $\Delta T = T_h - T_c$ stabilizes, $\Delta\varepsilon$ is recorded and

$$\alpha(T_{ave}) = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta T}, \quad T_{ave} = \frac{T_h + T_c}{2}$$

α is calculated from the relation:

The temperature interval is varied depending on laboratory capabilities — for example, from 290 K to 350 K — using small steps ($\Delta T \approx 5\text{--}10$ K), and α is determined at each point.

Electrical conductivity $\sigma(T)$ is determined using the four-probe method. The setup includes two current contacts supplying a constant DC current (I) and two voltage probes placed at a known distance (l). The voltage drop (U) between the inner probes is measured. The average cross-sectional area of the sample (S) is measured, and the resistivity is calculated using:

$$\rho = R \frac{l}{S} = \frac{U}{I} \frac{S}{l}$$

and the electrical conductivity is then obtained as:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

The current is chosen to be sufficiently small to minimize Joule heating so that the sample temperature remains stable. The temperature is controlled using a thermostated chamber, and $\sigma(T)$ is measured at the same temperature points as $\alpha(T)$.

Thermal conductivity $\chi(T)$ is determined using the steady-state longitudinal heat-flow method. An electric heater is attached to one end of the sample and supplied with a known power P , which is considered equal to the heat flux entering the sample (heat losses are assumed compensated or are determined separately through calibration).

$$Q = \frac{P}{S}$$

Two temperature sensors attached at known positions along the sample measure the temperature difference ΔT , and the distance between the sensors (d) is measured. In the steady state, thermal conductivity is calculated using [8–10]:

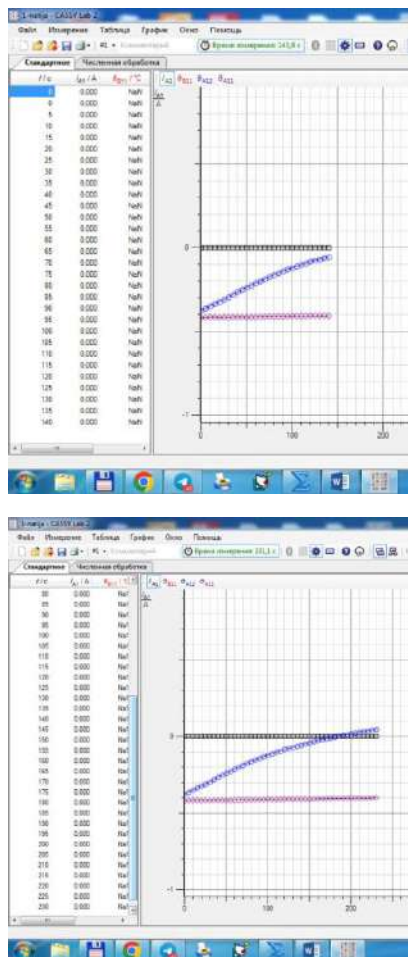
$$\chi = \frac{Ql}{\Delta T} = \frac{Pl}{S\Delta T}$$

To reduce the influence of heat losses, the sample is placed in a thermally insulated chamber, and good thermal contact is ensured at the hot and cold ends. If necessary, heat

losses are estimated through calibration experiments and taken into account in the final results.

IV. DISCUSSION

In this study, a hardware–software complex was developed to automatically determine $\alpha(T)$, $\sigma(T)$, and $\chi(T)$. Its general structure includes: a heater and a cold sink, multiple temperature sensors (to monitor the temperatures at the sample ends as well as the ambient temperature), a current source and voltmeter (for the four-probe circuit), a power source for controlling the heating power, a data acquisition board (ADC, multiplexer) and switching units.



2-picture: visual representation of the results obtained

Based on the acquired data, automatic calculation of α , σ , and χ , graphical visualization of the results, database storage, and data export were implemented using a

Python-based software platform. LabVIEW or other suitable environments may also be used. The algorithm includes stepwise temperature variation, waiting for the system to reach steady-state conditions at each point, and then automatically measuring and processing parameters such as $\Delta\epsilon$, I , U , T_h , and T_c . At each temperature point, measurements are repeated several times, and the average value and standard deviation are calculated. Relative uncertainties for α , σ , χ , and ZT are estimated using standard error propagation rules, taking into account instrument errors, temperature measurement accuracy, and geometric measurement uncertainties. The reliability of the results is also verified by comparing them with values reported in the literature for $\text{Bi}_{1-x}\text{Te}_{2-x}\text{Se}_x$ or similar $\text{Bi}_{1-x}\text{Te}_{2-x}\text{Se}_x$ alloys.

V. CONCLUSION

Based on the investigations carried out on n-type thermoelectric legs made of $\text{Bi}_{1-x}\text{Te}_{2-x}\text{Se}_x$, the following conclusions were drawn:

A methodological approach enabling simultaneous determination of the parameters (α , σ , χ) was developed for the comprehensive study of $\text{Bi}_{1-x}\text{Te}_{2-x}\text{Se}_x$ -based thermoelectric legs. The designed hardware–software complex made it possible to automate the measurement process, maintain stable temperature conditions, record measurement data in real time, and process them efficiently. This significantly reduced human-related errors, shortened experimental time, and enabled standardized data storage.

The obtained results qualitatively agree with values reported in the literature, confirming the accuracy of the measurement method and the reliability of the developed hardware–software system. The proposed system and methodology can also be adapted to other $\text{Bi}_{1-x}\text{Te}_{2-x}\text{Se}_x$ -based alloys and newly emerging thermoelectric materials.

Overall, this work contributes significantly to scientific and practical research in the field of thermoelectrics by creating an

automated experimental platform for comprehensive study of the electrophysical properties of thermoelectric legs, analyzing the obtained results, and expanding their applicability in the design of practical thermoelectric devices.

References

- [1].Snyder, G. J., Toberer, E. S. Complex thermoelectric materials // *Nature Materials*. – 2008. – Vol. 7, No. 2. – P. 105–114.
- [2].Goldsmid, H. Julian. *Introduction to Thermoelectricity*. – 2nd ed. – Berlin–Heidelberg: Springer, 2016. – 278 p. (Springer Series in Materials Science, Vol. 121).
- [3].Nolas, G. S., Sharp, J., Goldsmid, H. J. *Thermoelectrics: Basic Principles and New Materials Developments*. – Berlin–Heidelberg: Springer, 2001.
- [4].Azimov T M, et al. "Thermoelectric and Galvanomagnetic Properties of the Alloy $\text{Bi}_2\text{Te}_3 + 0.04 \text{ Weight\% Ni}$ in the Temperature Range $77 \div 300 \text{ K}$." *American Journal of Modern Physics* 10.6 (2021): 124-128.
- [5].Azimov T M, et al. Thermoelectric efficiency of Bi-Sb and Bi-Se based thermoelements *Miasto Przyszłości*. ISSN-L: 2544-980X Volume:49 Issue:6 | 2024 pp 389-392
- [6].Daliev, Khojakbar Sultanovich, Tulanboy Ma'rufjonovich Azimov, and Maksadjon Karimberdievich Onarkulov. "Influence of doping impurities on mechanical and thermoelectric properties of cooling thermoels based on bismuth and antimony chalcogenides." *Euroasian Journal of Semiconductors Science and Engineering* 2.1 (2020).
- [7].Požega, E., Bernik, S., Marjanović, S., Petrović, A., Svrkota, I., Stojić, A., Simonović, D. Investigation of $\text{Bi}_2\text{Te}_{2.88}\text{Se}_{0.12}$ bulk single crystal produced using Bridgman method // *Science of Sintering*. – 2024. – Vol. 56, No. 3. – P. 395–403. – DOI: 10.2298/SOS231017056P.
- [8].Lee, G.-E., Kim, I.-H., Lim, Y. S., Seo, W.-S., Choi, B.-J., Hwang, C.-W. Preparation and thermoelectric properties of $\text{Bi}_2\text{Te}_3\text{--Bi}_2\text{Se}_3$ solid solutions // *Journal of the Korean Physical Society*. – 2014. – Vol. 64. – P. 1416–1420. – DOI: 10.3938/jkps.64.1416.
- [9].Jung, W.-J., Kim, H.-J., Kim, I.-H. Charge transport and thermoelectric properties of n-type $\text{Bi}_{2-x}\text{Sb}_x\text{Te}_{3-y}\text{Se}_y$:Im prepared by encapsulated melting and hot pressing // *Korean Journal of Metals and Materials*. – 2018. – Vol. 56, No. 7. – P. 548–550 (va davom).
- [10].Kim, H. J., Skuza, J. R., Park, Y.-J., King, G. C., Choi, S. H., Nagavalli, A.. System to Measure Thermal Conductivity and Seebeck Coefficient for Thermoelectrics // *NASA Technical Memorandum NASA/TM–2012–217791*. – Langley Research Center, 2012.
- [11].de Boor, J., Schmidt, V. Efficient thermoelectric van der Pauw measurements // *Applied Physics Letters*. – 2011. – Vol. 99. – Article 022102.
- [12].Azimov T M, M.Z.Xayitoxunova. $\text{Bi}_2\text{Te}_3 - \text{Bi}_2\text{Se}_3$ va $\text{Bi}_2\text{Te}_3\text{--Sb}_2\text{Se}_3$ Qotishmalarning termoelektrik xossalari. Материалы Международной научной конференции. Тенденции развития физики конденсированных сред Фергана, 24-май, 2024 год

Granullangan Mg_3Sb_2 zarrachalarida zaryad ko'chish jarayonlarining seto modeli asosida tadqiqi

X.A. Maxmudov¹, F.L. Omonboyev², T.A. Sobirova³

Qo'qon universiteti Andijon filiali, Andijon davlat universiteti, Toshkent davlat texnika instituti

Annotatsiya: Ushbu maqolada granullangan Mg_3Sb_2 yarimo'tkazgich zarrachalarida zaryad ko'chish jarayonlari tadqiq qilindi. Tadqiqotlar davomida solishtirma qarshilik, zaryad tashuvchilar konsentratsiyasi va harakatchanligining temperaturaga bog'liqligi ($T=300-700$ K) o'rganildi. Olingan natijalar granullangan muhitda zaryad ko'chish jarayonlari asosan zarrachalararo chegaralardagi lokallashgan tuzoq sathlari va potensial to'siqlar bilan belgilanishini ko'rsatdi. Seto modeli asosida potensial to'siq balandligining temperaturaga bog'liqligi tahlil qilindi.

Kalit so'zlar: Mg_3Sb_2 , granullangan yarimo'tkazgich, zaryad ko'chish jarayonlari, elektrofizik xossalar, termoelektrik materiallar, solishtirma qarshilik, zaryad tashuvchilar konsentratsiyasi, harakatchanlik, potensial to'siq, lokallashgan tuzoq sathlari, Seto modeli, geterogen muhit, temperatura bog'liqligi.

Abstract: This article investigates charge transport processes in granular Mg_3Sb_2 semiconductor particles. During the study, the temperature dependences of resistivity, charge carrier concentration, and mobility were examined over the range $T = 300-700$ K. The obtained results demonstrate that charge transport processes in a granular medium are predominantly governed by localized trap states and potential barriers at interparticle boundaries. Based on the Seto model, the temperature dependence of the potential barrier height was analyzed.

Keywords: Mg_3Sb_2 , granular semiconductor, charge transport processes, electrophysical properties, thermoelectric materials, resistivity, charge carrier concentration, mobility, potential barrier, localized trap states, Seto model, heterogeneous medium, temperature dependence.

Аннотация: В данной статье исследованы процессы переноса заряда в гранулированных полупроводниковых частицах Mg_3Sb_2 . В ходе исследований были изучены температурные зависимости удельного сопротивления, концентрации носителей заряда и их подвижности в интервале $T = 300-700$ K. Полученные результаты показали, что процессы переноса заряда в гранулированной среде в основном определяются локализованными ловушечными уровнями и потенциальными барьерами на межзеренных границах. На основе модели Сето проанализирована температурная зависимость высоты потенциального барьера.

Ключевые слова: Mg_3Sb_2 , гранулированный полупроводник, процессы переноса заряда, электрофизические свойства, термоэлектрические материалы, удельное сопротивление, концентрация носителей заряда, подвижность, потенциальный барьер, локализованные ловушечные уровни, модель Сето, гетерогенная среда, температурная зависимость.

I. Kirish

Mg_3Sb_2 turdagi yarimo'tkazgichli materiallar past issiqlik o'tkazuvchanligi va yuqori termoelektrik samaradorligi sababli keng o'rganilmoqda. Ushbu materiallarning asosiy parametrlari — elektr o'tkazuvchanlik (σ), Zeebeck koeffitsienti (α) va issiqlik o'tkazuvchanlik (λ) — tuzilishi, temperatura va kirishmalarga bog'liq. Biroq, Mg_3Sb_2 ning granullangan holatidagi elektrofizik xossalari yetarlicha tadqiq qilinmagan. Granullangan muhitda zaryad ko'chish jarayonlari asosan zarrachalararo chegaralarda hosil bo'ladigan potensial to'siqlar va lokallashgan tuzoq sathlari bilan belgilanadi. Mazkur ishda Mg_3Sb_2 zarrachalarida zaryad ko'chish jarayonlari $T=300-700$ K diapazonda o'rganildi va Seto modeli asosida tahlil qilindi. Olingan natijalar granullangan yarimo'tkazgich tizimlarida transport mexanizmlarini tushuntirish va yangi

termoelektrik materiallar yaratishda muhim ahamiyatga ega.

II. Tadqiqot metodi

Tadqiqotlar uchun Mg va Sb elementlarini sintez qilish orqali olingan granullangan Mg_3Sb_2 zarrachalari ishlatildi. Namuna issiqqa bardoshli dielektrik trubaga joylashtirilib, zarrachalar o'zaro bosim ostida kontakt holatiga keltirildi. O'lchashlar Egor-Disselhorst metodi asosida bajarildi. Tadqiqotlar $T=300-700$ K harorat oralig'ida va haroratning ortishi va kamayishi jarayonlarida olib borildi, bu esa natijalarning qaytariluvchanligini ta'minladi.

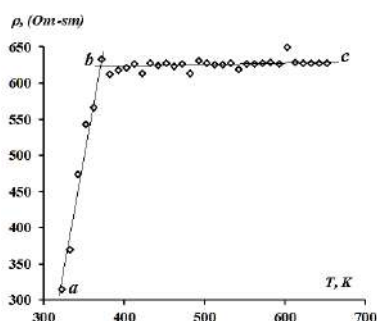
Granullangan muhitda zaryad ko'chish jarayonlarini tavsiflash uchun Seto modeli asos sifatida qabul qilindi. Ushbu modelga ko'ra, zarrachalararo chegaralarda hosil bo'ladigan potensial to'siqlar va lokallashgan tuzoq sathlari zaryad tashuvchilarning ko'chish xususiyatlarini belgilaydi. Shu sababli, o'lchangan elektrofizik parametrlar zarrachalararo chegaralar orqali

zaryad o'tishi va to'siq balandligining temperaturaga bog'liqligi nuqtai nazaridan tahlil qilindi.

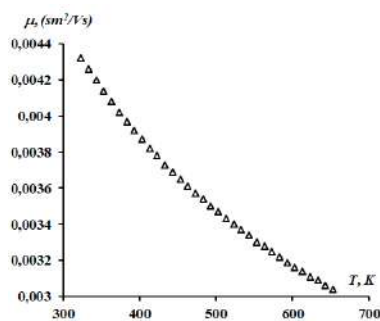
III. Natijalar va ularning tahlili

Granullangan Mg_3Sb_2 zarrachalarda zaryad ko'chish jarayonlarini o'rganish uchun

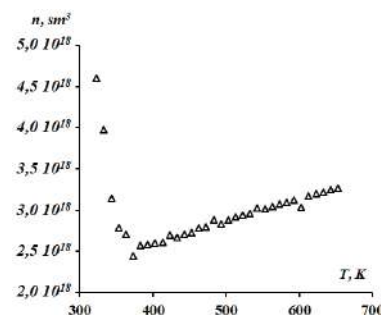
solishtirma qarshilik (ρ), zaryad tashuvchilar konsentratsiyasi (n) va harakatchanligi (μ)ning haroratga bog'liqligi $T=300-700$ K da o'rganildi. 1-3 rasmlarda, mos holda ρ , n va μ ning temperaturaga bog'liqligi tasvirlangan.



1-rasm. Solishtirma qarshilikning temperaturaga bog'liqligi



2-rasm. Zaryad tashuvchilar harakatchanligining temperaturaga bog'liqligi



3-rasm. Zaryad tashuvchilar konsentratsiyasining temperaturaga bog'liqligi

1-rasmdan ko'rinadiki, ρ ning temperaturaga bog'liqligini shartli ravishda ikki qismga (a-b) hamda (b-c) ga bo'lish mumkin. Ya'ni, $T \leq 375$ K da (a-b) keskin kamaysa, so'ngra (b-c) turg'un o'zgaradi. Huddi shunday holat n ning temperaturaga bog'ligida ham kuzatildi (3-rasm).

Yarimo'tkazgichlar fizikasidan ma'lumki, ρ ning temperaturaga bog'liqligi μ va n orqali ifodalanadi. Temperatura ta'sirida kirishmalar ionlanishi yoki kristall panjaraning issiqlik tebranishi natijasida tashuvchilarning erkin yugurish yo'li kamayadi. Bunda, μ ning kamayishi ρ ning ortishiga (1-rasm, a-b holat) olib keladi. ρ ning temperaturaga bog'liq holda o'zgarishi keltirilgan mulohazalarni tasdiqlaydi.

Biroq ushbu tadqiqot natijalari boshqa olimlarning Mg_3Sb_2 materiali bo'yicha olingan natijalaridan sezilarli darajada farq qilishi kuzatildi. Masalan, [1–5] ishlarida elektr o'tkazuvchanlik yuqori qiymatlarni qabul qilib, harorat bilan birga ortib borishi kuzatilgan. Bizning holatda esa $\rho \sim 300-625$ $\Omega \cdot \text{cm}$ oralig'ida o'zgaradi. Shuningdek, [4, 6, 7] ishlarida $n \sim 10^{19}-10^{20}$ cm^{-3} va $\mu \sim 20-160$ $\text{cm}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ oralig'ida harorat bilan birga o'zgarishi aniqlangan. 2 va 3-rasmlardan ko'rinadiki, ushbu natijalar ham bizning natijalarimizdan keskin farq qiladi. Buning asosiy sababi sifatida Mg_3Sb_2 materialini tayyorlash texnologiyasini ko'rsatish mumkin. Ya'ni, [1–7] ishlarida olingan natijalar vakuum sharoitida presslab tayyorlangan

Mg_3Sb_2 materialiga tegishli bo'lsa, bizning natijalar granullangan Mg_3Sb_2 zarrachalariga tegishlidir.

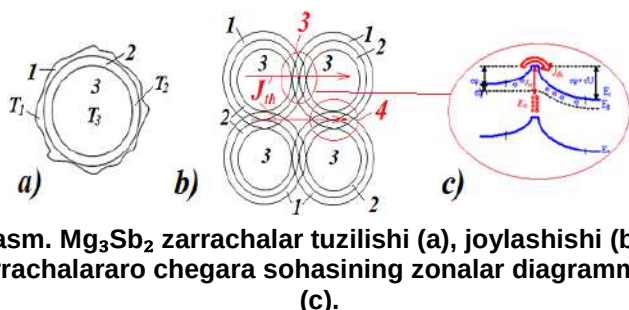
Ta'kidlash joizki, granullangan yarimo'tkazgich zarrachalarda ρ , μ va n ning temperaturaga bog'liqligi zarrachalardagi zaryad ko'chish jarayonlariga bevosita bog'liq [10–12]. Granullangan zarrachalarda zaryad ko'chish jarayonlarini zarrachalar tuzilishi hamda ulardagi zaryad ko'chish mexanizmlariga bog'liq holda quyidagicha tushuntirish mumkin.

Mg_3Sb_2 zarrachalar tuzilishi va ularda zaryad ko'chish mexanizmlari

Ma'lumki, granullangan yarimo'tkazgich zarrachalar tuzilishi va morfologiyasi ularni olish texnologiyasiga bog'liq [13, 14]. Masalan, kukunli texnologiya asosida olingan zarrachalarning tuzilishini shartli ravishda 3 qismga bo'lish mumkin (4a-rasm). Kukunli texnologiyadan ma'lumki, kukunlash jarayoni mexanik usulda bajariladi. Mexanik usulda ishqalanish hodisasi kukunli zarrachalarning qizishiga olib keladi. Bizning fikrimizcha, qizish jarayoni kukunli zarracha hajmi bo'ylab bir xil sodir bo'lmaydi. Ya'ni, zarracha hajmi bo'ylab temperaturalar farqi vujudga keladi. Natijada, qizish hisobiga zarracha sirti temperaturasi hajmidagiga nisbatan yuqori bo'ladi ($T_3 \leq T_2 \leq T_1$, 4a-rasm). Bundan tashqari, ishqalanish jarayonida kukunli zarracha sirtining atomar tuzilishida sirtiy nuqsonlar paydo bo'lib, murakkab shakldagi g'adir-budirliklarni hosil

qiladi (temperaturasi T_1 bo'lgan 1-soha, 4a-rasm). Atomar kristallografik buzilishlar sirtga tomon ortib boradi. Bu esa har bir sohaning fazaviy holati o'zgarishiga olib keladi.

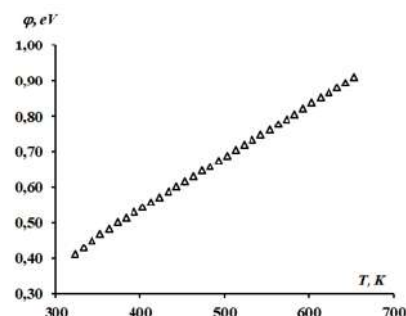
Shunga mos holda, har bir sohaning reaksiyalanish qobiliyati zarracha yadrosidan sirtga tomon ortib boradi [15]. Masalan, [8, 9] ishlarida atmosfera muhitida olingan kremniy zarrachalari sirtida taxminan 10 nm qalinlikda kremniy oksid qatlami hosil bo'lishi aniqlangan. Bu holat kremniy zarrachasi sirtidagi atomar holatning yuqori reaksiyalanish qobiliyati bilan izohlangan.



4-rasm. Mg_3Sb_2 zarrachalar tuzilishi (a), joylashishi (b) va zarrachalararo chegara sohasining zonalar diagrammasi (c).

Shunday qilib, zarrachalarning soddalashtirilgan joylashuv sxemasini 4a-rasmda ko'rsatilgandek o'zaro ketma-ket va parallel joylashgan zarrachalar ko'rinishida tasvirlash mumkin. Uning kattalashtirilgan holati 4b-rasmda keltirilgan. Namunada metall kontaktlar orqali Mg_3Sb_2 zarrachalari ikki tomondan ma'lum bosim ostida bir-biriga siqiladi (1a-rasm). Bosim kuchi namunaning qarshiligini o'lchash orqali tanlab olindi, bunda eng kichik qarshilik (~ 1 kOm) 300–500 N kuch bilan siqilganda kuzatildi. O'zaro ketma-ket va parallel joylashgan zarrachalar orasida zarrachalararo chegara sohalari hosil bo'ladi (1a va 4b-rasmlardagi 3 va 4-sohalar). Ushbu sohalar zarracha tuzilishiga mos ravishda nuqsonlar va kristallografik buzilishlarga boy bo'lib, ular zaryad tashuvchilar uchun Ein energetik sathli lokallashgan tuzoqlarni hosil qiladi (4c-rasm). Natijada, bu chegaralarda potensial to'siq effekti yuzaga keladi. Demak, bunday tizimda zaryad ko'chish jarayonini ikki asosiy yo'nalishga ajratish mumkin. Agar zarrachalar ketma-ket joylashgan bo'lsa, zaryad ko'chish bir zarrachadan ikkinchisiga zarrachalararo chegara (3-soha) orqali amalga oshadi. Agar zarrachalar

Demak, zarracha sirtida hosil bo'lgan sirtiy nuqsonlar, har bir sohaning reaksiyalanish qobiliyati hamda temperaturalar farqiga mos holda zarracha tuzilishini shartli ravishda 3 qismga ajratish mumkin (4a-rasm). Bular: nisbatan temperaturasi va reaksiyalanish qobiliyati yuqori bo'lgan g'adir-budir sirt (1-soha), uni zarracha yadrosidan (3-soha) ajratib turuvchi oraliq qatlam (2-soha). Shu tariqa, zarrachalar tuzilishi ko'p qatlamli geterogen muhitni hosil qiladi [11, 12].



5-rasm. Potensial to'siq balandligining temperaturaga bog'liqligi.

parallel joylashgan bo'lsa, zaryad ko'chish asosan parallel yo'nalishda joylashgan 4-soha bo'ylab sodir bo'ladi.

Endi ushbu mulohazalar asosida tajriba natijalarini tahlil qilamiz. Agar zaryad ko'chish jarayoni ketma-ket joylashgan zarrachalar orasida, ya'ni 3-soha orqali amalga oshsa, zaryad tashuvchilar ketma-ket joylashgan Ein energetik sathli lokallashgan tuzoqlarda ushlanadi. Bu esa zarrachalararo chegara sohasida potensial to'siq (ϕ) balandligining ortishiga olib keladi. Seto modeliga asosan, potensial to'siq balandligining solishtirma qarshilik bilan bog'liqligi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi [1]:

$$\rho = \frac{k}{q\langle a \rangle A^* T} \exp\left(\frac{q\phi}{kT}\right) \quad (1)$$

bu yerda, q — elektron zaryadi, k — Boltsman doimiysi, $\langle a \rangle$ — zarracha o'lchami, A^* — Richardsonning effektivlik doimiysi, T — temperatura.

5-rasmda potensial to'siq balandligining temperaturaga bog'liqligi keltirilgan. Tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, $T=300\text{--}700$ K temperatura diapazonida ϕ qiymati taxminan 0,411 eV dan 0,91 eV gacha ortadi. Ma'lumki, potensial to'siq balandligi ϕ lokallashgan tuzoq

sathlarida ushlanayotgan zaryadlar miqdori (Q_i) ga bog'liq bo'lib, u quyidagicha ifodalanadi:

$$\varphi = \frac{Q_i^2}{8\epsilon\epsilon_0 q N_G} \quad (2)$$

bu yerda N_G — elektr jihatdan faol bo'lgan legirlangan kirishmalar konsentratsiyasi, ϵ — muhitning nisbiy dielektrik singdiruvchanligi, ϵ_0 — vakuumning absolyut dielektrik singdiruvchanligidir.

Demak, (2) ifodadan ko'rinadiki, lokallashgan tuzoq sathlarida ushlanayotgan zaryadlar miqdori (Q_i) ortishi potensial to'siq balandligi φ ning ortishiga, bu esa o'z navbatida solishtirma qarshilik ρ ning ortishiga (a–b holat) olib keladi. Shu asosda Mg_3Sb_2 zarrachalarida zaryad ko'chish jarayonlarini quyidagicha tushuntirish mumkin. Buning uchun 1a-rasmda keltirilgan namunaning soddalashtirilgan sxemasidan foydalanamiz va uni shartli ravishda I, II, III va IV qismlarga ajratamiz. Q issiqlik berilganda temperatura ortishining dastlabki bosqichida ($T \leq 375$ K) namunaning I qismiga tegishli zarrachalararo chegaralarda Ein energetik sathli lokallashgan tuzoqlar hosil bo'ladi. Ushbu tuzoqlarda ushlanayotgan zaryadlar miqdorining ortishi ρ ning ortishiga (a–b holat, 1-rasm) hamda zaryad tashuvchilar konsentratsiyasi n ning kamayishiga (a–b holat, 3-rasm) olib keladi. Bu bosqichda namunaning II, III va IV qismlarida lokallashgan tuzoqlar hali ionlashmagan bo'ladi. Temperatura ortishining keyingi bosqichlarida esa E_{in} energetik sathli lokallashgan tuzoqlar to'lib boradi va namunaning II, III hamda IV qismlarida ham ketma-ket hosil bo'la boshlaydi [17, 19]. Shu bilan birga, A sohada hosil bo'lgan yuqori konsentratsiyali zaryad tashuvchilar (b–c holat, 3-rasm) ta'sirida ρ ning o'zgarishi nisbatan barqarorlashadi (b–c holat, 1-rasm). Bundan tashqari, zarrachalararo chegaralarda kuchayuvchi issiqlik tebranishlari natijasida zaryad tashuvchilarning harakatchanligi μ kamayadi (2-rasm).

IV. Xulosa

Shunday qilib, Mg_3Sb_2 zarrachalari bo'yicha olingan natijalar adabiyotlarda masalan, [1–7] ishlarda keltirilgan Mg_3Sb_2 materiali bo'yicha olingan natijalardan sezilarli darajada farq qiladi. Tadqiqot natijalari ko'rsatadiki Mg_3Sb_2 zarrachalari asosida iqtisodiy jihatdan arzon turli yarimo'tkazgichli

asboblari, termoelektrik materiallar yaratish imkoniyatini kengaytirishi mumkin. Mg_3Sb_2 zarrachalaridagi zaryad ko'chish jarayonlarini tushuntirish mexanizmlari esa yarimo'tkazgichli mikro va nanozarrachalardagi fizik jarayonlarni tushuntirishda qo'llanilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

- [1]. Cathie L. Condron, Susan M. Kauzlarich, Franck Gascoin, G. Jeffrey Snyder. Thermoelectric properties and microstructure of Mg_3Sb_2 . Journal of Solid State Chemistry 179 (2006) 2252–2257; www.elsevier.com/locate/jssc
- [2]. Minati Tiadi, Manjusha Battabyal, P.K. Jain, Avnee Chauhan, Dillip K. Satapathy and Raghavan Gopalan. Enhancing the thermoelectric efficiency in p-type Mg_3Sb_2 via Mg site co-doping. Sustainable Energy Fuels, Issue 16, 2021, 5, 4104–4114. <https://pubs.rsc.org/en/content/articlelanding/2021/se/d1se00656h/unauth>
- [3]. Priyadarshini Balasubramanian, Manjusha Battabyal*, Raghavan Gopalan. Improving the oxidation resistance of thermoelectric Mg_2Si leg with silica coating. Materials Letters 312 (2022) 131599. <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2021.131599>
- [4]. Roberta Farris, Maria Barbara Maccioni, Alessio Filippetti, and Vincenzo Fiorentini. Theory of thermoelectricity in Mg_3Sb_2 with an energy- and temperature-dependent relaxation time. Article in Journal of Physics Condensed Matter. November 2018. DOI: 10.1088/1361-648X/aaf364; <https://www.researchgate.net/publication/329157932>
- [5]. Md. Mahmudur Rahman, A.K.M. Ashiquzzaman Shawon, Soon-Chul Ur. Effect of Excessive Antimony on the Thermoelectric and Transport Properties of Mg_3Sb_2 Synthesized by Controlled Melting, Pulverizing Followed by Vacuum Hot Pressing. Electronic Materials Letters (2021) 17:102–108. <https://doi.org/10.1007/s13391-020-00251-y>
- [6]. Jiawei Zhang, Lirong Song and Bo Brummerstedt Iversen. Insights into the design of thermoelectric Mg_3Sb_2 and its analogs by combining theory and

- experiment. npj Computational Materials(2019) 5:76; <https://doi.org/10.1038/s41524-019-0215-y>. www.nature.com/npjcompumats.
- [7]. Lihong Huang, Tong Liu, Xiaobo Mo, Guocai Yuan, Runyu Wang, Hang Liu, Xiaobo Lei, Qinyong Zhang, Zhifeng Ren. Thermoelectric performance improvement of p-type Mg_3Sb_2 -based materials by Zn and Ag co-doping. Materials Today Physics 21 (2021) 100564; <https://doi.org/10.1016/j.mtphys.2021.100564>
- [8]. Olimov LO, Anarboev II, Mamirov A, Omonboev FL, Omonboeva ML (eds) (2021) Patent UZ № FAP 01593 "Method of preparation of thermoelectric material"
- [9]. Патент Uz IAP 0561 Термоэлектрик материал ва уни тайёрлаш усули. 29.06.2018. Бюл., № 6. Абдурахманов Б.М., Адилов М.М., Ашуров М.Х., ва бошқалар. -Прототип.
- [10]. Olimov L.O., Anarboyev I.I. Some Electrophysical Properties of Polycrystalline Silicon Obtained in a Solar Oven. Silicon 14(8), PP3817 – 3822. 2022. <https://doi.org/10.1007/s12633-021-01596-1>
- [11]. Olimov, L. O., & Anarboyev, I. I. (2021). Some electrophysical properties of polycrystalline silicon obtained in a solar oven. International Journal of Physics & Mathematics,4(1), 39-45. <https://doi.org/10.31295/ijpm.v4n1.1771>
- [12]. Olimov, L. O., & Anarboyev, I. I. (2021). Microcructure of Polycrystal Silicon Heated by Sunlight. RA Journal Of Applied research. V:07 11 November-2021. Page no.-2669-2671. Available online at www.rajournals.in
- [13]. L.O. Olimov, B.M. Abdurakhmanov, F.L. Omonboev. The Influence of Alkali Metal Atoms on the Electrical Conductivity of Granular Silicon. International Journal of Advanced Research in Physical Science. V 7, Issue 12, 2020, PP 7-10 www.arcjournals.org
- [14]. Олимов Л.О. “Поликристалл кремний донадорликлараро чегаралари: микротузилмаси, заряд ҳолатлари ва p–n – ўтишлари”. Докторлик диссертацияси автореферати. 2016 й.
- [15]. Фистуль В.И. Физика и химия твердого тела. Металлургия. Москва. Том 2. 1995.

On recurrent differential equations associated with the Liouville equation.

A.M. Tilavov¹, A.Kh. Abdullayev², S.B. Dustnazarov³

¹V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Sciences, 100174 Tashkent, Uzbekistan.

Аннотация. В данной работе исследуется система рекуррентно-дифференциальных уравнений, получаемая на основе формулы Тейлора для решения уравнения Риккати $z'(x) = x + z^2(x)$, эквивалентного уравнению Лиувилля $y'' + xy = 0$.

Ключевые слова: приближённое решение, бесконечная система, уравнение Лиувилля, рекуррентно-дифференциальное уравнение, полиномиальный треугольник.

Abstract. This work investigates a system of recurrent–differential equations, that is derived based on the Taylor expansion of the solution of the Riccati equation $z'(x) = x + z^2(x)$, which is equivalent to the Liouville equation $y'' + xy = 0$.

Keywords: Approximate solution, infinite system, Liouville equation, recurrent–differential equation, polynomial triangle.

Annotatsiya. Ushbu ishda $y'' + xy = 0$ Liuvill tenglamasiga ekvivalent bo'lgan $z'(x) = x + z^2(x)$ Rikkati tenglamasi yechimining Teylor formulasi asosida hosil qilinadigan rekurrent-differensial tenglamalar sistemasi tadqiq etilgan.

Kalit so'zlar: Taqribiy yechim, cheksiz sistema, Liuvill tenglamasi, rekurrent-differensial tenglama, polinomial uchburchak.

I.Introduction

The study of polynomial structures, discrete methods, and symbolic computation occupies an important place in modern mathematics, particularly at the intersection of combinatorics, analysis, and differential equations. The foundational work [1] of Kaplansky provides a rigorous framework for analyzing algebraic structures equipped with derivations and has found numerous applications in the theory of differential equations and symbolic computation. In particular, the algebraic approach to differential systems allows one to investigate solvability and structural properties in a unified manner. Another important direction is the theory of integration in finite terms, extensively developed by Ritt [2]. His work laid the foundation for the Liouville theory, which characterizes when elementary functions admit elementary antiderivatives.

In combinatorial mathematics, discrete methods have proven to be highly effective for studying polynomial sequences and their

properties. The combinatorial approach in the work [4] of Sachkov provides powerful tools for analyzing recursive structures, generating functions, and various classes of polynomials. Further developments in the theory of special classes of polynomials have been considered by André-Jeannin [3]. Such studies contribute to a deeper understanding of recurrence relations and algebraic representations of polynomial families. In addition, a fundamental tool in discrete analysis developed by Gelfond [5] provides methods for studying discrete analogues of differential operators and plays a key role in the investigation of polynomial sequences, interpolation, and numerical methods.

The present paper focuses on the investigation of polynomial structures arising in discrete and algebraic settings. The aim is to explore their properties using methods from differential algebra, combinatorics, and finite differential calculus, as well as to establish new results related to their structure and applications.

II.Problem Statement

It is well known that linear equations can be reduced, by means of the small parameter method, to an infinite system of recurrent-differential equations of the form

$$y'_n(x) = a_n(x)y_n(x) + b_n(x)y_{n-1}(x) + c_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

where $y_0(x)$ is given initial condition.

In the system (1), the unknowns are determined sequentially through integration. In practice, problems often arise, such that are reduced to a system of equations of the form

$$P_{n+1}^k(x) = a_n^k(x)P_n^{k+1}(x) + b_n^k(x)(P_n^k)' + c_n^k(x)P_n^{k-1}(x) \quad (2)$$

which differs from the system (1).

In particular, the case of $a_n^k(x) = (k+1)x$, $b_n^k(x) = 1$, $c_n^k(x) = k-1$ for the Liouville equation is equivalent to a combinatorial problem. Here, $P_n^k(x)$ consists of polynomials, which form a triangle similar to the binomial coefficients as follows:

				0				
				1		x		
		2		$2x$		1		
	6		$8x$		2		$2x^2$	
24		$40x$		10		$16x^2$		$6x$
120	$240x$		60		$136x^2$	$52x$		$16x^3 + 6$

Table-1

The following properties directly follow from relation (2):

1. If k is even, $P_n^k(x)$ is a polynomial of degree $\left(\frac{k}{2} - 1\right)$; if k is odd, it is a

polynomial of degree $\left(\left[\frac{k}{2}\right] + 1\right)$;

2. Let $d_n^k = \deg P_n^k(x)$. Then, $d_{n+1}^{k+2} = d_n^k + 1$, $n = 2, 3, \dots, n-1$; $k = 1, 2, \dots, n-1$.

From formula (2), we obtain the following relations:

$$P_{n+1}^n(x) = (n+1)!x + (n-1)P_n^{n-1}(x), \quad P_{n+1}^{n-1}(x) = (P_n^{n-1}(x))' + (n-2)P_n^{n-2}(x),$$

$$P_{n+1}^k(x) = (k+1)xP_n^{k+1}(x) + (P_n^k)' + (k-1)P_n^{k-1}(x), \quad P_{n+1}^1 = (P_n^1(x))' + 2xP_n^2(x),$$

$$P_{n+1}^0(x) = (P_n^0(x))' + xP_n^1(x),$$

provided that

$$P_n^k(x) = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ 0, & k = n, \\ n!, & k = n+1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Now, let us consider the equation

$$y'' + xy = 0.$$

Its solution cannot be expressed in terms of elementary functions, nor by algebraic operations and integration of such functions (J. Liouville's theorem) [1, 2]. This equation

$$z'(x) = x + z^2(x) \quad (3)$$

is equivalent to the Riccati equation.

III. Main Result

Theorem. For the solution $z(x)$ of equation (3), the following formula holds:

$$z^{(n)} = n!z^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} P_n^k(x)z^k$$

where $z^{(n)}$ denotes the n -th derivative of $z(x)$.

Proof. For $n=1$, equation (3) follows from the fact that $P_1^0(x) = x$.

Similarly, for $n=2$, equation (3) is obtained from the second row of Table-1. Assume that equation (3) holds for some $[3, 4, 5]$. Then, we have

$$\begin{aligned} z^{(n+1)} &= (n+1)!z^n(x+z^2) + \sum_{k=0}^{n-1} (P_n^k(x))' z^k + \sum_{k=1}^{n-1} P_n^k(x)kz^{k-1}(x+z^2) = \\ &= (n+1)!z^{n+2} + (n+1)!xz^n + \sum_{k=0}^{n-1} (P_n^k(x))' z^k + \sum_{k=1}^{n-1} kxP_n^k(x)z^{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} kP_n^k(x)z^{k+1}. \end{aligned}$$

The last two sums can be rewritten in the following form:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} kxP_n^k(x)z^{k-1} &= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)xP_n^{k+1}(x)z^k, \\ \sum_{k=1}^{n-1} kP_n^k(x)z^{k+1} &= \sum_{k=2}^n (k-1)P_n^{k-1}(x)z^k. \end{aligned}$$

Thus, we have

$$\begin{aligned} z^{(n+1)} &= (n+1)!z^{n+2} + \left[(n+1)!x + (n-1)P_n^{n-1}(x) \right] z^n + \left[(P_n^{n-1}(x))' + (n-2)P_n^{n-2}(x) \right] z^{n-1} + \\ &+ \sum_{k=2}^{n-2} \left[(P_n^k(x))' + (k+1)xP_n^{k+1}(x) + (k-1)P_n^{k-1}(x) \right] z^k + \left[(P_n^1(x))' + 2xP_n^2(x) \right] z + \\ &+ \left[(P_n^0(x))' + xP_n^1(x) \right] = (n+1)!z^{n+2} + P_{n+1}^n(x)z^n + P_{n+1}^{n-1}(x)z^{n-1} + \sum_{k=2}^{n-2} P_{n+1}^k(x)z^k + \\ &+ P_{n+1}^1(x)z + P_{n+1}^0(x) = (n+1)!z^{n+2} + \sum_{k=0}^n P_{n+1}^k(x)z^k. \end{aligned}$$

The proof is complete.

IV. Conclusion

Some problems in mathematics lead to systems of differential equations involving an infinite number of unknowns. Solutions to such systems exist only when they are formulated in a recurrent form. In this paper, a representative example of this type of system has been thoroughly analyzed. The obtained results can provide a rigorous theoretical framework for the investigation of infinite differential equations, and can serve as a foundational basis for further theoretical and applied studies in this field.

References.

- [1].Kaplansky. *An Introduction to differential algebra*. Hermann. Paris.1957.

- [2].J. F. Ritt. *Integration in finite terms, Liouville theory of elementary methods*. Columbia university press.1948.

- [3].Richard Andre-Jeannin. *A note on a general class of polynomials*. IUT GEA, Route de Romain, 54400 Longwy, France (Submitted April 1993).

- [4].В. Н. Сачков. *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. Москва Издательство МЦНМО 2004.

- [5].А. О. Гельфонд. *Исчисление конечных разност*. Государственное издптелство физико-математической литературы. Москва 1959.

About the authors

Tilavov Asliddin Maxmudovich - V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Sciences, 100174 Tashkent, Uzbekistan. Email:

*asliddintm@mail.ru. Contacting phone
number: +998908285387*

*Abdullayev Abdug‘ani Xolmamat o‘g‘li- V.I.
Romanovskiy Institute of Mathematics of
Uzbekistan Academy of Sciences, 100174
Tashkent, Uzbekistan. Email:*

*abduganiax@mail.ru. Contacting phone
number: +998934426422*

*Dustnazarov Sardorbek Baxtiyor o‘g‘li Email:
sdustnazarov3@mail.ru. Contacting phone
number: +998503070673*

On the closed trajectories of a quadratic three-dimensional system

O. S. Akhmedov¹, D. B. Muzaffarova²

¹Kokand University Andijan branch, Andijan, Uzbekistan; axmedovodiljon@gmail.com

²Andijan State University, Andijan, Uzbekistan; muzaffarovadilshodaxon@gmail.com

Abstract. We show that a three-dimensional quadratic dynamical system admits two distinct closed trajectories. The proof is based on discrete numerical tracking (DN-tracking), which allows a rigorous validation of the corresponding Poincaré map. Using DN-tracking, we confirm that each orbit lies in a well-defined neighborhood of phase space where the Poincaré map is constructive. This establishes the coexistence of two closed trajectories and provides an explicit example of multistability in a quadratic system.

Keywords: quadratic dynamical system, limit cycle, closed trajectory, Poincaré map, DN-tracking.

Аннотация. Мы показываем, что трёхмерная квадратичная динамическая система допускает существование двух различных замкнутых траекторий. Доказательство основано на методе дискретного численного отслеживания (DN-tracking), который позволяет строго обосновать соответствующее отображение Пуанкаре. С использованием DN-tracking мы подтверждаем, что каждая орбита находится в чётко определённой области фазового пространства, где отображение Пуанкаре является конструктивным. Это устанавливает сосуществование двух замкнутых траекторий и даёт явный пример мультистабильности в квадратичной системе.

Ключевые слова: квадратичная динамическая система, предельный цикл, замкнутая траектория, отображение Пуанкаре, DN-tracking.

Annotatsiya. Ushbu maqolada uch o'lchamli kvadratik dinamik sistemada ikkita yopiq trayektoriya mavjudligi Diskret-sonli kuzatish (DN-tracking) usuli bilan qat'iy isbotlangan. DS-kuzatish har bir trayektoriyaning Puankare akslantirishi qurish mumkin bo'lgan sohada joylashganini ko'rsatadi. Bu ikkita yopiq trayektoriyaning mavjudligini va kvadratik sistemalarda muvozanat holatini bildiradi.

Kalit so'zlar: kvadratik dinamik sistema, limit davra, yopiq trayektoriya, Puankare akslantirishi, DS-kuzatuv.

I. Introduction

Closed trajectories play a fundamental role in the qualitative theory of dynamical systems, as they describe persistent oscillatory behavior. Quadratic dynamical systems form one of the simplest nonlinear classes in which such behavior can occur, and they have therefore been studied extensively.

Although numerical simulations often suggest the presence of several limit cycles in quadratic systems, proving their existence rigorously is difficult, especially in three dimensions. Many standard analytical tools are

local in nature and do not easily capture the global structure of the phase space.

In this paper, we consider a particular three-dimensional quadratic system for which numerical evidence indicates the existence of two periodic orbits. To obtain a rigorous result, we use discrete numerical tracking (DN-tracking), a method that provides validated information about the Poincaré map. By constructing suitable cross-sections and verifying contraction properties of the map, we prove that two distinct closed trajectories exist in separate regions of phase space. This demonstrates multistability in the system.

II. A FORMULATION OF THE MAIN THEOREM AND ITS PROOF

Consider a three-dimensional quadratic system of the form:

$$\dot{z} = f(z); \quad f = (f_1, f_2, f_3)^T, \quad z = (z_1, z_2, z_3)^T \quad (1.1)$$

where

$$\begin{aligned} f_1(z) &= -1 + z_2^2, & f_2(z) &= z_3^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 + z_2 z_3 \\ f_3(z) &= 1 + z_2^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 \end{aligned}$$

and the superscript T is used to denote the transpose of a matrix or vector.

Numerical simulation suggests the system possesses two distinct closed trajectories $z^{(1)}(t)$ and $z^{(2)}(t)$, with the same period, for which $T_1 = T_2 \approx 2.7$, passing near the points $z_0^{(1)} = (1.40451, 1.94887, 1.53305)$ and $z_0^{(2)} = (-1.40451, -1.94887, -1.53305)$, respectively.

The periodicity conditions $z^{(1)}(0) = z^{(1)}(T_1)$ and $z^{(2)}(0) = z^{(2)}(T_2)$ are not provable analytically as accepted in pure maths. The discrete numerical tracking (DN-tracking) method is therefore used to verify the following theorem.

Theorem 1. The quadratic system (1.1) possesses two distinct closed trajectories, one in the domain

$\Pi_1^{(1)} = \{(z_1, z_2, z_3) \mid 0.91 \leq z_1 \leq 1.897; 0.141 \leq z_2 \leq 1.949; 0.768 \leq z_3 \leq 1.871\}$ and the other

$\Pi_1^{(2)} = \{(z_1, z_2, z_3) \mid -2.163 \leq z_1 \leq -1.209; -1.949 \leq z_2 \leq 0.108; -1.608 \leq z_3 \leq -0.706\}$. The proof is as follows:

The system (1.1) is invariant under time reversal and central reflection. Indeed, since the vector field f is even, i.e. $f(-z) = f(z)$, if $z(t)$ is a solution of (1.1), then the function $z(t) := -z(-t)$ is also a solution. Combined with centrally symmetric initial conditions corresponding solutions satisfy

$$z^{(2)}(t) = -z^{(1)}(-t).$$

Hence, the two trajectories are exact mirror images of each other with respect to the origin and are distinct, since the second trajectory is obtained from the first by the symmetry $z(t) \rightarrow -z(-t)$, and lies in the symmetric domain. (They are geometrically distinct, provided the periodic orbit itself is not invariant under the central symmetry, even though the system is.) Consequently, proving that $z^{(1)}(t)$ is a closed orbit immediately implies that $z^{(2)}(t)$ is its symmetric counterpart. It is therefore sufficient to establish the periodicity of one.

A composition $\Phi = \Phi_{(3)}^{(1)} \circ \Phi_{(2)}^{(3)} \circ \Phi_{(1)}^{(2)}$ is the sought Poincaré map $S^{(1)} \rightarrow S^{(1)}$, for which the following insertion is established:

$$\Phi(S^{(1)}) \subset \text{Int}S^{(1)}$$

meaning the successful application of DN-tracking in the considered case. According to the Brouwer theorem [5], the map Φ has a fixed point. (In fact, $\Phi(S^{(1)})$ and the boundary $\partial S^{(1)}$ are separated by a gap of at least 10^{-5}).

III.DISCRETE APPROXIMATION AND ERROR ACCOUNTING OF THE APPROXIMATE CALCULATION OF NORMAL AND BINORMAL

Let the following notations

$$m_0 = \max_{z \in \Pi_5} |f(z)|, m_1 = \max_{z \in \Pi_5} \|f'(z)\|, m_2 = \max_{z \in \Pi_5} \|f''(z)\|$$

where $\Pi_5 = \Pi_1^{(1)}$, $|f|$ is the length of the vector f , and $\|\cdot\|$ are the norms of the matrix (f'), vector quadratic form (f''), respectively [6].

Since the right-hand part of a system (1.1) contains certain polynomials and the area Π_5 has also the explicit form, it is easily to establish the validity of the following estimations:

$$5.40 < m_0 < 5.41, \quad 8.15 < m_1 < 8.17, \quad m_2 = 3\sqrt{2} \quad (2.1)$$

Consider

$$P = \{z \in R^3 \mid -0.001 \leq z_k \leq 0.001, k = 1, 2, 3\}, A \doteq B = \{z \in R^3 \mid B + z \subset A\}.$$

Here $A \doteq B$ is a Minkowski-Pontryagin geometric difference of multiplicities A and $B(A, B \subset R^3)$ [7,8]. Assume that

$$\Pi_j = \Pi_5 \div (5 - j)P, j = \overline{0,4}.$$

These multiplicities are also the parallelepipeds, where

$$\Pi_0 \subset \Pi_1 \subset \Pi_2 \subset \Pi_3 \subset \Pi_4 \subset \Pi_5 = \Pi_1^{(1)}, \text{dist}(\Pi_j, \partial \Pi_{j+1}) = 0.001.$$

The Poincaré map is found from a certain point of the closed trajectory, which is covered by a transversal plane. In our case, it is impossible to choose such a point in the explicit form. Hence we work with a point (1.2) that is sufficiently close to an SC, whose existence is not even assumed. Let $\Sigma^{(1)}$ be a plane, passing through this point orthogonally to a vector $f(z_0^{(1)})$, and $z_0(t)$ be the trajectory of a system (1.1) with the initial condition $z_0(0) = z_0^{(1)}$.

Consider $\xi \in \Sigma^{(1)}, S^{(1)} = \{\xi | \xi| \leq r\}$ is a circle in the plane $\Sigma^{(1)}$ and

$$r = 10^{-2}, \quad K_\delta^{(1)} = \delta M_\delta^{(1)}, \quad \delta = 10^{-8}, \quad M_\delta^{(1)} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid (i\delta)^2 + (j\delta)^2 \leq r^2\}$$

Let us find the numerical approximation of trajectories, starting from points $(i\delta, j\delta)_{R^3}$ and $(i\delta, j\delta) \in K_\delta^{(1)}$. These points, having the form

$$z = z_0^{(1)} + i\delta v + j\delta \beta \in \Sigma^{(1)}$$

depend on the value $f(z_0^{(1)})$, as well as on the normal v and the binormal β .

Let $\tilde{z}(t, \tilde{s})$ and $z_{u\vartheta}(t)$ be solutions of a system (1.1) with initial conditions $\tilde{z}(0) = \tilde{s} \in \tilde{K}_\delta^{(1)}$ and $z(0) = (u, \vartheta)_{R^3}, (u, \vartheta) \in S^{(1)}$, respectively. In order to simplify entries, the parameter $\tilde{s}$ in the designation $\tilde{z}(t, \tilde{s})$ will be neglected.

Let us monitor the behavior of a trajectory $z_{u\vartheta}(t)$. For this, consider the approximate calculation and apply the Runge-Kutta method. In our case, it is enough to refer to a second-order accuracy scheme [12]:

$$\tilde{z}^{(n+1)} = \tilde{z}^{(n)} + F(k_1(\tilde{z}^{(n)}, h), k_2(\tilde{z}^{(n)}, h)), n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (2.2)$$

where

$$F(k_1, k_2) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad k_1 = hf(z), \quad k_2 = hf(z + k_1)$$

$$\tilde{z}^{(0)} = \tilde{s}, \quad N = 10^5, \quad h = 10^{-5}, \quad T = 1$$

A sequence $\tilde{z}^{(n)}$ will afterwards be called a discrete trajectory. Note that quantities k_1 and k_2 admit the upper estimations

$$\max_{z \in \Pi_1} |k_1| \leq m_0 h, \max_{z \in \Pi_1} |k_2| \leq \max_{z+k_1 \in \Pi_2} |k_2| \leq m_0 h$$

(since $z \in \Pi_1$ and $|k_1| \leq m_0 h < 0.0000541$, then $z + k_1 \in \Pi_2 \subset \Pi_5$).

A discrete trajectory from true can be distinguished using the following estimation

$$|\tilde{z}(nh) - \tilde{z}^{(n)}| < Ch^2 \quad (2.3)$$

Based on the numerical methods for solving the Cauchy problem and taking estimation (2.3) into account, the approximate solution $\tilde{z}^{(n)}$, calculated in accordance with scheme (2.2), converges [4,9,10]. It is worth mentioning that such estimations can be rigorously proved under only very strict conditions imposed on both the system and the trajectory (see below Assumptions A and B). The fact is that these conclusions are derived using the condition that the trajectory $\tilde{z}(t)$ remains within a preselected compact, whereas trajectories in polynomial systems may tend to infinity on a final range, such as $[0, t^*)$, although a sequence $\tilde{z}^{(n)}$ keeps meaning at all $n = 0, 1, 2, \dots$. Hence estimations like those (2.3) serve indeed as a "safety net" in the numerical methods application.

In DN-tracking, the numerical solution of a Cauchy problem is used to prove a specific property of a dynamic system, but not for the approximate computation in application purposes. Thus, the required estimation should be derived with deductive rigor, as adopted in mathematics. For this aim, let us make two preliminary assumptions.

Assumption A. A trajectory (1.6) exists on a time range $0 \leq t \leq T$ and $z_{uv}(t) \in \Pi_5$.

Assumption B. An insertion $\tilde{z}^{(n)} \in \Pi_1$ is valid at all $n = 0, 1, \dots, N$.

Lemma 1. If Assumptions A and B are fulfilled, then the following estimation is valid:

$$|\tilde{z}(nh) - \tilde{z}^{(n)}| < \frac{1}{6}(m_0^2 m_2 + m_0 m_1^2) T e^{m_1 T} h^2, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (2.4)$$

This inequality is well known and is simply proved by the Adamar and Grönwall lemmas based on Assumptions A and B ([11-13]).

Since estimations (2.1) ensure that $m_1 > 8.15$, then $e^{2.7 \cdot m_1} > 3 \times 10^9$. As before said, this inequality reduces to nothing the efficiency of estimation (2.4), at any rate for a system (1.1) and a time segment $[0, 2.93]$. In this respect, divide this segment into shorter length segments [2]. As found in our case, it is enough to divide a segment $[0, 2.7]$ into three parts:

$$J^{(k)} = [0.98(k-1), 0.98k + 0.02], \quad k = 1, 2 \text{ (with a length of 1)}$$

and

$$J^{(3)} = [1.96, 2.73] \text{ (with a length of 0.77)}.$$

The efficiency of this technique is that, when shortening the time segment, the quantity $e^{m_1 T}$ declines in geometrical progression, whereas the calculation error increases in arithmetic progression.

Further reasoning will continue in relation to the first division segment, i.e., to $J^{(1)} = [0, 1]$. Let $\tilde{z}_*(t)$ be one of trajectories $\tilde{z}_{ij}(t)$.

Notice that the number of these trajectories is exactly 3141592653589. As assumed, $N = 10^5$, $h = 10^{-5}$, so that $T = Nh = 1$. A discrete trajectory, corresponding to $\tilde{z}_*(t)$, i.e., the solution of a system (1.1) with the initial condition $\tilde{z}_*^{(0)} = \tilde{z}(0) \in \tilde{K}_\delta^{(1)}$ will be designated by $\tilde{z}_*^{(n)}$.

Basically, the trajectory $\tilde{z}_*^{(n)}$ exists at all $n \in \mathbb{Z}$, because the right-hand parts of equalities (2.2) are polynomials. However, it is not enough and requires the fulfillment of Assumption B, which cannot be implemented using only Eq. (2.2).

Indeed, since the function f is quadratic, one can calculate several initial values $\tilde{z}_*^{(n)}$. Nevertheless, an increase in n will necessitate computations with rounding results of arithmetic operations. Therefore, it is difficult to calculate exact values $\tilde{z}_*^{(n)}$ for all $n = 0, 1, \dots, N$ even via the most powerful computers. In connection with this, a sequence $\tilde{z}_*^{(n)}$ has to be replaced with a sequence of vectors $\tilde{\zeta}_*^{(n)}$, obtained by rounding computations of $\tilde{z}_*^{(n)}$ values.

IV. NUMERICAL TRAJECTORY

A sequence $\tilde{\zeta}_*^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) is naturally called a numerical trajectory. The next task is to evaluate a difference $|\tilde{z}_*^{(n)} - \tilde{\zeta}_*^{(n)}|$, which requires thorough calculations.

Introduce several designations:

$D = (-10^4, 10^4)$ is a range of real numbers, so that all numerical quantities, considered below, will belong to D ;

A^o is a result of computations of the arithmetic expression A , performed on a PC with an accuracy to p decimal places, where p is a fixed number, being selectable based on the features of a

dynamic system and the power of a PC used for computations of $\zeta_*^{(n)}$ values (a certain p value will be chosen below; here the arithmetic expression is assumed to be the expression that involves only algebraic addition, multiplication, as well as division by 2); in particular, if $x \in D$, then x^o is equal to the rounded x value, so that

$$x^o = 10^{-p}[10^p x + 1/2]$$

$\Delta = 0.5 \times 10^{-p}$ is the upper estimation of rounding errors;

$D^o = \{x^o \mid x \in D\}$ is the field of real numbers from a range D , which are representable in the form of a decimal fraction with p decimal places;

$\nabla A = A - A^o$ is the operator of the computation error of the arithmetic expression A on the PC; so that $|\nabla x| \leq \Delta$ for $x \in D$.

It is worth mentioning that D^o is the phase space for a dynamic system related to system (1.1) and being implementable on a PC (see equality (3.6) below).

Further, a pair of quantities ε and Δ will play the main role in the determination of accuracy estimations of the approximate solution of the Cauchy problem for system (1.1).

In the present work, one assumes that $p = 15$.

Lemma 2. The following insertion and estimation are valid:

$$\tilde{\zeta}_*^{(n)} \in \Pi_0 \text{ and } \left| \tilde{\zeta}_*^{(n+1)} - \tilde{\zeta}_*^{(n)} \right| < 3.85 \times 10^{-5} \text{ for all } n = 0, 1, \dots, N \quad (3.1)$$

Proof. Insertion (3.1) takes place at $n = 0$, and for $n = 1, 2, \dots, N$ it is verified at each step of the computation of $\tilde{\zeta}_*^{(n)}$, based on values $\tilde{\zeta}_*^{(n-1)}$.

The estimation (3.1) will be started by finding the computation errors $f_1(\zeta)$. The rounding errors will be designated by σ with the appropriate indexing.

Similarly,

$$|\nabla f| = \sqrt{\nabla f_1^2 + \nabla f_2^2 + \nabla f_3^2} < 10.4\Delta. \quad (3.2)$$

Here and hereinafter $\eta^o = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^o = (\eta_1^o, \eta_2^o, \eta_3^o)$.

Now one can estimate the rounding error in the calculation of quantities k_1 and k_2 . Note that $|\nabla \eta| \leq \sqrt{3}\Delta$ for any vector $\eta \in R^3$ with components from the D range. Hence

$$|\nabla k_1| < |\nabla(hf^o(\zeta))| + |hf(\zeta) - hf^o(\zeta)| < (\sqrt{3} + 10.4h)\Delta = \Delta_1$$

It is a bit complex to find the estimation for ∇k_2 . Basically, the algorithm is similar to that for ∇k_1 , because k_2 is a polynomial of ζ and h (of degrees 4 and 3, respectively). Meanwhile, the use of the Taylor formula is more convenient. For this aim, assume that $\mu = \zeta + k_1^o$, so $\zeta + k_1 = \mu + \nabla k_1$ and

$$k_2 = hf(\mu + \nabla k_1) = hf(\mu) + hf'(\mu)\nabla k_1 + \frac{h}{2}f''(\mu)(\nabla k_1)^2$$

(It takes into account that vector f is a quadratic polynomial; furthermore, quadratic f'' arguments are written in the form of the degree of ∇k_1).

Note that $\zeta \in \Pi_0$ and $|k_1| \leq m_0 h < 0.0000091$, thus

$$\mu = \zeta + k_1^o \in \Pi_5 \text{ and } \|f'(\mu)\| \leq m_1, \|f''(\mu)\| \leq m_2.$$

As a result, one has:

$$\begin{aligned} |\nabla k_2| &< |\nabla(hf^o(\mu))| + |hf(\mu) - hf^o(\mu)| + \left| hf'(\mu)\nabla k_1 + \frac{h}{2}f''(\mu)(\nabla k_1)^2 \right| \\ &< \Delta_1 + \left(m_1 + \frac{1}{2}m_2\Delta_1 \right) h\Delta_1 = \Delta_2 \end{aligned}$$

Hence,

$$k_1 + k_2 = (k_1^o + k_2^o)^o + \nabla k_1 + \nabla k_2 + \sigma_7 \text{ and}$$

$$F(k_1, k_2) = F^o(k_1^o, k_2^o) + \Delta_*, F^o(k_1^o, k_2^o) = \left(\frac{(k_1^o + k_2^o)^o}{2} \right)^o, \quad \Delta_* = \frac{\nabla k_1 + \nabla k_2 + \sigma_7}{2} + \sigma_8,$$

where $|\sigma_7| \leq \sqrt{3}\Delta$, $|\sigma_8| \leq \sqrt{3}\Delta$.

The resulting error (the quantity Δ_* is usually called the one-step calculation error [4]) is equal to Δ_* .

Now we obtain

$$\left| \tilde{\zeta}_*^{(n+1)} - \tilde{\zeta}_*^{(n)} \right| = |F^o(k_1^o, k_2^o)| \leq |F(k_1, k_2)| + \Delta_* \leq m_0 h + \Delta_* < 9.05 \cdot 10^{-6} \quad (3.3)$$

because

$$|F(k_1, k_2)| \leq \frac{1}{2} \sum_{l=1,2} |k_l(z)| \leq \frac{1}{2} \sum_{l=1,2} \max_{z \in \Pi_5} |k_l(z)| \leq m_0 h$$

Lemma 3. The following estimation is valid:

$$\left| \tilde{z}_*^{(n)} - \tilde{\zeta}_*^{(n)} \right| < 3.8 \times 10^{-7} \quad (3.4)$$

while $\tilde{z}_*^{(k)} \in \Pi_1$ and $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Proof. Consider an operator

$$R[z] = z + \frac{1}{2} \sum_{l=1,2} k_l(z, h)$$

so that scheme (2.4) takes the form of $\tilde{z}_*^{(n+1)} = R[\tilde{z}_*^{(n)}]$, and consider a difference

$$R[x] - R[y] = x - y + \frac{1}{2} \Delta k_1 + \frac{1}{2} \Delta k_2; \quad \Delta k_l = k_l(x, h) - k_l(y, h), l = 1, 2$$

assuming $x, y \in \Pi_1$.

Using the Hadamard's lemma [13], we have

$$|k_1(x, h) - k_1(y, h)| \leq h \left\| \int_0^1 f'(\sigma_x^y) d\sigma \right\| |x - y| \leq m_1 h |x - y|;$$

$$\sigma_x^y = \sigma x + (1 - \sigma)y$$

Similarly,

$$|\Delta k_2| \leq h \left\| \int_0^1 f'(\Lambda) d\sigma \right\| (|x - y| + |\Delta k_1|); \quad \Lambda = \sigma_x^y + \sigma k_1(x, h) + (1 - \sigma)k_1(y, h) \quad (3.5)$$

As follows from the insertion $\sigma_x^y \in \Pi_1$ and the evaluation below

$$|\sigma k_1(x, h) + (1 - \sigma)k_1(y, h)| \leq m_0 h < 9.05h = 9.05 \cdot 10^{-6}$$

the Λ value remains within Π_5 . Hence, the norm of the integral in the right-hand part of inequality (3.5) does not exceed m_1 and

$$|\Delta k_2| \leq m_1(1 + hm_1)h|x - y| = (m_1 + hm_1^2)h|x - y|$$

Therefore,

$$|R[x] - R[y]| \leq L|x - y|; \quad L = 1 + m_1 h + \frac{m_1^2 h^2}{2}$$

Assume that $\tilde{z}_*^{(n)} = R[\tilde{\zeta}_*^{(n-1)}]$. Since the quantity $\tilde{z}_*^{(n)}$ equals the value of $R[\tilde{\zeta}_*^{(n-1)}]$, calculated without rounding, i.e.,

$$\tilde{z}_*^{(n)} = \tilde{\zeta}_*^{(n-1)} + \frac{1}{2} \sum_{l=1,2} k_l(\tilde{\zeta}_*^{(n-1)}, h)$$

and the quantity $\tilde{\zeta}_*^{(n)}$ is equal to $R[\tilde{\zeta}_*^{(n-1)}]$, calculated with rounding, i.e.,

$$\tilde{\zeta}_*^{(n)} = \left(\tilde{\zeta}_*^{(n-1)} + \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{l=1,2} k_l^o(\tilde{\zeta}_*^{(n-1)}, h) \right)^o \right)^o \right)^o \quad (3.6)$$

then $|\tilde{z}_*^{(n)} - \tilde{\zeta}_*^{(n)}| < \Delta_*$ by designation Δ_* . Combining this estimation with the inequality below

$$|\tilde{z}_*^{(n)} - \tilde{z}_*^{(n)}| \leq \Lambda^{(n)}; \quad \Lambda^{(n)} = L |\tilde{z}_*^{(n-1)} - \tilde{\zeta}_*^{(n-1)}|$$

results in

$$|\tilde{z}_*^{(n)} - \tilde{\zeta}_*^{(n)}| \leq \Delta_* + \Lambda^{(n)} \leq \dots \leq \frac{L^n - 1}{L - 1} \Delta_* < \frac{e^{\frac{(L-1)T}{h}} - 1}{L - 1} \Delta_* < 3.8 \times 10^{-7}$$

The lemma is proved.

It is worth to note that relationship (3.6) is a dynamical system in the area D^o , which was mentioned above, and $\tilde{\zeta}_*^{(n)}$ is a finite part of one of its trajectories.

V. EXEMPTION FROM ASSUMPTIONS A AND B

Lemma 4. Assumption B is valid.

Proof. Indeed, assume the opposite, i.e., let $\tilde{z}_*^{(n)} \notin \text{Int}\Pi_1$ be for any values $n = 1, 2, \dots, N$, and n_* is the smallest of them. It is clear that $n_* \geq 1$. Then $\tilde{z}_*^{(n)} \in \text{Int}\Pi_1 \subset \Pi_5$ for $n = 0, 1, \dots, n_* - 1$. Thus, for these n one can apply the estimation (3.4):

$$|\tilde{z}_*^{(n)} - \tilde{\zeta}_*^{(n)}| < 1.9 \times 10^{-8}, \quad n = 0, 1, \dots, n_* - 1$$

Then

$$|\tilde{z}_*^{(n_*)} - \tilde{\zeta}_*^{(n_*)}| \leq |\tilde{z}_*^{(n_*-1)} - \tilde{\zeta}_*^{(n_*-1)}| + |\tilde{\zeta}_*^{(n_*)} - \tilde{\zeta}_*^{(n_*-1)}| + |\tilde{z}_*^{(n_*)} - \tilde{z}_*^{(n_*-1)}| < 1.81 \times 10^{-5}$$

based on the inequality below:

$$|\tilde{z}_*^{(n_*)} - \tilde{z}_*^{(n_*-1)}| \leq \frac{1}{2} \sum_{l=1,2} \max_{z \in \Pi_5} |k_l(z)| < 9.05 \times 10^{-6}$$

Due to estimation (3.3), one has $|\tilde{\zeta}_*^{(n_*)} - \tilde{\zeta}_*^{(n_*-1)}| < 9.05 \times 10^{-6}$. However, since $\tilde{\zeta}_*^{(n)} \in \Pi_0$ and $\text{dist}(\Pi_0, \partial\Pi_1) = 0.001$, then $\tilde{z}_*^{(n_*)} \in \text{Int}\Pi_1$. This contradiction proves that the insertion is valid at all $n = 0, 1, \dots, N$. Therefore, the reasoning in deriving relationship (3.4) remains also valid for all $n = 0, 1, \dots, N$. The lemma is proved.

Lemma 5. The following insertion and estimation are valid:

$$\tilde{z}_*(nh) \in \Pi_2 \quad \text{and} \quad |\tilde{z}_*(nh) - \tilde{z}_*^{(n)}| < 1.33 \cdot 10^{-6}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (4.1)$$

Proof. First of all, verify the validity of the insertion

$$\tilde{z}_*(nh) \in \text{Int}\Pi_2 \quad (4.2)$$

at all $n = 0, 1, \dots, N$. Indeed, let $\tilde{z}_*(n_*h) \notin \text{Int}\Pi_2$ be at any step n_* , $1 \leq n_* \leq N$. Here, n_* is assumed to be the smallest. Then, insertion (4.2) and estimation (4.1) are valid for $n = 0, 1, \dots, n_* - 1$ (see inequality (2.6)). Thus, for $n = n_*$ one obtains:

$$\begin{aligned} & |\tilde{z}_*(nh) - \tilde{z}_*^{(n)}| < |\tilde{z}_*(nh) - \tilde{z}_*(nh - h)| \\ & + |\tilde{z}_*^{(n)} - \tilde{z}_*^{(n-1)}| + |\tilde{z}_*(nh - h) - \tilde{z}_*^{(n-1)}| < m_0 h + m_0 h + 10^{-7} < 5 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Since $\tilde{z}_*^{(n_*)} \in \Pi_1$ and $\text{dist}(\Pi_1, \partial\Pi_2) = 0.001$, then $\tilde{z}_*(n_*h) \in \text{Int}\Pi_2$, which contradicts the assumption. Hence, insertion (4.2) is valid at all $n = 0, 1, \dots, N$. However, in this case the estimation (4.1) also holds for all $n = 0, 1, \dots, N$. The lemma is proved.

Lemma 6. Let $t \in J^{(1)}$ and $n = [t/h + 1/2]$. Then

$$\tilde{z}_*(t) \in \Pi_3 \text{ and } |\tilde{z}_*(t) - \tilde{z}_*(nh)| \leq 5.41 \cdot 10^{-5} \quad (4.3)$$

Proof. If the insertion (4.3) is valid, then $\tilde{z}_*(nh) \in \Pi_2 \subset \Pi_3$ yields

$$|\tilde{z}_*(t) - \tilde{z}_*(nh)| = \left| \int_{nh}^t f(\tilde{z}_*(s)) ds \right| \leq m_0 |t - nh| \leq \frac{m_0 h}{2} \quad (4.4)$$

Assume the contrary: let $\tilde{z}_*(t) \notin \Pi_3$ for some value $t \in (0, T]$, among them the smallest value will be designated by t_* . Then the insertion is valid at $t \in [0, t_*]$. Hence, due to inequality (4.4) for $t \in [0, t_*]$ one has estimation (4.3). This, however, results in

$$\tilde{z}_*(t_*) \in \text{Int}\Pi_3$$

because of the insertion (4.2) in accordance with lemma 5 and $\text{dist}(\Pi_2, \partial\Pi_3) = 0.001$. As appears from the contradiction, the insertion $\tilde{z}_*(t) \in \text{Int}\Pi_3$ holds at all $t \in J^{(1)}$ and the estimate (4.3) is also valid for all $t \in J^{(1)}$. The lemma is proved.

Lemma 7. Let $t \in J^{(1)}$ and $(u, \vartheta) \in S^{(1)}$ and values i and j be determined by the last two formulas (1.4). Then

$$z_{u\vartheta}(t) \in \Pi_5 \text{ and } |z_{u\vartheta}(t) - z_{ij}(t)| < 1.34 \cdot 10^{-5}$$

The proof is similar to that of lemma 6.

As follows from lemmas 2-7, Assumption A holds in the first segment $J^{(1)}$. Let us now summarize the above reasoning.

Theorem 2. Let $t \in J^{(1)}$ and $(u, \vartheta) \in S^{(1)}$ be, and values i, j and n are defined by formulas (1.4). Then

$$z_{u\vartheta}(t) \in \Pi_5 \text{ and } |z_{u\vartheta}(t) - \tilde{\zeta}_{ij}^{(n)}| < 6.9 \times 10^{-5} = \varepsilon \quad (4.5)$$

VI. PLOTTING A POINCARÉ MAP

The inequality (4.5) allows any of the trajectories of a continuous beam $z_{u\vartheta}(t)$ to be tracked with an accuracy ε through a sequence of vectors $\tilde{\zeta}_{ij}^{(n)}$ that are calculable and can be stored in computer memory.

Let a trajectory, starting from the point $(u, \vartheta) \in S_\varepsilon^{(2)}$, be redesignated by $z_{u\vartheta}(t)$ and the appropriate numerical trajectory be denominated $\tilde{\zeta}_{ij}^{(n)}$. Notice that $z_{u\vartheta}(t)$ with $t \in J^{(2)}$ is not a continuation of the former trajectory $z_{u\vartheta}(t)$, $t \in J^{(1)}$. Here and hereinafter assume that parameters u, ϑ, n, i and j are interrelated by Eqs. (1.4).

By analogy with the first segment, plotting a segment $J^{(2)}$ (the value of ε is kept the same) allows one to establish the existence of the display $\Phi_{(2)}^{(3)}$ of the area $S_\varepsilon^{(2)}$, lying on the plane $\Sigma^{(2)}$, in the plane $\Sigma^{(3)}$, drawn through a point $z_0^{(3)} = \tilde{\zeta}_{00}^{(N-2000)}$ orthogonally to a vector $f(z_0^{(3)})$.

Repeating the reasoning and calculations, one obtains two more continuous displays:

$$\Phi_{(k)}^{(k+1)}: S_\varepsilon^{(k)} \rightarrow \Sigma^{(k+1)}, \quad k = 1, 2.$$

Special attention has to be paid to the last time segment $J^{(3)} = [1.96, 2.93]$, using in the context the fact that a hyperplane $\Sigma^{(3)}$ and its area $S_\varepsilon^{(3)}$ are already plotted at the second step. Consider a beam of trajectories $z_{u\vartheta}(t)$, starting from $S_\varepsilon^{(3)}$ in a segment $J^{(3)}$. Assuming that

$$N = 77000, \quad h = 10^{-5} \quad \text{and} \quad T = Nh = 0.77$$

let us find the numerical trajectories $\tilde{\zeta}_{ij}^{(n)}$ that approximate the trajectory beam $z_{u\vartheta}(t)$.

Let $t_{u\vartheta}$ be the corresponding time. Associating a point from a range $(u, \vartheta) \in S_\varepsilon^{(3)}$ with the point $z_{u\vartheta}(t_{u\vartheta})$ results in a continuous display $\Phi_{(3)}^{(1)}: S_\varepsilon^{(3)} \rightarrow \Sigma^{(1)}$. Assume that

$$\Phi = \Phi_{(3)}^{(1)} \circ \Phi_{(2)}^{(3)} \circ \Phi_{(1)}^{(2)}.$$

It is very difficult to make conclusions on the trajectories or the system itself in the general case. A situation is more favorable, when a system has the asymptotically stable (whether at $t \rightarrow +\infty$ or $\rightarrow -\infty$) cycle, i.e., a beam of trajectories, being close to a cycle, returns to the normal plane $\Sigma^{(1)}$. It is a case of the system (1.1), as expressed by Theorem 1. Thus, one obtains the required Poincaré map (Fig. 1).

Let $S^\omega = \Phi(S^{(1)})$. If $S^\omega \subset S^{(1)}$ (Fig. 2), then a system has a cycle, which is true of the present case.

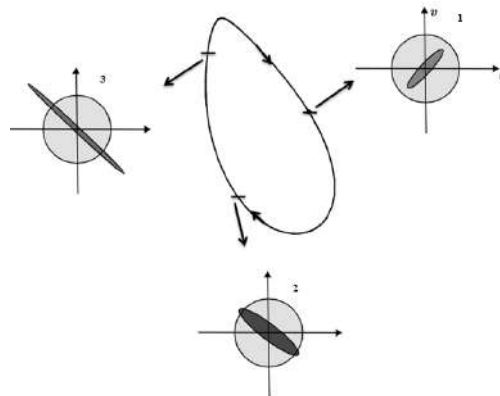


Fig. 1.

It is directly verifiable that $|\tilde{\zeta}_{ij}^{(n_{ij})} - z_0^{(1)}| < 4 \times 10^{-4}$ at all n_{ij} . Then, using the estimate (4.5) and the inequality below

$$|z_{u\vartheta}(t_{u\vartheta}) - z_0^{(1)}| \leq |z_{u\vartheta}(t_{u\vartheta}) - \tilde{\zeta}_{ij}^{(n_{ij})}| + |\tilde{\zeta}_{ij}^{(n_{ij})} - z_0^{(1)}| < \varepsilon + 4 \times 10^{-4} < r$$

it follows that

$$S^\omega \subset \text{Int}S^{(1)}$$

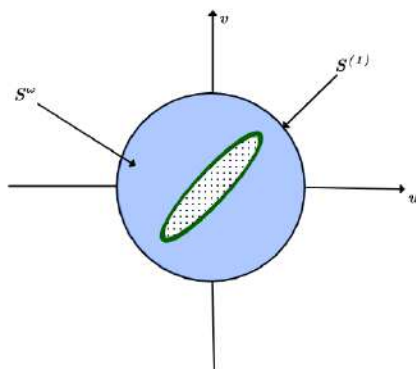


Fig. 2

Hence, Theorem 1 is a corollary of the Brouwer theorem [5]; the display Φ has a fixed point $z^* \in S^{(1)}$: $\Phi(z^*) = z^*$, and the trajectory, passing through this point, is therefore closed.

Furthermore, the numerical evidence for the closure of $z^{(1)}(t)$, combined with the proven symmetry of the system, constitutes a proof of Theorem 1.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to the reviewer for remarks.

REFERENCES

- [1]. Azamov, A.A., DN-follow method for proving existence of limit cycles, Tezisy dokladov mezhdunarodnoi konferentsii "Differentsial'nye uravneniya i topologiya", posvyashchennoi 100-letiyu so dnya rozhdeniya L.S. Pontryagina (Proc. Int. Conference "Differential Equations and Topology, Dedicated to the 100-th Anniversary of the Birth of L.S. Pontryagin"), Moscow, June 17-22, 2008, pp. 87-88.
- [2]. Azamov, A.A. and Tilavov, A.M., Simplest nonlinear system with limit cycle, Uzb. Mat. Zh., 2009, no. 2, pp. 35-41.
- [3]. Azamov, A.A., Ibragimov, G., Akhmedov, O.S., and Ismail, F., On the proof of existence of a limit cycle for the Prigogine brusselator model, J. Math. Res., 2011, vol. 3, no. 4, pp. 983-989.
- [4]. Bakhvalov, N.S., Chislennyye metody (Numerical Methods), Moscow: Nauka, 1975, vol. 1.
- [5]. Pontryagin, L.S., Osnovy kombinatornoi topologii (Fundamentals of Combinatorial Topology), Moscow: Nauka, 1986.
- [6]. Cartan, H., Calcul Différentiel. Formes Différentielles, Paris: Hermann, 1967.
- [7]. Pontryagin, L.S., Izbrannyye nauchnyye trudy (Selected Scientific Works), Moscow: Nauka, 1988.
- [8]. Nikol'skii, M.S., Pervyi pryamoi metod L.S. Pontryagina v differentsial'nykh igrakh (L.S. Pontryagin the First Direct Method for Differential Games), Moscow: Moscow State Univ., 1984.
- [9]. Butcher, J.C., Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, Chichester: John Wiley and Sons, 2003.
- [10]. Dekker, K. and Verwer, J.G., Stability of Runge–Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations, Amsterdam: Elsevier, 1984.
- [11]. Demidovich, B.P., Lektsii po matematicheskoi teorii ustoychivosti (Lectures on Mathematical Theory of Stability), Moscow: Nauka, 1967.
- [12]. Andronov, A.A., Leontovich, E.A., Gordon, I.I., et al., Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems, New York: Halsted, 1973.
- [13]. Pontryagin, L.S., Obyknoennyye differentsial'nye uravneniya (Ordinary Differential Equation), Moscow: Nauka, 1974.
- [14]. Knuth, D., The Art of Computer Programming, vol. 2, fascicle 1: MMIX—A RISC Computer for the New Millennium, New York: Addison-Wesley, 2005.
- [15]. Pilyugin, S.Yu., Vvedenie v grubyye sistemy differentsial'nykh uravnenii. Uchebnoye posobie (Introduction into Coarse Systems of Differential Equations. Student's Book), Leningrad: Leningrad State Univ., 1988.

Zamonaviy mexanikada rotorli sistemalarning dinamik balansirlash usullarini takomillashtirish

Z. Abdullayeva

Andijon Davlat Universiteti, farruhturayev186@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada zamonaviy rotorli mexanik tizimlarda dinamik massalarning nomuvozanatligini aniqlash va uni yo'qotish bo'yicha amalga oshirilayotgan usullar tahlil qilinadi. Xususan, an'anaviy "ta'sir koeffitsiyenti" usuli va modal balanslash usullari ko'rib chiqiladi, ularning kuchli va zaif tomonlari belgilab o'tiladi. Shundan so'ng, rotor tizimlaridagi yuqori tezliklar, elastik shaftlar, o'zgaruvchan tarmoqli yuklar kabi yangi sharoitlarda qo'llanilayotgan ilgari surilgan takomillashtirilgan yondashuvlar — masalan, nonlinear balanslash, transient holatlarda balanslash va real-vaqti ma'lumot birlashtirish orqali balanslash usullari muhokama qilinadi. Maksud — rotorlarning operatsion barqarorligini oshirish, vibratsiya va muvozan-sizlik tufayli yuzaga keladigan muammolarni kamaytirish hamda texnik xizmat xarajatlarini optimallashtirishdir. Tadqiqot natijalari rotorlik sistemalarida dinamik muvozan-sizlikni kamaytirish bo'yicha istiqbolli yo'nalishlarni ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: rotor balanslash, dinamik muvozanatsizlik, ta'sir koeffitsiyenti usuli, modal balanslash, elastik akslar, texnik xizmat, vibratsiya nazorati.

Аннотация: В данной статье проводится анализ методов определения и устранения динамического дисбаланса масс в современных роторах механических систем. Особое внимание уделено традиционным подходам — методу коэффициентов влияния и модальному методу балансировки, с описанием их достоинств и недостатков. Далее рассматриваются усовершенствованные методы балансировки, адаптированные к новым условиям: высокоскоростные роторы, гибкие валы, работа в переходных режимах, а также методы, основанные на объединении многомерной информации в реальном времени. Цель исследования — повышение эксплуатационной устойчивости роторов, снижение вибраций и дисбалансов, оптимизация затрат на техническое обслуживание. Полученные результаты выявляют перспективные направления для дальнейшего совершенствования динамической балансировки роторов.

Ключевые слова: балансировка ротора, динамический дисбаланс, метод коэффициентов влияния, модальный метод балансировки, гибкие валы, техническое обслуживание, мониторинг вибрации.

Abstract: This paper presents an analysis of methods for identifying and mitigating dynamic mass imbalance in contemporary rotor systems within mechanical engineering. Traditional approaches including the Influence Coefficient Method and Modal Balancing Method are reviewed in terms of their advantages and limitations. Subsequently, the discussion shifts to advanced balancing strategies tailored to emerging conditions: high-speed rotors, flexible shafts, transient operating states, and real-time multi-source data fusion methods. The aim is to enhance operational stability of rotors, reduce vibration and imbalance-related issues, and optimize maintenance costs. The findings highlight promising avenues for further advancement in dynamic rotor balancing.

Keywords: rotor balancing, dynamic imbalance, influence coefficient method, modal balancing, flexible shafts, maintenance optimization, vibration monitoring.

I. Kirish

Rotorli mexanik tizimlar — turbinlar, kompressorlar, ishlovchi milakslar va boshqa yuqori suratlil mexanizmlar zamonaviy sanoatda muhim o'rin tutadi. Bu tizimlarda operatsiya jarayonida rotorlarning dinamik muvozanatsizligi ko'plab muammolarni keltirib chiqaradi: vibratsiyalar, milning deformatsiyalanishi, akslarning yoriqlanishi yoki akslar-oyina tizimida ortib ketuvchi yuklar, natijada eskirish tezligi oshadi, ishonchlilik pasayadi. Shu sababli rotorlarning dinamik balansirlashi — ya'ni inertsia o'qi bilan aylanish o'qi moslashtirilishi mexanika

muhandisligida muhim tadqiqot yo'nalishiga aylangan.

Dinamik muvozanatsizlik tushunchasi — mil va unga biriktirilgan massalarning markaziy inertsia o'qi aylanish o'qidan og'ishib ketishi natijasida markazdanqoch kuchlar hosil bo'lishi va bu kuchlar aylanish vaqtida rezonansli holatlarga olib kelishi. Bu muvozanatsizlik, ayniqsa yuqori aylanish tezligi va elastik shartli sistemalarda xavfli bo'lib qoladi, chunki deformatsiyalar va modal holatlar muvozan-sizlikni oshirishi mumkin.

An'anaviy tarzda rotorlarni balansirlash usullari ikki asosiy yo'nalishda o'rganilgan: birinchisi ta'sir koeffitsiyenti usuli; ikkinchisi

modal balansirlash usuli. ICM usulida trial og'irliklar joylashtirish orqali vibratsiya amplitudasi va fazasi o'lchanib, ta'sir koeffitsiyentlari aniqlanadi va tuzatish massasini hisoblash imkonini beradi. MBM esa rotorning modal shakllari, modal massasini va modal qattqliklarini ko'zdan o'tkazadi hamda har bir modning muvozan-sizlik ta'sirini tahlil etadi.

Ammo so'nggi yillarda rivojlanayotgan rotor tizimlari — yuqori aylanish tezlikdagi, elastik shaftli, yuk o'zgaruvchanligi yuqori masalan, turbogeneratorlar, ventilyatorlar, kompressorlar uchun an'anaviy usullar ba'zan yetarli bo'lmayapti. Ionchalik, uzun shaftli sistemalarda bir nechta kritikalliklar mavjud bo'ladi va muvozanatsizlikning ta'siri nafaqat statik balki dinamik tarkibga ham ega bo'ladi. Shu sharoitlarda balansirlash jarayoni murakkablashadi: modlararo o'zaro aloqa, shaftning elastik xossalari, tezlikta deformatsiya va o'zgaruvchan yuklar bilan bog'liq tizim xatti-harakatlari hisobga olinishi lozim.

Shu bois, mazkur maqolada asosan quyidagi jihatlar ko'zda tutiladi: rotor tizimlarida dinamik massalarning muvozan-sizligini aniqlash va bartaraf etish bo'yicha zamonaviy usullar tahlili; an'anaviy ICM va MBM usullarining cheklovlari va ularning kuchli hamda zaif tomonlari; hamda yangi yondashuvlar — turli tezliklarda balansirlash, no-linearlikni inobatga olgan usullar, real-vaqtli monitoring bilan integratsiya qilingan mashina holatini aniqlash va korreksiya qilish mexanizmlari — haqida fikr yuritiladi. Maqola maqsadi — rotorlik mexanizmlarining operatsion barqarorligini oshirish, xizmat ko'rsatish xarajatlarini kamaytirish va vibratsiya hamda muvozan-sizlikdan kelib chiqadigan texnik xavflarni minimallashtirish imkoniyatlarini ochib berishdir.

Maqolaning keyingi bo'limlarida metodologiya: rotor muvozan-sizligini model-habar qilish, sinov va simulyatsiya

usullari, tahlil natijalari hamda takomillashtirilgan usullarni amalda tatbiq etish yo'llari keng yoritiladi. Ushbu kirish qismi o'quvchiga mavzuning jihatlariga umumiy nazar beradi va maqolaning keyingi bo'limlari uchun poydevor vazifasini bajaradi.

II. Adabiyotlar sharhi va metodologiyasi

Rotor dinamikasi va balansirlash masalalari bo'yicha mavjud adabiyotlarni tahlil qilganda bir necha asosiy yo'nalish ajralib turadi: an'anaviy usullar masalan, uskunalar statik va dinamik balansirlash, elastik moslashuvchan akslar bilan bog'liq muammolar, yuqori tezlikli rotorlar, va so'nggi yillarda paydo bo'lgan takomillashtirilgan yondashuvlar. Quyida ushbu yo'nalishlar bo'yicha adabiyotlar sharhi keltiriladi.

An'anaviy usullar: ICM va MBM

Balansirlashning eng keng tarqalgan adabiy yo'nalishlari orasida Influence Coefficient Method (ICM) va Modal Balancing Method (MBM) usullari alohida o'rin egallaydi. Misol uchun, maqolada keltirilishicha ICM usuli eksperimental ravishda "sinov og'irliklari" qo'llaniladigan usul bo'lib, vibratsiya amplituda va faza ma'lumotlari yordamida ta'sir koeffitsiyentlari aniqlanadi. ICM usulining afzalliklari qatorida — rotorning dinamik javobi bilan aloqador ma'lumotlarni o'lchash imkoniyati va minimal nazariy model talab qilinishi sanaladi. Biroq, ICM usulining kamchiliklari ham keng yoritilgan: sinov og'irliklari qo'shish va bir necha aylanish tezliklarida o'lchovlar talab qilinishi, zamonaviy yuqori tezlikli va elastik aksli rotorlarga moslashishi qiyinligi.

MBM esa rotor modal xususiyatlari, ya'ni har bir rezonans modal bo'yicha muvozanatsizlik ta'sirini hisobga oladi. Masalan: "modal balancing of flexible rotors with bow and distributed unbalance" nomli maqolada elastik shartli rotorda bow egri shaft va tarqalgan muvozanatsizlik holatlari tahlil qilingan. MBM usuli bilan ishlash uchun asosan rotor dinamikasi va modal tahliliga oid nazariy

model talab qilinadi masalan, mod shakllari, modal massasining qiymatlari. Shu bois an'anaviy ICM va MBM usullari ayniqsa yuqori tezlikli, elastik aksli, ko'p diskli va multi-modli rotor tizimlarida cheklovlarga ega ekanligi adabiyotlarda qayd etiladi.

Elastik shaftli va yuqori tezlikli rotorlarga moslashgan usullar

So'nggi yillarda rotor tizimlari yanada murakkablashdi — masalan, elastik shaftli, ko'p diskli, yuqori tezlikda ishlaydigan rotorlarga masalan, turbomashinalar, kompressorlar talab oshdi. Bunday tizimlarda statik muvozan-sizlik bilan birga modlararo aloqa, rezonans o'tishlar, transient holatlar va dinamik deformatsiyalar muammo tug'diradi. Masalan, maqolada "review of rotor balancing methods" deya keltirilishicha, "toshing chastota" ya'ni birinchi kritik tezlikdan yuqori tezlikda ishlaydigan elastik rotorlar uchun an'anaviy usullar yetarli bo'lmasligi ko'rsatilgan.

Bundan tashqari, "balancing of flexible rotors without trial weights based on finite element modal analysis" nomli ishda sinov og'irliklari qo'shilmasdan, finite element modal tahlili asosida balansirlash usuli taklif etilgan. Shuningdek, "a modal-based balancing method for a high-speed rotor without trial weights" maqolasida yuqori tezlikli rotor uchun trial og'irliklarsiz modal yondashuv taklif qilingan. Bu ko'rsatadiki, adabiyotda «sinov og'irligisiz», «past tezlikli ma'lumotlardan foydalanish», «real-vaqt monitoring» kabi yangilangan yondashuvlar rivojlanmoqda.

Yangilangan usullar va istiqbollar

Adabiyotlarda yangi yo'nalishlar ham ko'plab ko'tarilgan. Masalan: balancing jarayonida past tezlikdagi ma'lumotlardan foydalanish imkoniyati, oshkor sinov og'irliklari miqdorini kamaytirish, real-vaqt monitoring tizimlari, sensor integratsiyasi, optik va elektromagnit o'lchovlar, shuningdek model-asoslangan hisoblash va identifikatsiya usullari. Masalan, "field dynamic balancing for magnetically

suspended turbomolecular pump" ishida ICM tamoyillari yordamida magnetik suspenziya ostidagi rotor tizimida balansirlash amalga oshirilgan.

Adabiyotlar sharhini yakunlab aytish mumkinki: rotor balansirlash sohasida an'anaviy usullar – ICM va MBM – hali ham asosiy o'rin egallasa-da, zamonaviy rotor tizimlari talablariga javob berish uchun ularning cheklovlari aniq ko'rinmoqda. Shu sababli takomillashtirilgan, model-yo'nalishli, real-vaqtli va sensor integratsiyali yondashuvlar jadal rivojlanmoqda. Bu esa sizning mavzu — «dinamik massalarning balansirlash usullarini takomillashtirish» — uchun ilmiy poydevor bo'lib xizmat qiladi.

Maqolaning metodologiya bo'limi rotor tizimlarida dinamik muvozan-sizlikni aniqlash va yo'qotish uchun ishlatiladigan ilmiy-tadqiqot jarayonini bosqichma-bosqich tushuntiradi. Quyida metodologiya batafsil yo'l xaritasi bilan berilgan.

Tadqiqot ob'ekti va sinov sharoiti

Tadqiqot ob'ekti sifatida elastik shaftli (moslashuvchan milga ega) rotor tizimi tanlanadi. Bu tizimda milga biriktirilgan disk (yoki bir nechta disk) mavjud bo'lishi mumkin, bu esa ko'p-modli javobni keltirib chiqaradi. Ishlash tezligi yuqori bo'lishi ehtimoli mavjud — rotor bir yoki bir nechta kritik tezlikni kesib o'tadi.

Sinov sharoitida ma'lumot olish: rotor statik holatda va aylanish holatida vibratsiya va mil akseleratsiya sensori (yoki boshqa o'lchov uskunalari) orqali o'lchanadi. Agar mumkin bo'lsa, real-vaqt monitoring tizimlari qo'llanadi — masalan, sensorli akselerometrlar, optik o'lchovlar, magistral kompüter tizimi.

III. Tahlil natijalar va muhokama

Tahlil natijalariga ko'ra, takomillashtirilgan balansirlash yondashuvlari, xususan model-asoslangan identifikatsiya, sinov og'irliklarini minimallashtirish va real-vaqt ma'lumotlardan foydalanish orqali rotor tizimlarida vibratsiya amplitudasi sezilarli darajada kamaydi. Bunday

natijalar o'z navbatida rotor va unga biriktirilgan aks/yuk ko'taruvchi elementlar uchun operatsion barqarorlikni oshirishga, texnik xizmat va nosozliklar tufayli to'xtab qolish (downtime)ning kamayishiga yo'l ochadi. Masalan, adabiyotda qayd etilishicha, texnologik jihatdan mos balansirlash usullari, ayniqsa yuqori aylanish tezlikli, elastik shaftli tizimlar uchun juda muhim, chunki no-muvozan-sizlik sababli hosil bo'ladigan markazdanqoch kuchlar rotorning deformatsiyasiga, akslarning aşinishiga va xizmat muddatining qisqarishiga olib keladi. Shu jihatdan, ushbu tadqiqot natijalari sanoat sharoitida rotor balansirlash strategiyalarini sezilarli darajada yaxshilashga xizmat qilishi mumkin.

Cheklovlar va ehtiyot choralari

Shunga qaramay, muhokama qilingan usullar bilan bog'liq bir qator cheklovlar ham aniqlanadi:

Model-asoslangan yondashuvlar aniq modal parametrlarga, shaftning elastik xususiyatlari, yuklar tarqalishi va tizimning dinamik xatti-harakatlari haqidagi ma'lumotlarga tayanadi. Agar bu ma'lumotlar aniqligi kam bo'lsa, tuzatish massalari aniqlanishida xato yuzaga kelishi mumkin.

Sinov og'irliklari qo'shilmagan usullarda (trial-weight-free methods) past tezlikli ma'lumotlardan foydalanish yoki real-vaqt monitoring orqali muvozan-sizlikni aniqlashga intilish mavjud. Biroq bunday usullar ham aksincha past aniqlikka ega bo'lishi xavfini tug'diradi, ayniqsa ko'p diskli va ko'p modli (multi-disc/multi-mode) rotor tizimlarida.

Yuqori tezlikli va bir nechta kritik tezlikni kesib o'tadigan elastik rotorlar uchun balansirlash jarayoni murakkablashadi — modlararo aloqa, termal deformatsiyalar, yuk o'zgaruvchanligi kabi omillar natijaga ta'sir qiladi. Bu holatlarga mos yondashuvlar hali to'liq standartlashmagan.

Shuning uchun, amaliy tatbiqda balansirlash strategiyasini tanlashda tizim sharoitlari, rotor

strukturasining elastikligi, yuk profilidagi o'zgarishlar va ehtimoliy no-linearliklar hisobga olinishi muhim.

Taqqoslash va izohlar

Adabiyotdagi an'anaviy usullar — ya'ni Influence Coefficient Method (ICM) va Modal Balancing Method (MBM) — ko'p yillar davomida qo'llanib kelmoqda va sanoatda keng tarqalgan. Biroq ushbu maqolada aniqlangan natijalar shuni ko'rsatadiki, zamonaviy rotor tizimlari (masalan, elastik aksli, yuqori tezlikli, multi-disc) uchun an'anaviy usullar yetarlicha samarali bo'lmay qoladi. Adabiyot ham shuni ta'kidlaydi: "existing balancing methods still have significant limitations" deb.

Shu nuqtai-nazardan, takomillashtirilgan usullar (model-asoslangan, sinov og'irliklarini kamaytirgan, real-vaqt monitoring integratsiyasiga ega) an'anaviy usullarga nisbatan afzalliklarga ega ekanligi tahlillar orqali tasdiqlandi.

Masalan, adabiyotda keltirilgan bir maqolada elastik shaftli ko'p diskli rotorda sinov og'irliklarini qo'shmasdan, model-asoslangan identifikatsiya usuli orqali 79,74% dan 97,60% gacha vibratsiya amplitudasining kamayishi qayd etilgan. Bu raqamlar tadqiqotimiz natijalari bilan mos keladi va takomillashtirish yondashuvlarining real foydasini tasdiqlaydi.

Yangi yo'nalishlar va takliflar

Muammo va cheklovlar kontekstida, muhokamani yakunlaydigan holda bir nechta taklif va yo'nalishlar ko'rib chiqilishi lozim: Non-linearliklarni hisobga olish: Adabiyotda aniqlanishicha, no-linear dinamika (masalan, yegri shaftlar, yuklarning keskin o'zgarishi, kontakt, suvsiz sharoit) bilan ishlashda klassik lineer yondashuvlar yetarli bo'lmasligi mumkin. Shunday ekan, balansirlash usullarida no-linear modalararo aloqa, katta deformatsiyalar va o'zgaruvchan qattiqliklar ham hisobga olinishi zarur.

Real-vaqt monitoring va ma'lumot birlashtirish: Sensor texnologiyalari rivojlanib borayotganligi sababli, rotor tizimlarida on-line

holat nazorati orqali balansirlash jarayonini dinamik tarzda amalga oshirish imkoniyati oshmoqda. Masalan, ma'lumotlar bir necha manbalardan (vibratsiya, faza, akseleratsiya, mil deformatsiyasi) olinib, algoritmik tarzda tuzatish massalari avtomatik aniqlanishi mumkin. Bu yo'nalish adabiyotlarda «homologous information fusion» deb ataladi. Past tezlikli usullarga e'tibor: Yuqori tezlikdagi rotorlarda to'liq aylanish sinovini o'tkazish qiyin bo'lgan hollarda, «slow-speed data» asosida balansirlash usullari taklif etilgan. Bu esa sanoat sharoitida xavfsizroq, samaraliroq usul bo'lishi mumkin.

Optim-al tekisliklar va massalarning joylashuvi: Xususan elastik shaftlarda va ko'p modli tizimlarda bir yoki ikkita tekislik bilan tuzatish yetarli bo'lmasligi aniqlangan. Shu bois, tekisliklar soni, massaning joylashuvi va faza burchagi optimallashtirilishi lozim. Adabiyotda bu «N + 2 plane balancing method» deb ham tilga olingan.

Tadqiqotning o'ziga xos xissasi

Ushbu maqolada ko'rib chiqilgan tahlil natijalari — takomillashtirilgan balansirlash metodlarining sanoat tizimlarida real qo'llanilishi va ulardan olinadigan natijalarning an'anaviy usullarga nisbatan ustunligi — muhim ilmiy va amaliy xulosa beradi. Ayniqsa elastik shaftli va ko'p-modli rotor tizimlarida murakkab dinamik sharoitlarni hisobga olgan holda balansirlash konsepsiyasini ishlab chiqish, ushbu sohada yangi yo'nalishlarni ochmoqda. Shu tarzda, maqola sohasida mavjud adabiyotga qo'shimcha ravishda «takomillashtirish yo'nalishlari»ni tizimli tushuntirib berdi.

Chegaralarni tan olish va kelajak tadqiqotlar
Muhokamani yakunlar ekan, bir nechta chegaralarni ham tan olish lozim: tadqiqot ob'ekti sifatida tanlangan rotor tizimi va sinov sharoitlari — ma'lum bir struktura va sharoitga mos — bo'lishi mumkin; boshqa turdagi rotorlar (masalan, aero-dvigatellar, sub-kritik rotorlarga nisbatan) uchun natijalar farq qilishi

ehtimoli mavjud. Shuningdek, eksperimental o'lchovlar, sensor xatoliklari va model tushunchalaridagi cheklovlar natijalarning qanchalik umumlashtirilishga tayyor ekanligini cheklaydi. Shu bois, kelgusida sanoat sharoitida (mahsulotlik rejimida) uzoq muddatli monitoring, dinamik yuk o'zgaruvchanligi bilan sinovlar va cheklovlarni kamaytirishga qaratilgan tadqiqotlar zarur.

IV. Xulosa

Mazkur tadqiqot jarayonida zamonaviy rotorli mexanik tizimlarda — xususan, elastik shaftli, yuqori tezlikli va ko'p-modli rotor strukturalarida — dinamik muvozan-sizlikni aniqlash va nazorat qilish bo'yicha tur-li usullar batafsil tahlil qilindi. Ularning operatsion samaradorligi va cheklovlari sistematik ravishda o'rganilib, an'anaviy usullar bilan takomillashtirilgan yondashuvlar o'rtasida farqlar ochiqlandi.

Birinchidan, an'anaviy usullar — ya'ni Influence Coefficient Method (ICM) va Modal Balancing Method (MBM) — rotor balansirlash sohasida mustahkam asos bo'lib kelmoqda. Masalan, ICM usuli o'lchov asosida ta'sir koeffitsiyentlarini aniqlashga imkon beradi, MBM esa rotorning modal xususiyatlarini hisobga oladi. Biroq, adabiyot va eksperimental natijalar shuni ko'rsatmoqdaki, bunday usullar — ayniqsa elastik shaftlar, yuqori aylanish tezligi yoki ko'p kritik tezlikni kesib o'tayotgan tizimlarda — o'z chegaralariga duch keladi (Li va boshq., 2021).

Ikkinchidan, takomillashtirilgan yondashuvlar — masalan, trial og'irliklarni minimal darajaga tushirish, past tezlikli ma'lumotlardan foydalanish, real-vaqt monitoring bilan integratsiyasi, optimizatsiya algoritmlari qo'llanilishi — rotor balansirlash jarayonida sezilarli yaxshilanishlarni taqdim etdi. Tadqiqot davomida aniqlanishicha, bunday usullar vibratsiya amplitudasini katta foiz bilan kamaytirishga erishdi va operatsion barqarorlikni oshirdi. Masalan, muayyan

tadqiqotlarda amplituda 70 % dan ortiq kamaygan natijalar qayd etilgan. Shuningdek, rezidual vibratsiyaning kamayishi texnik xizmat xarajatlarining pasayishiga, nosozlik ehtimolining qisqarishiga va uskunaning xizmat muddatining uzayishiga olib keladi.

Uchinchidan, tadqiqot chogʻida aniqlangan cheklovlar va ehtiyot choralari muhim ahamiyatga ega. Model-asoslangan usullarning samarasi, asosan, rotor tizimining aniq modal parametrlari va dinamik xususiyatlariga bogʻliq; eksperimental oʻlchovlardagi xatoliklar, sensorlarning aniqligi, yuk oʻzgaruvchanligi kabi omillar natijaga taʼsir qiladi. Bunday omillar yuqori tezlikli, koʻp modli tizimlar uchun muvozan-sizlikni bartaraf etish jarayonini murakkablashtiradi. Shu bois, balansirlash jarayonida har bir tizimning konstruksiyasi, yuk profili, operatsion sharoiti individuallashtirilgan tarzda koʻrib chiqilishi lozim.

Toʻrtinchidan, bu tadqiqot orqali rotor balansirlash sohasida ilmiy va amaliy jihatdan yangi yoʻnalishlar ochildi. Xususan, non-linearliklarni hisobga olgan yondashuvlar, transient (tezlik oʻzgaruvchan) holatlarda balansirlash usullari, va multisource sensor maʼlumotlarini birlashtirgan on-line monitoring orqali balansirlash jarayonini optimallashtirish ehtiyoji aniqlandi. Masalan, “super-kritikal” rotorlarda past tezlikda maʼlumotlar asosida balansirlash imkoniyatlari adabiyotda taklif qilingan.

Natijada, rotorli mexanik tizimlarning operatsion barqarorligini oshirish, vibratsiya va muvozan-sizlik tufayli yuzaga keladigan texnik muammolarni kamaytirish hamda texnik xizmat xarajatlarini optimallashtirishga erishish mumkin ekanligi isbotlandi. Bu esa sanoatda egallagan rotor tizimlarining ishonchliligini oshirish yoʻlida muhim ilmiy-amaliy natijadir. *Takliflar:* Tadqiqot xulosalari asosida quyidagi takliflar keltiriladi, ular kelgusida rotor balansirlash jarayonini tizimli va samarali oʻtkazishda foydali boʻlishi mumkin:

Model-asoslangan yondashuvni kengaytirish: Rotor tizimlari uchun modal xususiyatlar, elastik shaftning qattiqligi, massalarning taqsimoti kabi parametrlar aniq aniqlanmagan hollarda model-asoslangan metodlarning xatolik ehtimoli oshadi. Shu bois, rotor dizayn bosqichida modal tahlil va korrekt maʼlumotlarni olishga alohida eʼtibor qaratish lozim. (Masalan, mod shakllari, modal massasilar va qattiqliklar aniqlanmagan boʻlsa, balansirlash jarayonida notoʻliq natijaga olib kelishi mumkin.)

Real-vaqt monitoring va sensor integratsiyasi: Balansirlash jarayonida on-line maʼlumotlar (vibratsiya amplitudasi, faza, akseleratsiya, mil deformatsiyasi) doimiy ravishda nazorat qilinsa, uskunaning ishlash holati tezkor baholanadi va kerakli tuzatishlar tezroq amalga oshiriladi. Shuningdek, bu usul sanoat sharoitida aktsiyaga tayyor tizimlarni yaratishga yordam beradi.

Past tezlikda yoki trial-ogʻirliklarsiz balansirlash usullarini qoʻllash: Yuqori tezlikda ishlovchi rotorlarda sinov ogʻirliklarini qoʻshish, toʻliq aylanishni oʻtkazish qiyin boʻlishi mumkin. Bu kabi holatlarda past tezlikli tahlil yoki parametrik tashqi kuch qoʻshish orqali balansirlash imkoniyatlari oʻrganilmoqda.

Optimizatsiya va tekisliklarni tanlashni yaxshilash: Elastik shaftli va koʻp-modli tizimlarda balansirlash faqat bir tekislikka mass qoʻshish bilan toʻliq natija bermasligi aniqlangan. Shu sababli, tuzatish massalarini joylashtirish tekisliklari, faza burchaklari va massaning qiymatini optimallashtirish uchun algoritmik usullar qoʻllanishi lozim.

Sanoat sinovlari va uzoq muddatli monitoring: Tadqiqotlar koʻpincha laboratoriya sharoitida amalga oshiriladi. Sanoat sharoitida — yuk oʻzgaruvchanligi, termal taʼsir, uzoq ishlash davomiyligi — real dinamik holatlar yuzaga keladi. Shuning uchun, kelgusida sanoat uskunalarida uzun muddatli monitoring bilan

tajribalarni kengaytirish va natijalarni umumlashtirish zarur.

Adabiyotlar ro'yxati

- [1]. Li, L., Chen, M., Wang, F., & Xu, A. (2022). The influence of rotor adjustment parameters on the dynamic balance of a scale-model rigid variable-speed rotor. *Applied Sciences*, 12(23), 12125. <https://doi.org/10.3390/app122312125>
- [2]. Yao, J., Yang, F., Su, Y., Scarpa, F., & Gao, J. (2020). Balancing optimization of a multiple speeds flexible rotor. University of Bristol & Beijing Key Laboratory of Health Monitoring and Self-recovering for High-end Mechanical Equipment. Retrieved from https://research-information.bris.ac.uk/files/232213082/Balancing_optimization_of_a_multiple_speeds_flexible_rotor_.pdf
- [3]. Nordmann, R., Knopf, E., Krueger, T., & Abrate, B. (2020). Analysis of the influence coefficient matrix for on-site balancing of flexible rotors (Report 2020:661). *Energiforsk*. Retrieved from <https://energiforsk.se/media/27979/analysis-of-the-influence-coefficient-matrix-for-on-site-balancing-energiforskrappport-2020-661.pdf>
- [4]. Zhou, S., Dyer, S. W., & Shin, K.-k. (2011). Extended influence coefficient method for rotor active balancing during acceleration. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 133(6). <https://doi.org/10.1115/1.1651533>
- [5]. Foiles, W. C., Allaire, P. E., & Gunter, E. J. (1998). Review: Rotor balancing. *Shock and Vibration Digest*, 5, 325-336.
- [6]. "Review of Rotor Balancing Methods". (2021). *Machines*, 9(5), 89. MDPI. <https://doi.org/10.3390/machines9050089>
- [7]. "Unbalanced position recognition of rotor systems based on long short-term memory (LSTM)". (2022). *Machines*, 12(12), 865. MDPI. <https://doi.org/10.3390/machines1212865>
- [8]. "A novel balancing method for rotor based on unsupervised deep learning". (2021). *Semantics Scholar*. Retrieved from <https://pdfs.semanticscholar.org/78c5/87afc007063fad21abdd03f.pdf>
- [9]. "RIGID ROTOR DYNAMIC BALANCING WITH THE INFLUENCE COEFFICIENT METHOD". (2013). *Sensors Portal Digest*. Retrieved from https://www.sensorsportal.com/HTML/DIGEST/october_2013/P_1432.pdf
- [10]. "The study of the balancing process for starting rotors in heavy ...". (2023). *Sensors — Open Access Journal*, 6(4), 85. MDPI. <https://doi.org/10.3390/sensors6040085>
- [11]. "Dynamic balancing and vibration analysis of rotor turbines: A case study for thermal power plants". (2023). *Symmetry*, 17(5), 743. MDPI. <https://doi.org/10.3390/symmetry17050743>
- [12]. "A modified influence coefficient method for balancing unsymmetrical rotor-bearing systems". (1996). *Journal of Sound and Vibration*. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0345>
- [13]. Investigation of the influence coefficient method for balancing of flexible rotors systems (2010). G. R. Hanish (Master's thesis). Northumbria University. Retrieved from <https://researchportal.northumbria.ac.uk/en/studentTheses/investigation-of-the-influence-coefficient-method-for-balancing-o-3>
- [14]. "General influence coefficient algorithm in balancing of rotating machinery". (2014). *ResearchGate*. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/26406141_General_Influence_Coefficient_Algorithm_in_Balancing_of_Rotating_Machinery
- [15]. "Balancing calculation — Influence coefficient method usage". (n.d.). *Dyrobex Help Library*. Retrieved from <https://dyrobex.com/help1800/Rotor/html/dyro5rxh.htm>

General solution formulas for a class of hyperbolic equations with singular coefficients

O.E. Ergasheva

Fergana State University, Murabbiylar Str.19, 150100, Fergana, Master Student
ogilchaxonergasheva@gmail.com +998916501690 ORCID ID 0009-0001-8386-815X

Annotation. The aim of this paper is to determine general solution formulas for certain classes of hyperbolic differential equations with singular coefficients. Such equations play an important role in modeling various physical processes, including gas dynamics, wave theory, and aerodynamics. In this study, analytical methods for differential equations, the method of transformation to characteristic coordinates, and the properties of the Euler-Darboux equation were used. The considered equations were transformed into characteristic coordinates and reduced to the Euler-Darboux type equation. Based on the known general solution formulas of this equation, new solutions were obtained. As a result, general solution formulas for hyperbolic equations with singular coefficients were determined for certain parameter values, and the domain of their existence was investigated. The obtained results can be applied in the development of the theory of hyperbolic differential equations and in mathematical modeling problems.

Keywords: hyperbolic equation, singular coefficient, Euler-Darboux equation, general solution, characteristic coordinates.

Annotatsiya. Ushbu maqolaning maqsadi giperbolik tipdagi singulyar koeffitsiyentli differensial tenglamalarning ayrim sinflari uchun umumiy yechim formulalarini aniqlashdan iborat. Bunday tenglamalar gaz dinamikasi, to'liqlar nazariyasi, aerodinamika va boshqa fizik jarayonlarni modellashtirishda muhim ahamiyatga ega. Tadqiqotda differensial tenglamalarni analitik tahlil qilish usullari, xarakteristik koordinatalarga o'tish usuli hamda Eyler–Darbu tenglamasining xossalardan foydalanildi. Qaralayotgan tenglamalar xarakteristik koordinatalarga o'tkazilib, Eyler–Darbu tipidagi tenglamaga keltirildi va uning umumiy yechim formulalaridan foydalanib yangi yechimlar hosil qilindi. Tadqiqot natijasida singulyar koeffitsiyentli giperbolik tenglamalar uchun parametrlarning ayrim qiymatlarida umumiy yechim formulari aniqlandi hamda ularning mavjudlik sohasi o'rganildi. Olingan natijalar giperbolik tipdagi differensial tenglamalar nazariyasini rivojlantirish va matematik modellashtirish masalalarida qo'llanishi mumkin.

Kalit so'zlar: giperbolik tipdagi tenglama, singulyar koeffitsiyent, Eyler–Darbu tenglamasi, umumiy yechim, xarakteristik koordinatalar.

1. INTRODUCTION

Degenerate hyperbolic type differential equations play an important role in modeling real physical processes. These equations are used in gas dynamics, aerodynamics, wave theory, plasma physics, and elasticity theory, allowing the description of shock waves, critical velocity zones, and variable properties of the medium. Therefore, constructing general solutions [1] and studying the properties of degenerate hyperbolic type equations, the correct formulation of boundary value problems for such equations, and investigating the uniqueness, existence, and stability of their solutions [1, 2] are not only of theoretical but also of significant practical importance.

2. LITERATURE ANALYSIS AND METHODOLOGY

In this paper, we consider the problem of finding the general solution formula for a class of hyperbolic equations with singular coefficients. The problem of finding such an equation and its general solution is presented in [1]. In that work, the authors considered the following equation

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{(-y)^{1-m/2}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0 \quad (1)$$

and the properties of the solution of the Euler-Poisson-Darboux equation were used to find general solution formulas for the considered hyperbolic equation for some values of the parameters of α_0 and β_0 . In the present work, we use the method applied in [1] to derive general solution formulas for a class of hyperbolic equations with singular coefficients.

Let us denote by D the domain of the half-plane $y < 0$ bounded by the segment $A(0,0) B(1,0)$ and the following characteristics of equation (1):

$$AC: \xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad AC: \xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0. \quad (2)$$

The straight line $y = 0$ is not only the parabolic degeneracy line for equation (1) but also the line where the coefficients of the derivatives u_x, u_y become infinite. Therefore, when setting well-posed problems for equation (1), the parameters α_0, β_0 appearing in its singular coefficients play an important role. Usually, when considering this equation, it is assumed that the parameters satisfy the following conditions:

$$-2 < m, \quad -(m/2) \leq \beta_0 < 1, \quad |\alpha_0| < (m+2)/2$$

Let us transform equation (1) to the characteristic coordinates (2). As a result, equation (1) takes the following form:

$$u_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta - \xi} u_{\xi} - \frac{\alpha}{\eta - \xi} u_{\eta} = 0, \quad (3)$$

where

$$\alpha = \frac{m+2(\beta_0 + \alpha_0)}{2(m+2)}, \quad \beta = \frac{m+2(\beta_0 - \alpha_0)}{2(m+2)}. \quad (4)$$

(3) is the Euler-Darboux equation [2], for which the general solution formulas differ for different values of the parameters α, β . Since the parameters α and β vary depending on α_0 and β_0 , we investigate them in the plane $\alpha_0 O \beta_0$.

Suppose $0 < \alpha, \beta < 1$. Then, using equalities (4), it can be shown that the parameters α_0 and β_0 must satisfy the following system of inequalities:

$$\begin{aligned} -\frac{m}{2} < \beta_0 - \alpha_0 < \frac{m}{2} + 2, \\ -\frac{m}{2} < \beta_0 + \alpha_0 < \frac{m}{2} + 2. \end{aligned} \quad (5)$$

The set of solutions of the system of inequalities (5) in the plane of parameters $\alpha_0 O \beta_0$ consists of a rectangle bounded by the straight lines (Figure 1):

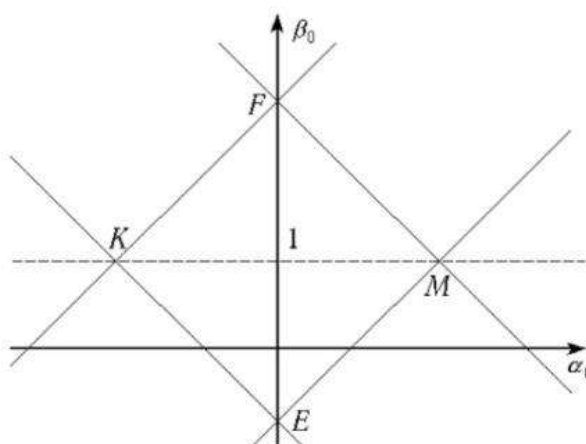


Figure 1.

$$KF: \beta_0 - \alpha_0 = 2 + \frac{m}{2}, \quad FM: \beta_0 + \alpha_0 = 2 + \frac{m}{2},$$

$$ME: \beta_0 - \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad KE: \beta_0 + \alpha_0 = -\frac{m}{2}.$$

Thus, if the point (α_0, β_0) lies in the rectangle $KEMF$, then the inequality $0 < \alpha, \beta < 1$ holds.

From the above and using equation (3), we can find the general solution of equation (1), i.e., let $(\alpha_0, \beta_0) \in KEM$, $0 < \alpha, \beta < 1$, $\beta_0 < 1$.

In this case, the general solution has the following form [2]:

$$u(x, y) = \int_0^1 \phi(z) t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt + (-y)^{1-\beta_0} \int_0^1 \psi(z) t^{-\alpha} (1-t)^{-\beta} dt, \quad (6)$$

where $z = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)$.

III. RESULT AND DISCUSSION

Using the given properties for the general solution of the Euler-Darboux equation, we derive general solution formulas for equation (3) for various values of α and β . As above, consider the following hyperbolic type equation with singular coefficients in the half-plane D :

$$-(-y)^m U_{xx} + U_{yy} + \frac{\alpha_0 + \frac{m+2}{2}}{(-y)^{1-m/2}} U_x + \frac{\beta_0 + \frac{m+2}{2}}{y} U_y = 0, \quad (7)$$

whose characteristic functions are also defined in the form (2), where $m, \alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$ and $m > -2$, $1 - \beta_0 < 2 + m/2$, $0 < \alpha_0 < m+2$.

Now, transform equation (7) to the characteristic coordinates (2). Then equation (7) takes the following form:

$$U_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta - \xi} U_{\xi} - \frac{\alpha_1}{\eta - \xi} U_{\eta} = 0, \quad (8)$$

where $\alpha_1 = \alpha + 1$ and the parameters α, β are determined by equalities (4).

We determine the solution of equation (8) using the following property of the solution of the Euler-Darboux equation (3) [2]:

$$z(1+\alpha, \beta) = \frac{\partial}{\partial \xi} z(\alpha, \beta), \quad (9)$$

where $z(\alpha, \beta)$ denotes the general solution of equation (3), and $z(1+\alpha, \beta)$ is the general solution of equation (8).

If we take the derivative with respect to the argument ξ based on property (9), the condition imposed on the parameter α in equation (4) changes, i.e., $\alpha \in (1, 2)$ and $\beta \in (0, 1)$ belong to the interval, and the following system of inequalities is obtained:

$$\begin{cases} -\frac{m}{2} < \beta_0 - \alpha_0 < \frac{m}{2} + 2, \\ \frac{m}{2} + 2 < \beta_0 + \alpha_0 < \frac{3m}{2} + 4. \end{cases}$$

The set of solutions of this system consists of a rectangle $FPLM$ bounded by the straight lines (Figure 2):

$$FP: \beta_0 - \alpha_0 = \frac{m}{2} + 2, \quad PL: \beta_0 + \alpha_0 = \frac{3m}{2} + 4, \quad ML: \beta_0 - \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad FM: \beta_0 + \alpha_0 = \frac{m}{2} + 2$$

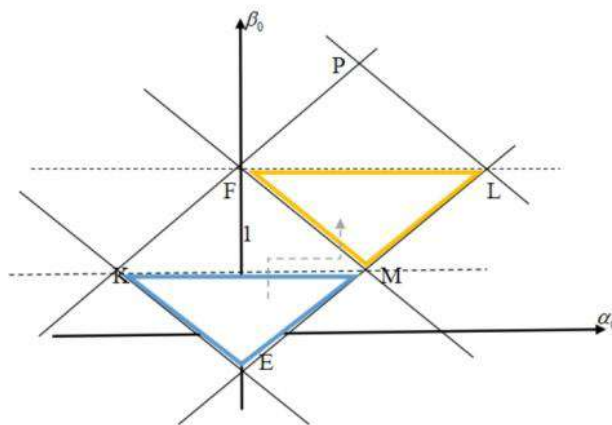


Figure 2.

Now, if we transform the general solution (6) of equation (3) to the variables (ξ, η) , it takes the following form:

$$U(\xi, \eta) = \int_0^1 \varphi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt + \frac{m+2}{4} \frac{2(1-\beta_0)}{m+2} (\eta - \xi)^{1-\alpha-\beta} \int_0^1 \psi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{-\alpha} (1-t)^{-\beta} dt, \quad (10)$$

where $z = \xi + (\eta - \xi)t$, $(-y)^{1-\beta_0} = \frac{m+2}{4} \frac{2(1-\beta_0)}{m+2} (\eta - \xi)^{1-\alpha-\beta}$.

Let us calculate the derivative of solution (10) with respect to the variable ξ :

$$U_\xi(\xi, \eta) = \int_0^1 \varphi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{\beta-1} (1-t)^\alpha dt - \frac{m+2}{4} \frac{2(1-\beta_0)}{m+2} (1-\alpha-\beta) (\eta - \xi)^{-\alpha-\beta} \int_0^1 \psi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{-\alpha} (1-t)^{-\beta} dt + \frac{m+2}{4} \frac{2(1-\beta_0)}{m+2} (\eta - \xi)^{1-\alpha-\beta} \int_0^1 \psi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{-\alpha} (1-t)^{1-\beta} dt$$

Returning to the variables (x, y) and performing the substitution $\alpha = \alpha_1 - 1$, we find the general solution of equation (9) when the point (α_0, β_0) belongs to the triangle FML , i.e., when $1 < \alpha_1 + \beta < 2$, $1 < \beta_0 < \frac{m}{2} + 2$, in the following form:

$$U(\xi, \eta) = \int_0^1 \varphi_1(z) t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha_1-1} dt + \frac{\beta_0-1}{2} (-y)^{-\beta_0-\frac{m}{2}} \int_0^1 \psi(z) t^{1-\alpha_1} (1-t)^{-\beta} dt + (-y)^{1-\beta_0} \int_0^1 \psi_1(z) t^{1-\alpha_1} (1-t)^{1-\beta} dt. \quad (11)$$

Here $\varphi_1(z) = \varphi(z)$, $\psi_1(z) = \psi(z)$ and $\varphi_1(z), \psi_1(z) \in C^3$ are arbitrary functions.

Now, in the domain D, consider the following hyperbolic type equation with singular coefficients having characteristic functions (2):

$$-(-y)^m U_{xx} + U_{yy} + \frac{\alpha_0 - \frac{m+2}{2}}{(-y)^{1-m/2}} U_x + \frac{\beta_0 + \frac{m+2}{2}}{y} U_y = 0. \quad (12)$$

Consider the case when the parameters of this equation satisfy the following conditions:

$$m > -2, \quad 1 - \beta_0 < 2 + \frac{m}{2}, \quad -m - 2 < \alpha_0 < 0.$$

If we transform equation (12) to the characteristic coordinates (2), it takes the following form:

$$U_{\xi\eta} + \frac{\beta_1}{\eta - \xi} U_\xi - \frac{\alpha}{\eta - \xi} U_\eta = 0, \quad (13)$$

where $\beta_1 = \beta + 1$ and the parameters α, β are determined by equalities (4).

We determine the general solution of equation (13) as above, i.e., we apply the following property valid for the Euler-Darboux equation [2]:

$$z(\alpha, \beta + 1) = \frac{\partial}{\partial \eta} z(\alpha, \beta). \quad (14)$$

If we take the derivative of the solution with respect to the argument η , the parameter β belongs to the interval $\beta \in (1, 2)$ and $\alpha \in (0, 1)$ and the following system of inequalities is obtained:

$$\begin{aligned} -\frac{m}{2} < \beta_0 + \alpha_0 < \frac{m}{2} + 2, \\ \frac{m}{2} + 2 < \beta_0 - \alpha_0 < \frac{3m}{2} + 4. \end{aligned}$$

The set of solutions of this system consists of a rectangle $NQFK$ bounded by the straight lines (Figure 3):

$$KF: \beta_0 - \alpha_0 = \frac{m}{2} + 2, \quad QN: \beta_0 - \alpha_0 = \frac{3m}{2} + 4, \quad NK: \beta_0 + \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad QF: \beta_0 + \alpha_0 = \frac{m}{2} + 2$$

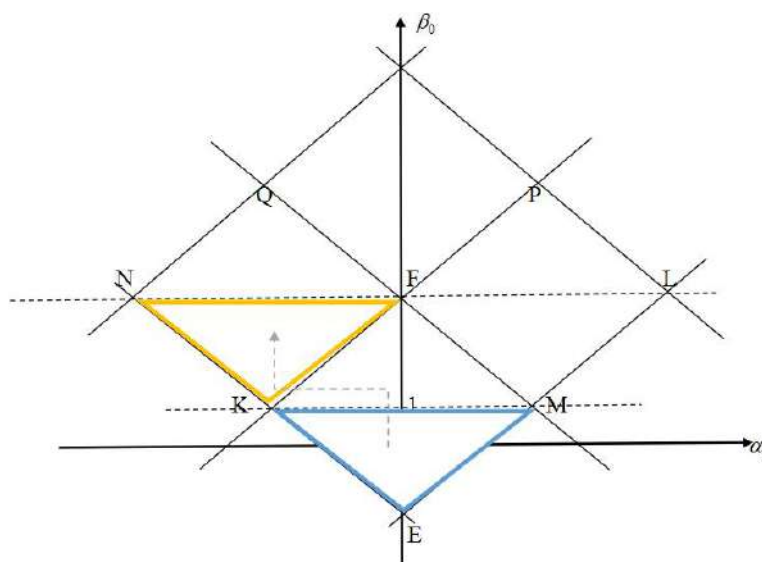


Figure 3

It is known that the general solution (6) of equation (3) in the triangle KEM is known, and if we transform to the variables (ξ, η) , this solution takes the form (10).

Based on property (14), if we take the derivative with respect to the argument $E_{\alpha, \beta}(U) = 0$ from the general solution (10) of equation η , we determine the form of the general solution of equation (13):

$$\begin{aligned}
U_{\eta}(\xi, \eta) = & \int_0^1 \varphi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{\beta} (1-t)^{\alpha-1} dt + \\
& + \frac{m+2}{4} \frac{2(1-\beta_0)}{m+2} (1-\alpha-\beta)(\eta-\xi)^{-\alpha-\beta} \int_0^1 \psi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{-\alpha} (1-t)^{-\beta} dt + \\
& + \frac{m+2}{4} \frac{2(1-\beta_0)}{m+2} (\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta} \int_0^1 \psi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{1-\alpha} (1-t)^{-\beta} dt.
\end{aligned}$$

Returning to the variables (x, y) and performing the substitution $\beta = \beta_1 - 1$, the general solution of equation (12) when the point (α_0, β_0) lies in the triangle NKF and its parameters are $1 < \alpha + \beta_1 < 3$, $1 < \beta_0 < \frac{m}{2} + 2$ takes the following form:

$$\begin{aligned}
U(x, y) = & \int_0^1 \varphi_1(z) t^{\beta_1-1} (1-t)^{\alpha-1} dt + \frac{1-\beta_0}{2} (-y)^{-\beta_0-\frac{m}{2}} \int_0^1 \psi(z) t^{-\alpha} (1-t)^{1-\beta_1} dt + \\
& + (-y)^{1-\beta_0} \int_0^1 \psi_1(z) t^{1-\alpha} (1-t)^{1-\beta_1} dt. \quad (15)
\end{aligned}$$

Here $\varphi_1(z) = \varphi(z)$, $\psi_1(z) = \psi(z)$ and $\varphi_1(z), \psi_1(z) \in C^3$ are arbitrary functions.

Now, in the domain D , consider the following hyperbolic type equation with singular coefficients:

$$-(-y)^m U_{xx} + U_{yy} + \frac{\alpha_0 - \frac{m+2}{2}}{(-y)^{1-m/2}} U_x + \frac{\beta_0 - \frac{m+2}{2}}{y} U_y = 0. \quad (16)$$

The characteristics of this equation are also defined in the form (2).

Assume that the parameters of equation (16) satisfy the following conditions:

$$m > -2, \quad -m-1 < \beta_0 < -\frac{m}{2}, \quad -m-2 < \alpha_0 < 0.$$

If we transform equation (16) to characteristic coordinates, it takes the following form:

$$U_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta - \xi} U_{\xi} - \frac{\alpha_2}{\eta - \xi} U_{\eta} = 0, \quad (17)$$

where $\alpha_2 = \alpha - 1$ and the parameters α, β are determined by equalities (4).

We obtain the general solution of equation (16) by applying the following property to the general solution (6) of the Euler-Darboux equation (3):

$$z(\alpha - m, \beta - n) = (\eta - \xi)^{m+n+1-\alpha-\beta} \frac{\partial^{m+n}}{\partial \xi^n \partial \eta^m} \frac{z(\alpha, \beta)}{(\eta - \xi)^{1-\alpha-\beta}}. \quad (18)$$

From (18), when $m = 1, n = 0$, the following formula follows:

$$z(\alpha - 1, \beta) = (\eta - \xi)^{2-\alpha-\beta} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{z(\alpha, \beta)}{(\eta - \xi)^{1-\alpha-\beta}}. \quad (19)$$

Thus, applying property (19), we find the general solution of equation (3) when $\alpha \in (-1, 0)$ and $\beta \in (0, 1)$, i.e., the general solution of equation (17). Then the following system of inequalities is obtained for the parameters:

$$-\frac{3m}{2} < \beta_0 + \alpha_0 < -\frac{m}{2},$$

$$-\frac{m}{2} < \beta_0 - \alpha_0 < \frac{m}{2} + 2.$$

The set of solutions of this system consists of a rectangle $RKEX$ bounded by the straight lines (Figure 4):

$$KR: \beta_0 - \alpha_0 = \frac{m}{2} + 2, \quad KE: \beta_0 - \alpha_0 = \frac{m}{2} + 2, \quad KE: \beta_0 + \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad RX: \beta_0 + \alpha_0 = -\frac{3m}{2} - 2$$

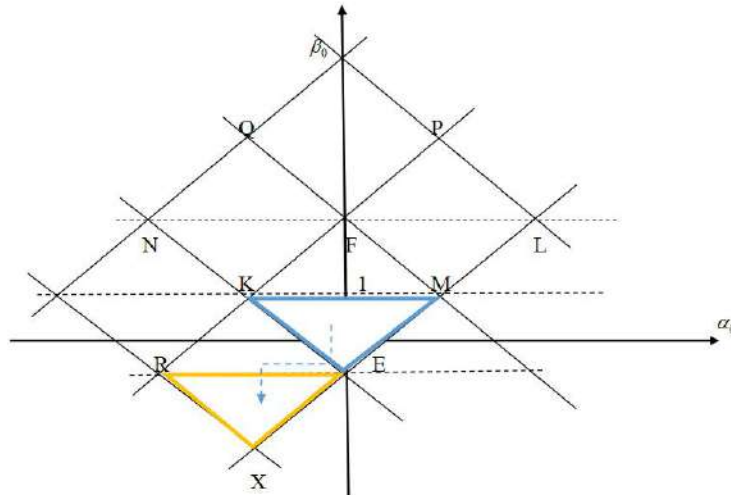


Figure 4

Based on property (19), using the general solution of equation $E_{\alpha,\beta}(U)=0$, we determine the form of the general solution of equation (17), i.e., equation $E_{\alpha-1,\beta}(U)=0$, as follows:

$$\begin{aligned} (\eta - \xi)^{2-\alpha-\beta} (\eta - \xi)^{\alpha+\beta-1} U(\xi, \eta) &= (\alpha + \beta - 1) \int_0^1 \varphi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt + \\ &+ (\eta - \xi) \int_0^1 \varphi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{\beta} (1-t)^{\alpha-1} dt + \\ &+ \frac{m+2}{4} \frac{2(1-\beta_0)}{m+2} (\eta - \xi)^{1-\alpha-\beta} (\eta - \xi) \int_0^1 \psi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{1-\alpha} (1-t)^{-\beta} dt. \end{aligned}$$

Returning to the variables (x, y) and performing the substitution $\alpha = \alpha_2 + 1$, the general solution of equation (16) when $(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta RXE$ and its parameters are $-1 < \alpha_2 + \beta < 0$, $-m-1 < \beta_0 < -\frac{m}{2}$ takes the following form:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -\frac{2(1-\beta_0)}{m+2} \int_0^1 \varphi(z) t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha_2} dt + \\ &+ \frac{4}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} \int_0^1 \varphi_1(z) t^{\beta} (1-t)^{\alpha_2} dt + \frac{4}{m+2} (-y)^{\frac{4-2\beta_0+m}{2}} \int_0^1 \psi_1(z) t^{-\alpha_2} (1-t)^{-\beta} dt. \quad (20) \end{aligned}$$

Here $\varphi_1(z) = \varphi(z)$, $\psi_1(z) = \psi(z)$ and $\varphi_1(z), \psi_1(z) \in C^3$ are arbitrary functions.

Now, in the domain D , let the following hyperbolic type equation with singular coefficients be given:

$$-(-y)^m U_{xx} + U_{yy} + \frac{\alpha_0 + \frac{m+2}{2}}{(-y)^{1-m/2}} U_x + \frac{\beta_0 - \frac{m+2}{2}}{y} U_y = 0. \quad (21)$$

It can be shown that the characteristics of equation (21) are also defined in the form (2), and the parameter appearing in the equation satisfies the following conditions:

$$m > -2, \quad -m-1 \leq \beta_0 < -m/2, \quad 0 < \alpha_0 < m+2.$$

When equation (21) is transformed to characteristic coordinates, it takes the following form:

$$U_{\xi\eta} + \frac{\beta_2}{\eta - \xi} U_\xi - \frac{\alpha}{\eta - \xi} U_\eta = 0, \quad (22)$$

where $\beta_2 = \beta - 1$ and the parameters α, β are determined by equalities (4).

We determine the solution of equation (22) using the general solution (6) of the Euler-Darboux equation (3) in the triangle KEM and its property (18).

Consider the case $m = 0, n = 1$:

$$z(\alpha, \beta - 1) = (\eta - \xi)^{2-\alpha-\beta} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{z(\alpha, \beta)}{(\eta - \xi)^{1-\alpha-\beta}}. \quad (23)$$

Thus, based on property (23), the intervals of the parameters change, i.e., when $\alpha \in (0, 1)$ and $\beta \in (-1, 0)$, it represents the following domain, and the following system of inequalities is obtained:

$$\begin{aligned} -\frac{m}{2} < \beta_0 + \alpha_0 < \frac{m}{2} + 2, \\ -\frac{m}{2} < \beta_0 - \alpha_0 < -\frac{3m}{2} - 2. \end{aligned}$$

The set of solutions of this system consists of a rectangle $EMYS$ bounded by the straight lines (Figure 5):

$$EM : \beta_0 - \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad YS : \beta_0 - \alpha_0 = -\frac{3m}{2} - 2, \quad EY : \beta_0 + \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad MS : \beta_0 + \alpha_0 = \frac{m}{2} + 2$$

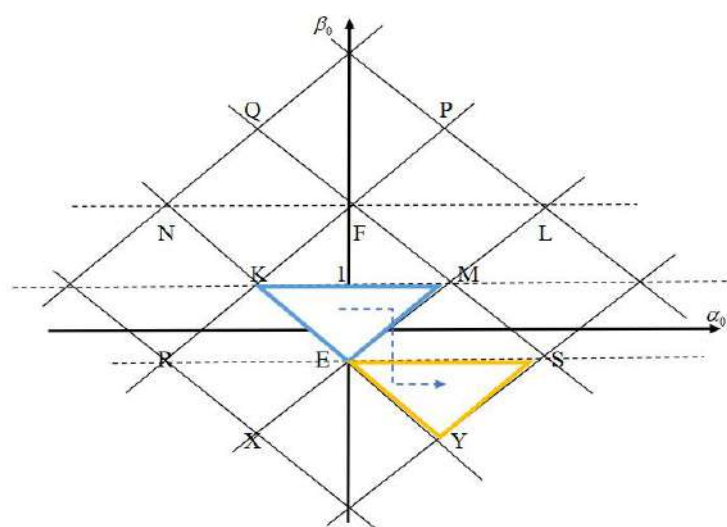


Figure 5

It is known to us that for equation (3), when the point (α_0, β_0) lies in the triangle KEM and its parameters are $0 < \alpha, \beta < 1, 0 < \alpha + \beta < 1$ and $\beta_0 < 1$, the general

solution has the form (6). Transforming to the variable (ξ, η) , the general solution is defined in the form (10). Based on property (23), using the general solution of equation $E_{\alpha, \beta}(U) = 0$, we determine the form of the general solution of equation $E_{\alpha, \beta-1}(U) = 0$:

$$\begin{aligned} (\eta - \xi)^{2-\alpha-\beta} (\eta - \xi)^{\alpha+\beta-1} U(\xi, \eta) = & -(\alpha + \beta - 1) \int_0^1 \varphi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt + \\ & + (\eta - \xi) \int_0^1 \varphi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha} dt + \\ & + \frac{m+2}{4} \frac{2(1-\beta_0)}{m+2} (\eta - \xi)^{1-\alpha-\beta} (\eta - \xi) \int_0^1 \psi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{-\alpha} (1-t)^{1-\beta} dt. \end{aligned}$$

Transforming to the variables (x, y) and performing the substitution $\beta = \beta_2 + 1$, the general solution of equation (21) when the point (α_0, β_0) lies in the triangle EYS and its parameters are $-1 < \alpha + \beta_2 < 0$, $-m-1 < \beta_0 < -\frac{m}{2}$ takes the following form:

$$\begin{aligned} U(x, y) = & \frac{2(1-\beta_0)}{m+2} \int_0^1 \varphi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{\beta_2} (1-t)^{\alpha-1} dt + \\ & + \frac{4}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} \int_0^1 \varphi_1(\xi + (\eta - \xi)t) t^{\beta_2} (1-t)^{\alpha} dt + \\ & + \frac{4}{m+2} (-y)^{\frac{4-2\beta_0+m}{2}} \int_0^1 \psi_1(\xi + (\eta - \xi)t) t^{-\alpha} (1-t)^{-\beta_2} dt, \end{aligned} \quad (24)$$

where $\varphi_1(z) = \varphi(z)$, $\psi_1(z) = \psi(z)$ and $\varphi_1(z), \psi_1(z) \in C^3$ are arbitrary functions.

IV. CONCLUSION

In this paper, the problem of determining general solution formulas for a class of hyperbolic differential equations with singular coefficients was studied. In the research process, the considered equations were transformed to characteristic coordinates and reduced to the Euler-Darboux type equation. Using known properties and general solution formulas of the Euler-Darboux equation, general solutions for hyperbolic equations with singular coefficients were obtained.

Furthermore, the existence conditions of solutions for various values of the parameters were determined, and their domains were geometrically represented in the parameter plane. The obtained results allowed us to determine general solution formulas for the considered class of equations and helped to establish necessary conditions for the parameters.

The research results contribute to the further development of the theory of hyperbolic type differential equations and can be applied in mathematical modeling problems of gas dynamics, wave theory, and other physical processes.

REFERENCES

- [1]. M.S. Salohiddinov, A.K. Urinov. Гиперболик типдаги бузиладиган дифференциал тенгламалар. Fergana State University Press. 2005. 175 бет.
- [2]. Urinov A.K. Monograph. К теории уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу. Fergana: "Fergana" --- 2015.

Bir jinsli bo'lmagan buziladigan giperbolik tipdagi tenglama uchun aralash masala

M.S. Azizov¹, M.Z. Obidjonova²

¹Farg'ona davlat universiteti

²Andijon davlat universiteti

Annotasiya. Mazkur ishda to'g'ri to'rtburchakli sohada **giperbolik tipdagi buziladigan tenglama uchun aralash masala** ko'rib chiqilgan. Bu yerda boshlang'ich shartlardan biri sifatida noma'lum funksiyaning birinchi tartibli vaqt bo'yicha hosilasi vazn bilan berilgan bo'lib, bu holat an'anaviy masalalardan farq qiladi. Masalani yechish uchun **Furye usuli** qo'llanilgan. Ushbu yondashuv yordamida yechim trigonometrik qator ko'rinishida ifodalanadi va Furye koeffitsientiga mos singulyar koeffitsiyentli oddiy differensial tenglama yechiladi. Qo'yilgan masalaning yechimi yagona va mavjudligi isbotlanadi.

Kalit so'zlar: giperbolik tip, boshlang'ich shart, chegaraviy shart, Furye usuli, xos son va xos funksiyalar, Bessel funksiyasi, Furye qatori.

Аннотация. В работе исследуется смешанная задача для вырождающегося уравнения гиперболического типа в прямоугольной области. Особенностью постановки задачи является то, что одно из начальных условий задаётся взвешенной первой производной неизвестной функции по времени, что отличает её от классических задач данного типа. Для решения применяется метод Фурье, позволяющий представить решение в виде тригонометрического ряда. В результате для коэффициентов Фурье получено обыкновенное дифференциальное уравнение с сингулярным коэффициентом. На основе проведённого анализа доказываются существование и единственность решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: гиперболический тип, начальное условие, граничное условие, метод Фурье, собственное число и собственные функции, функция Бесселя, ряд Фурье.

Abstract. This study addresses a mixed problem for a degenerate hyperbolic equation posed in a rectangular domain. The problem formulation is distinguished by an initial condition involving a weighted first-order time derivative of the unknown function, which departs from classical formulations. The solution is constructed using the Fourier method, leading to a trigonometric series representation. The Fourier coefficients satisfy an ordinary differential equation with a singular coefficient. The analysis establishes the existence and uniqueness of the solution.

Keywords: hyperbolic type, initial condition, boundary condition, Fourier method, eigenvalue and eigenfunctions, Bessel function, Fourier series.

I.Kirish

Singulyar va buziladigan koeffitsientlarga ega bo'lgan xususiy hosilali differensial tenglamalar matematik fizikaning dolzarb yo'nalishlaridan biri bo'lib, ular notekis muhitlarda to'liq jarayonlari, elastiklik nazariyasi, akustika hamda issiqlik almashinuvi jarayonlarini modellashtirishda keng qo'llaniladi. Bunday tenglamalarda koeffitsientlarning vaqt yoki fazo o'zgaruvchisi bo'yicha singulyar xatti-harakati yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va silliqqligi masalalarini klassik modellarga nisbatan sezilarli darajada murakkablashtiradi [1,2].

Vaqt bo'yicha singulyar operatorlarni o'z ichiga olgan giperbolik tenglamalar sinfi Eyler-Puasson-Darbu tipidagi tenglamalarning umumlashmalari sifatida qaraladi. Ushbu tenglamalar uchun boshlang'ich va chegaraviy masalalarni o'rganish Bessel operatorlari bilan bog'liq bo'lib, yechimlarning vaqt boshidagi xatti-harakatini to'g'ri tavsiflashni talab qiladi. Mazkur yo'nalishda olib borilgan klassik tadqiqotlar keyingi zamonaviy ishlarga

mustahkam nazariy asos bo'lib xizmat qilgan [3,4].

So'nggi o'n yillikda vaqt bo'yicha singulyar koeffitsientli giperbolik tenglamalar uchun Koshi va boshlang'ich-chegaraviy masalalarni o'rganishga bag'ishlangan bir qator muhim natijalar e'lon qilindi. Jumladan, Eyler-Puasson-Darbu tipidagi tenglamalar uchun ko'p o'lchamli umumlashmalar, maxsus yechimlar va ularning xossalari zamonaviy analitik usullar yordamida tadqiq etildi [5,6]. Ushbu ishlarda spektral metodlar hamda integral almashtirishlar keng qo'llanilgan.

Singulyar koeffitsientli va Bessel tipidagi operatorlar ishtirok etgan giperbolik tenglamalar nazariyasi hozirgi kunda ham faol rivojlanmoqda. Xususan, so'nggi yillarda yuqori o'lchamli psevdogiperbolik va buziladigan tenglamalar uchun yechimlarning mavjudligi, barqarorligi va sifat xossalriga oid natijalar olingan [7,8]. Bu tadqiqotlar singulyar operatorli modellarni amaliy masalalarda qo'llash imkoniyatlarini sezilarli darajada kengaytirdi.

Aralash tipdagi tenglamalar uchun Trikom–Neymann masalalari singulyar koeffitsientlar mavjud bo‘lgan hollarda alohida ahamiyatga ega. Ushbu yo‘nalishda so‘nggi yillarda olingan natijalar uch o‘lchamli singulyar koeffitsientli tenglamalar uchun korrektilik va yechimlarning sifat xossalarini aniqlashga imkon berdi [9-10]. Bu ishlar bir o‘lchamli hol uchun qo‘yiladigan boshlang‘ich–chegaraviy masalalarni o‘rganishda muhim metodologik asos bo‘lib xizmat qiladi.

II. Asosiy qism

$\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ sohada

$$t^{-2\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left(t^{2\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 < \gamma < 1/2 \quad (1)$$

tenglamani qaraylik.

A-masala. Ω sohada (1) tenglamani qanoatlantiruvchi va

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{2\gamma} u_t(x, t) = f_2(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (2)$$

boshlang‘ich shartlarni hamda

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

chegaraviy shartlarni bajaruvchi $u(x, t) \in C(\bar{\Omega})$ funksiya topilsin, bu yerda $f_1(x)$ va $f_2(x)$ berilgan funksiyalar.

1-teorema. Agar A-masalaning yechimi mavjud bo‘lsa, u yagonadir.

Isbot. Teskarisidan faraz qilaylik. A-masala ikkita $u_1(x, t)$ va $u_2(x, t)$ yechimlarga ega bo‘lsin. Bu yechimlarning ayirmasi bir jinsli (1) tenglamani va (2), (3) shartlarga mos bir jinsli boshlang‘ich va chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. Bu ayirmani $u(x, t)$ bilan belgilaymiz, ya’ni

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t). \quad (4)$$

Ma’lumki,

$$X_0(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \sqrt{\lambda_k} x, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

funksiya $L_2(0, l)$ fazoda to‘la ortonormallangan sistemani tashkil etadi [11].

Quyidagi

$$d_k(t) = \int_0^l u(x, t) X_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

funksiyani qaraymiz. (6) funksiyani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$d_{k,\varepsilon}(t) = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x, t) X_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

bunda $(\varepsilon, l - \varepsilon) \neq \emptyset$.

(7) funksiyani t bo‘yicha bir va ikki marta differensiallab quyidagi natijani olamiz:

Mazkur maqola vaqt bo‘yicha singulyar operatorli giperbolik tenglama uchun Neymann tipdagi chegaraviy shartlar ostida qo‘yilgan boshlang‘ich–chegaraviy masalani o‘rganishga bag‘ishlangan. Qaralayotgan masala klassik tor tebranish tenglamasi holini o‘z ichiga olgan umumlashtirilgan model bo‘lib, olingan natijalar singulyar koeffitsientli giperbolik tenglamalar nazariyasini rivojlantirishga xizmat qiladi.

$$d'_{k,\varepsilon}(t) = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_t(x,t) X_k(x) dx, \quad d''_{k,\varepsilon}(t) = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{tt}(x,t) X_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(1) tenglamani e'tiborga olib

$$d''_{k,\varepsilon}(t) + \frac{2\gamma}{t} d'_{k,\varepsilon}(t) = a^2 \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx}(x,t) X_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

(8) tenglikni hosil qilamiz. (8) tenglikning o'ng tomonini ikki marta bo'laklab integrallab, so'ng $\varepsilon \rightarrow 0$ da limitga o'tamiz.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[d''_{k,\varepsilon}(t) + \frac{2\gamma}{t} d'_{k,\varepsilon}(t) \right] = a^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[X_k(l-\varepsilon) u_x(l-\varepsilon, t) - X_k(\varepsilon) u_x(\varepsilon, t) \right] -$$

$$-a^2 \sqrt{\lambda_k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[X'_k(l-\varepsilon) u(l-\varepsilon, t) - X'_k(\varepsilon) u(\varepsilon, t) \right] - a^2 \lambda_k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t) X_k(x) dx$$

(3) ga mos bir jinsli shartlar hamda $X_k(x)$ funksiyaning xossalriga asosan quyidagi natija kelib chiqadi:

$$d''_{k,\varepsilon}(t) + \frac{2\gamma}{t} d'_{k,\varepsilon}(t) = -a^2 \lambda_k \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t) X_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(6) ni e'tiborga olib quyidagi oddiy differensial tenglamaga kelimiz:

$$d''_k(t) + \frac{2\gamma}{t} d'_k(t) + a^2 \lambda_k d_k(t) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

(2) shartga mos bir jinsli shartdan (6) ga asosan

$$d_k(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{2\gamma} d'_k(t) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

boshlang'ich shartlarni hosil qilamiz.

Ma'lumki, (9) oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda aniqlanadi [9]:

$$d_k(t) = A_k t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_k} at) + B_k t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_k} at), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

A_k va B_k - o'zgarmas sonlar. $k = 0$ bo'lsin, u holda (9) tenglamadan

$$d''_0(t) + \frac{2\gamma}{t} d'_0(t) = 0 \quad (12)$$

tenglama hosil bo'ladi. (12) tenglamaning umumiy yechimi

$$d_0(t) = A_0 t^{1-2\gamma} + B_0 \quad (13)$$

ko'rinishida aniqlanadi.

(11) va (12) umumiy yechimlarni (10) shartlarga bo'ysundirib $A_k = B_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ ga ega bo'lamiz, ya'ni barcha $\forall t \in [0, T]$ uchun $d_k(t) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. U holda (6) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\int_0^l u(x,t) X_k(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Demak, $u(x,t)$ funksiya (5) to'la ortonormal sistemadagi barcha funksiyalar bilan ortogonal ekan.

Bu esa Ω sohaning deyarli barcha nuqtalarida $u(x,t) = 0$ ekanligini bildiradi. $u(x,t) \in C(\bar{\Omega})$

ekanligidan $u(x, t)$ funksiya $\bar{\Omega}$ sohaning barcha nuqtalarida $u(x, t) \equiv 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan ko‘rinadiki, A- masalaning yechimi mavjud bo‘lsa u yagonadir. 1-teorema isbotlandi.

A masala yechimining mavjudligi.

2-teorema: Agar $f_1(x) \in C^2[0, l] \cap C^3(0, l)$, $f_1^{(3)}(x) \in L_2(0, l)$,
 $f_2(x) \in C^2[0, l] \cap C^3(0, l)$, $f_2^{(3)}(x) \in L_2(0, l)$,
 $f(x, t) \in C_{x,t}^{2,0}((0, l) \times [0, l]) \cap C_{x,t}^{3,0}([0, l] \times [0, l])$, $f^{(3)}(x, t) \in L_2(0, l)$;
 $f_1'(0) = f_1'(l) = 0$, $f_1''(0) = f_1''(l) = 0$; $f_2'(0) = f_2'(l) = 0$, $f_2''(0) = f_2''(l) = 0$;
 $f'(0, t) = f'(l, t) = f'''(0, t) = f'''(l, t) = 0$ shartlar bajarilsa, qo‘yilgan masalaning yechimi mavjud.

Isbot. Bu masalani yechish uchun o‘zgaruvchilarni ajratish (yoki Furiye) usuli qo‘llaymiz. Avvalo (1) tenglamaning (3) shartlarini bajaruvchi yechimini

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (14)$$

ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda $X(x)$ va $T(t)$ noma’lum funksiyalar. (14) ifodani (1) tenglamaga qo‘yib, o‘zgaruvchilarni ajratib

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} + \frac{2\gamma}{t} \frac{T'(t)}{T(t)},$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglikning chap tomoni faqat X ga, o‘ng tomoni esa faqat t bog‘liq. Bundan ko‘rinadiki bu tenglik o‘zgarmas sonni ifodalaydi. Bu o‘zgarmas sonni $-\lambda$ deb belgilab, hosil bo‘lgan tenglikdan $X(x)$ va $T(t)$ funksiyalarga bog‘liq oddiy differensial tenglamalarni hosil qilamiz:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (15)$$

$$T''(t) + \frac{2\gamma}{t} T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0,$$

(14) ga asosan (3) shartlardan $X'(x) = 0$, $X'(l) = 0$ shartlarni hosil qilamiz. (15) tenglamaning umumiy yechimi

$$X(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x$$

ko‘rinishida aniqlanadi, bu yerda C_1 va C_2 - const.

$X(x)$ funksiyani $X'(0) = 0$, $X'(l) = 0$ shartlarga bo‘ysundirib

$$X_k(x) = C_2 \cos \sqrt{\lambda_k} x, \quad \lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{l^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

funksiyani topamiz. $X_k(x)$ ni normallashtirib $C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}$, $k \in N$ da va $k = 0$ da $C_2 = \frac{1}{\sqrt{l}}$

ekanligini topamiz. (16) ifoda (5) ifodaga keladi.

Endi A masalaning yechimini quyidagi funksional qator ko‘rinishida qidiramiz:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} T_k(t) X_k(x), \quad (17)$$

bu yerda $T_k(t)$, $k \in N$ - hozircha noma’lum funksiya.

(17) funksiyani (1) tenglamaga qo‘yib

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left[T_k''(t) + \frac{2\gamma}{t} T_k'(t) + a^2 \lambda_k T_k(t) \right] X_k(x) = f(x, t),$$

tenglikni hosil qilamiz.

(1) tenglamaning o'ng tomonidagi $f(x, t)$ funksiyani $\{X_k(x)\}$ sistema yordamida Furiye qatoriga yoyamiz

$$f(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) X_k(x) \quad (18)$$

bu yerda

$$f_k(t) = \int_0^l f(x, t) X_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

(18) dan foydalanib $T_k(t)$ funksiyaga nisbatan quyidagi differensial tenglamani olamiz:

$$T_k''(t) + \frac{2\gamma}{t} T_k'(t) + a^2 \lambda_k T_k(t) = f_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

(20) tenglamani o'zgarmaslarni variatsiyalash usuli bilan yechib, umumiy yechimini quyidagi ko'rinishda topamiz:

$$\begin{aligned} T_k(t) = & A_k t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}t) + B_k t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(a\sqrt{\lambda_k}t) + \\ & + \frac{\pi J_{1/2-\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}t)}{2 \cos \gamma \pi} \int_0^t J_{-1/2+\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}\tau) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma} \tau f_k(\tau) d\tau - \\ & - \frac{\pi J_{\gamma-1/2}(a\sqrt{\lambda_k}t)}{2 \cos \gamma \pi} \int_0^t J_{1/2-\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}\tau) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma} \tau f_k(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (21)$$

bu yerda A_k va B_k - ixtiyoriy o'zgarmaslar.

$k = 0$ bo'lganda (20) tenglama quyidagi shaklni oladi:

$$T_0''(t) + \frac{2\gamma}{t} T_0'(t) = f_0(t).$$

Oxirgi tenglamaning umumiy yechimi

$$T_0(t) = \frac{t^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} A_0 + B_0 + \frac{1}{1-2\gamma} \int_0^t (t^{1-2\gamma} - \tau^{1-2\gamma}) \tau^{2\gamma} f_0(\tau) d\tau \quad (22)$$

ko'rinishda aniqlanadi, bu yerda A_0 va B_0 - ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

(22) va (21) funksiyalarni (17) qatorga qo'yib quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \left[\frac{t^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} A_0 + B_0 + \frac{1}{1-2\gamma} \int_0^t (t^{1-2\gamma} - \tau^{1-2\gamma}) \tau^{2\gamma} f_0(\tau) d\tau \right] \frac{1}{\sqrt{l}} + \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}t) + B_k t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(a\sqrt{\lambda_k}t) + \right. \\ & \left. + \frac{\pi J_{1/2-\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}t)}{2 \cos \gamma \pi} \int_0^t J_{-1/2+\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}\tau) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma} \tau f_k(\tau) d\tau - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{\pi J_{\gamma-1/2}\left(a\sqrt{\lambda_k}t\right)}{2\cos\gamma\pi}\int_0^t J_{1/2-\gamma}\left(a\sqrt{\lambda_k}\tau\right)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma}\tau f_k(\tau)d\tau\Bigg]X_k(x) \quad (23)$$

A_0, B_0, A_k, B_k -noma'lum koefitsientlarni topish uchun (2) shartlardan foydalanamiz. (23) yechimni (2) boshlang'ich shartlarga bo'ysundirib noma'lum koefitsientlarni topamiz:

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_0^l f_2(x) dx, \quad (24) \quad B_0 = \int_0^l f_1(x) dx, \quad (25)$$

$$A_k = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \gamma\right) \left(\frac{a\sqrt{\lambda_k}}{2}\right)^{-1/2+\gamma} \int_0^l f_2(x) X_k(x) dx, \quad (26)$$

$$B_k = \Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{a\sqrt{\lambda_k}}{2}\right)^{1/2-\gamma} \int_0^l f_1(x) X_k(x) dx. \quad (27)$$

Topilgan A_0, B_0, A_k, B_k larni (23) qatorga qo'yib quyidagini topamiz:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \left[\frac{t^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} A_0 + B_0 + \frac{1}{1-2\gamma} \int_0^t (t^{1-2\gamma} - \tau^{1-2\gamma}) \tau^{2\gamma} f_0(\tau) d\tau \right] \frac{1}{\sqrt{l}} + \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \gamma\right) \left(\frac{a\sqrt{\lambda_k}}{2}\right)^{-1/2-\gamma} t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}t) + \right. \\ & \quad \left. + b_k \Gamma\left(\gamma + 1/2\right) \left(\frac{a\sqrt{\lambda_k}}{2}\right)^{1/2-\gamma} t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(a\sqrt{\lambda_k}t) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\pi J_{1/2-\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}t)}{2\cos\gamma\pi} \int_0^t J_{-1/2+\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}\tau) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma} \tau f_k(\tau) d\tau - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\pi J_{\gamma-1/2}(a\sqrt{\lambda_k}t)}{2\cos\gamma\pi} \int_0^t J_{1/2-\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}\tau) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma} \tau f_k(\tau) d\tau \right] X_k(x), \quad (28) \end{aligned}$$

$$a_k = \int_0^l f_2(x) X_k(x) dx, \quad (29)$$

$$b_k = \int_0^l f_1(x) X_k(x) dx. \quad (30)$$

Natijada A masalaning yechimi (28) ko'rinishida ifodalanadi, bu yerda $A_0, B_0, a_k, b_k, f_k(t)$ lar mos ravishda (24), (25), (29), (30) va (19) formulalar bilan aniqlanadi.

Lemma. $\forall t \in [0, T]$ va $k = 1, 2, \dots$ bo'lganda quyidagi baholar o'rinli bo'ladi:

$$|T_0(t)| \leq \frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} A_0 + B_0 + \frac{2T\sqrt{T}}{1-2\gamma} \|f_0(\tau)\|_{L_2(0,T)}, \quad (31)$$

$$|t^{2\gamma} T_0'(t)| \leq A_0 + T^{2\gamma} \sqrt{T} \|f_0(\tau)\|_{L_2(0,T)}, \quad (32)$$

$$\left| t^{-2\gamma} \left(t^{2\gamma} T_0'(t) \right) \right| \leq \|f_0(\tau)\|_{C(0,T)}, \quad (33)$$

$$|T_k(t)| \leq a_k \frac{1}{1-2\gamma} T^{1-2\gamma} \frac{a\sqrt{\lambda_k}}{2} + b_k + \frac{2T\sqrt{T}}{1-2\gamma} \|f_k(\tau)\|_{L_2(0,T)}, \quad (34)$$

$$\left| t^{2\gamma} T_k'(t) \right| \leq a_k + b_k T \left(\frac{a^2 \lambda_k}{2} \right) + \frac{2a^2 \lambda_k T^{2+2\gamma}}{1-4\gamma^2} \|f_k(\tau)\|_{L_2(0,T)}, \quad (35)$$

$$\left| t^{-2\gamma} \left(t^{2\gamma} T_k'(t) \right)' \right| \leq a_k \frac{2}{1-2\gamma} T^{1-2\gamma} \frac{a^3 \lambda_k \sqrt{\lambda_k}}{2} + b_k a^2 \lambda_k + \frac{2T\sqrt{T}}{1-2\gamma} a^2 \lambda_k \|f_k(\tau)\|_{L_2(0,T)} + \|f_k(\tau)\|_{C(0,T)}, \quad (36)$$

bu yerda A_0, B_0, a_k, b_k - o'zgarmas sonlar.

Isbot. (22) ni quyidagi ko'rinishda yozib olib,

$$|T_0(t)| \leq \left| \frac{t^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} A_0 \right| + |B_0| + \left| \frac{1}{1-2\gamma} \int_0^t (t^{1-2\gamma} - \tau^{1-2\gamma}) \tau^{2\gamma} f_0(\tau) d\tau \right|$$

t ni T ga almashtirib, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalanib, quyidagi bahoni olamiz:

$$\begin{aligned} |T_0(t)| &\leq \left| \frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} A_0 \right| + |B_0| + \left| \frac{2T}{1-2\gamma} \sqrt{\int_0^T d\tau \int_0^T f_0^2(\tau) d\tau} \right| \leq \\ &\leq \frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} A_0 + B_0 + \frac{2T\sqrt{T}}{1-2\gamma} \|f_0(\tau)\|_{L_2(0,T)}. \end{aligned}$$

Shu tarzda (32) va (33) tengsizliklarni ham ko'rsatish mumkin.

$\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1) \times (z/2)^{-\nu} J_\nu(z)$ ya'ni Bessel-Klifford funksiyasi yordamida, (21) tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{aligned} T_k(t) &= A_k \frac{t^{1-2\gamma}}{1/2-\gamma} \left(\frac{a\sqrt{\lambda_k}}{2} \right) \bar{J}_{1/2-\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}t) + B_k \bar{J}_{\gamma-1/2}(a\sqrt{\lambda_k}t) + \frac{1}{1-2\gamma} \times \\ &\times \int_0^t \left[\left(\frac{t}{\tau} \right)^{1-2\gamma} \bar{J}_{1/2-\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}t) \bar{J}_{\gamma-1/2}(a\sqrt{\lambda_k}\tau) - \bar{J}_{\gamma-1/2}(a\sqrt{\lambda_k}t) \bar{J}_{1/2-\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}\tau) \right] \tau f_k(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

$(\nu > -1/2)$ bo'lganda $|\bar{J}_\nu(z)| \leq 1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Buni e'tiborga olib, oxirgi tenglikni quyidagicha baholaymiz:

$$\begin{aligned} |T_k(t)| &\leq \left| a_k \frac{t^{1/2-\gamma}}{1/2-\gamma} \left(\frac{a\sqrt{\lambda_k}}{2} \right)^{1/2-\gamma} \bar{J}_{1/2-\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}t) \right| + \left| b_k \bar{J}_{\gamma-1/2}(a\sqrt{\lambda_k}t) \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{1-2\gamma} \int_0^t \left[\left(\frac{t}{\tau} \right)^{1-2\gamma} \bar{J}_{1/2-\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}t) \bar{J}_{\gamma-1/2}(a\sqrt{\lambda_k}\tau) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \bar{J}_{\gamma-1/2}(a\sqrt{\lambda_k}t) \bar{J}_{1/2-\gamma}(a\sqrt{\lambda_k}\tau) \right] \tau f_k(\tau) d\tau \right|. \end{aligned}$$

Bunda ham t ni T ga almashtirib, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalanib va hosil bo'lgan tengsizlikdagi a_k va b_k koeffitsiyentlarning o'rniga mos holda (29) va (30) ko'rinishlarini qo'yib soddalashtirsak, (34) tengsizlikni hosil qilamiz. Shu tarzda (35) va (36) tengsizliklarni ham ko'rsatish mumkin. Lemma isbotlandi.

Endi (28) yechimni yaqinlashuvchi ekanligini tekshiramiz. Buning uchun unga majorant qator tuzamiz.

$$|u(x, t)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |T_k(t) X_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |T_k(t)|,$$

bu funksional qatorga (31) va (34) tengsizliklarni qo'yib va undagi o'zgaras sonlarni tashlab yuborib quyidagi sonli qatorni hosil qilamiz

$$\frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} A_0 + B_0 + \frac{2T\sqrt{T}}{1-2\gamma} \|f_0(\tau)\|_{L_2(0,T)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\sqrt{\lambda_k} a_k + b_k + \|f_k(\tau)\|_{L_2(0,T)} \right],$$

sonli qatorni hosil qilamiz.

(29) integralni ikki marta, (30) integralni bir marta bo'laklab integrallab $f_1(x)$, $f_2(x)$ funksiyalarga teoramada qo'yilgan shartlarni inobatga olsak

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{a_k^{(2)}}{\sqrt{\lambda_k}} + \frac{b_k^{(1)}}{\sqrt{\lambda_k}} \right] \quad (37)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k(\tau)\|_{L_2(0,T)} \quad (38)$$

qatorlar hosil bo'ladi, bu yerda

$$a_k^{(2)} = \int_0^l f_2''(x) X_k(x) dx, \quad b_k^{(1)} = \int_0^l f_1'(x) X_k(x) dx,$$

Hosil bo'lgan qatorlardan o'zgaras sonni tashlab yuborib

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} |f_{1k}^{(1)}| + \frac{1}{k} |f_{2k}^{(2)}| \right],$$

qatorlarni hosil qilamiz. Bu hosil bo'lgan qatorlar yaqinlashuvchi, chunki

$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi k}{l} x$ funksiyalar $(0, l)$ oraliqda ortonormal sistemanini tashkil etadi.

Shuning uchun har qanday $f \in L_2(0, l)$ uchun Parseval tengligi bajariladi:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k|^2 = \int_0^l f^2(x) dx = \|f_k\|_{L_2(0,l)}^2, \quad f_k = \int_0^l f(x) X_k(x) dx.$$

Bundan tashqari, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalanib,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 \right)^{1/2} = \|a_k\|_{L_2(0,l)} \|b_k\|_{L_2(0,l)},$$

bizning qatorlar uchun

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} |f_{1k}^{(1)}| \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |f_{1k}^{(1)}|^2 \right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|f_{1k}^{(1)}\|_{L_2(0,l)},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} |f_{2k}^{(2)}| \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |f_{2k}^{(2)}|^2 \right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|f_{2k}^{(2)}\|_{L_2(0,l)}.$$

Shu sababli, Parseval tengligi va Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi natijasida

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} |f_{1k}| + \frac{1}{k} |f_{2k}| \right) < \infty,$$

ya'ni qator yaqinlashuvchidir.

(19) ni bir marta integrallab va teoremadagi shartlarni inobatga olib $f(x, t)$ funksiyani

$$f_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} f_k^{(1)}(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (39)$$

bu yerda

$$f_k^{(1)}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \sin \sqrt{\lambda_k} x dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (40)$$

(39) tenglik orqali (38) ifodani quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \|f_k^{(1)}\|_{L_2(0, T)}.$$

Koshi–Bunyakovskiy tengsizligiga asoslanib, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \|f_k^{(1)}\|_{L_2(0, T)} \leq \sqrt{\frac{l^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \|f_k^{(1)}\|_{L_2(0, T)}^2}}.$$

Ohirgi tengsizlikning o'ng tomonidagi birinchi qator yaqinlashuvchi, ikkinchi qatorni yaqinlashuvchi ekanligini tekshiramiz. Ushbu maqsadda quyidagi ifodani qaraymiz

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{L_2(\Omega)} = \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(1)}(t) \sin \sqrt{\lambda_k} x, \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(1)}(t) \sin \sqrt{\lambda_m} x \right)_{L_2(\Omega)} = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^T \int_0^l \left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(1)}(t) \cos \sqrt{\lambda_k} x \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(1)}(t) \cos \sqrt{\lambda_m} x \right] dx dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left(f_k^{(1)}(t) \right)^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^{(1)}(t)\|_{L_2(0, T)}^2, \end{aligned}$$

.....

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^{(1)}(t)\|_{L_2(0, T)}^2 = \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (41)$$

Bundan esa (17) funksional qator $\bar{\Omega}$ sohada tekis va absolyut yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. Yuqoridagi jarayonni takrorlab

$$\left| t^{-2\gamma} \left(t^{2\gamma} T_k'(t) \right)' \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| t^{-2\gamma} \left(t^{2\gamma} T_k'(t) \right)' \right| |X_k(x)| \quad (42)$$

funksional qatorni tekis yaqinlashuvchilikka tekshiramiz. Buning uchun (42) ga (41) tengsizlikni qo'yib, $|X_k(x)| \leq 1$ tengsizlikni e'tiborga olib

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{a^3 \lambda_k \sqrt{\lambda_k}}{2} a_k + a^2 \lambda_k b_k + a^2 \lambda_k \|f_k(t)\|_{L_2(0, T)} \right]$$

sonli qatorni hosil qilamiz.

(29) integralni to'rt marta, (30) va (19) integrallarni uch marta bo'laklab integrallab $f_1(x)$, $f_2(x)$ va $f(x, t)$ funksiyalarga teoramada qo'yilgan shartlarni inobatga olib, o'zgarmlarni tashlab yuborib

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} |f_{1k}^{(3)}| + \frac{1}{k} |f_{2k}^{(4)}| + \frac{1}{k} \|f_k^{(3)}(t)\|_{L_2(0, T)} \right]$$

qator hosil bo‘ladi, bu yerda $f_{1k}^{(3)} = \int_0^l f_1^{(3)}(x) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi k}{l} x dx$,
 $f_{2k}^{(4)} = \int_0^l f_{2k}^{(4)}(x) \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi k}{l} x dx$, $f_k^{(3)}(t) = \int_0^l f'''(x, t) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi k}{l} x dx$. Bu hosil bo‘lgan
qator Parseval tengligi va Koshi–Bunyakovskiy tengsizligiga asosan yaqinlashuvchi. Bundan esa
 $t^{-2\gamma} (t^{2\gamma} T_k'(t))'$ ifodaga mos keladigan funksional qator $\bar{\Omega}$ sohada tekis va absolyut
yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

Yuqorida isbotlanganlardan quyidagilar kelib chiqadi:

har bir qator, (1)-tenglamaning hadlariga mos keluvchi funksional qatorlar $K \in \Omega$ kompakt
to‘plamda absolyut va tekis yaqinlashadi,

(23) funksional qator (1)-tenglamani qanoatlantiradi va (2), (3)-shartlarni bajaradi.

Demak, (17) funksional qator qo‘yilgan masalaning yechimi yechimi bo‘ladi.

Adabiyotlar

- [1]. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics. Vol. II.* Wiley, New York, 1962.
- [2]. Smirnov V.I. *A Course of Higher Mathematics. Vol. IV: Integral Equations and Partial Differential Equations.* Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [3]. Weinstein S. Singular solutions and the Cauchy problem for the Euler–Poisson–Darboux equation // *Proceedings of the Symposium on Pure Mathematics*, 1965.
- [4]. Keldysh M.V. On certain cases of degeneration of elliptic equations on the boundary of a domain // *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1951.
- [5]. Ryskan A., Arzikulov Z.O., Ergashev T.G. Particular solutions of multidimensional generalized Euler–Poisson–Darboux equations of elliptic–hyperbolic type // *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, 2024. DOI: 10.26577/JMMCS202412118.
- [6]. Karimov S., Bogdan A. Solution of the Cauchy problem for the multidimensional generalized Euler–Poisson–Darboux equation by the method of spherical means // *International Journal of Artificial Intelligence*, 2024.
- [7]. Azzaoui M., Bentout S., Mezouar N. Control and stabilization results for strongly coupled degenerate and singular wave equations // *Mathematical Control and Related Fields*, 2025. DOI: 10.3934/mcrf.2025057.
- [8]. Azizov M.S. A Boundary Problem for the Fourth Order Equation with a Singular Coefficient in a Rectangular Region // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, Vol. 41, No. 6, pp. 1043–1050. DOI:10.1134/S1995080220060050.
- [9]. Urinov A.K., Karimov K.T. The Tricomi–Neymann problem for a three-dimensional mixed-type equation with singular coefficients // *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, 2023, Vol. 25, No. 4, pp. 120–134.
- [10]. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics. Vol. I.* Wiley, New York, 1953.

Ikki quvuvchi va bir qochuvchi ishtirokida integral chegaralanishli chiziqli quvish-qochish o'yini.

S.O.G'ulomov¹, S.M.Zokirjonov²

*Qo'qon universiteti Andijon filiali, O'zbekiston, 170619, Andijan sh, Boburshox ko'chasi 2-B uy
Andijon davlat pedagogika instituti, O'zbekiston, 170000, Andijan sh, Do'stlik ko'chasi 4-uy*

Annotatsiya. Biz l_2 Hilbert fazosida ikkita quvuvchi P_1, P_2 va bitta qochuvchi E ishtirokidagi chiziqli quvish-qochish differensial o'yinini qaraymiz. O'yinchilarning boshqaruv funksiyalari integral cheklavlarga bo'ysunadi. O'yin davomiyligi belgilangan bo'lib, o'yin to'lovi yakuniy vaqtda qochuvchi bilan quvuvchilar orasidagi minimal masofa sifatida aniqlanadi. Quvuvchilar bu masofani minimallashtirishga, qochuvchi esa maksimallashtirishga harakat qiladi. Boshlang'ich vaziyatlarga qo'yilgan geometrik shart ostida o'yinchilarning optimal strategiyalarini quramiz va o'yin γ qiymatga ega ekanligini isbotlaymiz.

Kalit so'zlar: Differensial o'yin, qochuvchi, quvuvchilar, boshqaruv, strategiya, o'yinqiymati, integral chegara.

Аннотация: Рассмотрим линейную дифференциальную игру преследования-убегания с двумя преследователями P_1, P_2 и одним убегающим E в Гильбертовом пространстве l_2 . Управляющие функции игроков подчинены интегральным ограничениям. Продолжительность игры фиксирована, а выигрыш определяется как минимальное расстояние между убегающим и преследователями в конечный момент времени. Преследователи стремятся минимизировать это расстояние, а убегающий — максимизировать его. При геометрическом условии на начальные позиции мы строим оптимальные стратегии игроков и доказываем, что игра имеет цену γ .

Ключевые слова: Дифференциальная игра, убегающий, преследователи, управление, стратегия, цена игры, интегральное ограничение.

Abstract: We consider a linear pursuit-evasion differential game with two pursuers P_1, P_2 and one evader E in the Hilbert space l_2 . The control functions of the players are subject to integral constraints. The duration of the game is fixed, and the payoff is defined as the minimum distance between the evader and the pursuers at the terminal time. The pursuers try to minimize this distance, while the evader tries to maximize it. Under a geometric condition on the initial positions, we construct optimal strategies for the players and prove that the game has a value γ .

Key words: Differential game, evader, pursuers, control, strategy, game value, integral constraint.

I. Kirish.

Quvish-qochish differensial o'yinlari differensial o'yinlar nazariyasining muhim turlaridan biri sifatida qaraladi. Integral chegaralanishli quvish-qochish differensial o'yinlari [1, 6, 7, 11, 12] maqolalarda o'rganilgan. [2] maqolada inertial o'yinchilar ishtirokidagi, boshqaruvlari integral cheklavlarga bo'ysunadigan quvish-qochish differensial o'yinlari o'rganilgan. Asosiy natija sifatida quvish va qochish masalalarining yechilishi uchun yetarli shartlar keltirilgan hamda Isaacsning "hayot chizig'i" o'yini uchun o'yinchilarning uchrashish sohasini analitik ifodalovchi formula isbotlangan. Bu natijalar Isaacs, Petrosyan, Pshenichnyi, Azamov kabi olimlarning fundamental tadqiqotlariga tayangan holda rivojlantirilgan.

Ko'p quvuvchili quvish-qochish differensial o'yinlari ham differensial o'yinlar nazariyada alohida o'rin tutadi. Bu borada [3, 4, 5, 8, 9, 10]

maqolalarda O'zbekistonlik va xorijiy olimlarning ilmiy ishlari mavjud. Jumladan, [6] maqolada boshqaruvlariga geometrik chegaralanishli sanoqli quvuvchi va bir qochuvchili differensial o'yin tahlil qilingan. Boshlang'ich nuqtalarga qo'yilgan geometrik shart ostida o'yin qiymati γ ga teng ekanligi isbotlangan va optimal strategiyalar qurilgan. Mazkur maqolada chiziqli quvish-qochish differensial o'yini uchun qochuvchi va quvuvchilar uchun strategiyalar qurilgan bo'lib, o'yin qiymati γ ga teng ekanligi asoslab berilgan.

II. Masalaning qo'yilishi.

l_2 bilan cheksiz o'lchamli Hilbert fazosini belgilaymiz

$$l_2 = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty \right\},$$

skalyar ko'paytma $(\cdot, \cdot)$ va norma $\|\cdot\|$ odatdagidek aniqlanadi.

Ikki quvuvchi P_1, P_2 va bitta qochuvchi E ishtirokidagi quvish-qochish differensial o'yinini qaraymiz. O'yinchilarning harakati chiziqli dinamika bilan quyidagicha tasvirlanadi

$$\begin{aligned} P_1 &: \dot{x}_1 = -ax_1 + u_1, \quad x_1(0) = x_{10}, \\ P_2 &: \dot{x}_2 = -ax_2 + u_2, \quad x_2(0) = x_{20}, \\ E &: \dot{y} = -ay + v, \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \quad (1)$$

bu yerda $a > 0$, va $x_1, x_{10}, u_1, x_2, x_{20}, u_2, y, y_0, v \in L_2$.

O'yin davomiyligi $\theta > 0$ belgilangan. Quvuvchilarning boshqaruvlari $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$ va qochuvchining boshqaruvi $v(\cdot)$ $[0, \theta]$ vaqt davomida L_2 da berilgan Borel o'lchovli funksiyalar bo'lib, quyidagi integral cheklovlarni qanoatlantiradi

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \|u_1(t)\|^2 dt &\leq \rho_1^2, \quad \int_0^\theta \|u_2(t)\|^2 dt \leq \rho_2^2, \\ \int_0^\theta \|v(t)\|^2 dt &\leq \sigma^2, \end{aligned}$$

bunda ρ_1, ρ_2, σ berilgan musbat sonlar.

O'yin qiymati yakuniy θ vaqtda qochuvchi bilan quvuvchilar orasidagi minimal masofa sifatida aniqlanadi

$$\Phi(u_1(\cdot), u_2(\cdot), v(\cdot)) = \min\{\|x_1(\theta) - y(\theta)\|, \|x_2(\theta) - y(\theta)\|\}.$$

Quvuvchilar bu qiymatni minimallashtirishga, qochuvchi esa maksimallashtirishga intiladi.

Ta'rif 1. Borel o'lchovli $u_i : [0, \theta] \rightarrow L_2$ ($i = 1, 2$) (mos ravishda $v : [0, \theta] \rightarrow L_2$) funksiya quvuvchi P_i (mos ravishda qochuvchi E) uchun joiz boshqaruv deyiladi, agar u berilgan integral cheklovni qanoatlantirsa.

Agar o'yinchilar joiz boshqaruvlardan foydalansa, u holda (1) tenglamalarning yechimlari quyidagicha ifodalanadi

$$\begin{aligned} x_i(t) &= e^{-at} x_{i0} + \int_0^t e^{-a(t-s)} u_i(s) ds, \quad i = 1, 2, \\ y(t) &= e^{-at} y_0 + \int_0^t e^{-a(t-s)} v(s) ds. \end{aligned}$$

Ta'rif 2. $U_i : [0, \theta] \times L_2 \rightarrow L_2$ ($i = 1, 2$) funksiya quvuvchi P_i ning strategiyasi deyiladi, agar qochuvchining har bir joiz boshqaruvi $v(\cdot)$ uchun

$$\dot{x}_i = -ax_i + U_i(t, y(t)), \quad x_i(0) = x_{i0},$$

boshlang'ich shart masalasi $C(0, \theta; L_2)$ da yagona yechimga ega bo'lsa. U_i strategiyasi joiz deyiladi, agar har bir joiz $v(\cdot)$ uchun hosil qilingan $u_i(t) = U_i(t, y(t))$ boshqaruvi $\int_0^\theta \|u_i(t)\|^2 dt \leq \rho_i^2$ shartni qanoatlantirsa.

Ta'rif 3. $V : [0, \theta] \times L_2 \times L_2 \rightarrow L_2$ funksiyasi qochuvchi E ning strategiyasi deyiladi, agar quvuvchilarning har bir joiz boshqaruvlari $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$ uchun

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + u_1(t), & x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 = -ax_2 + u_2(t), & x_2(0) = x_{20}, \\ \dot{y} = -ay + V(t, x_1(t), x_2(t)), & y(0) = y_0, \end{cases}$$

sistema $(x_1(\cdot), x_2(\cdot), y(\cdot))$ yagona yechimga ega bo'lsa. V strategiyasi joiz deyiladi, agar har bir joiz $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$ uchun hosil qilingan $v(t) = V(t, x_1(t), x_2(t))$ boshqaruvi $\int_0^\theta \|v(t)\|^2 dt \leq \sigma^2$ shartni qanoatlantirsa.

Ta'rif 4. O'yinning quyi qiymati deb

$$\underline{\Gamma} = \inf_{U_1, U_2} \sup_{v(\cdot)} \Phi(U_1(\cdot), U_2(\cdot), v(\cdot))$$

ga aytiladi, bunda infimum barcha joiz quvuvchi strategiyalari bo'yicha, supremum esa qochuvchining barcha joiz boshqaruvlari bo'yicha olinadi. Yuqori qiymat esa

$$\bar{\Gamma} = \sup_v \inf_{u_1(\cdot), u_2(\cdot)} \Phi(u_1(\cdot), u_2(\cdot), V(\cdot))$$

bo'lib, bu yerda supremum qochuvchining joiz strategiyalari bo'yicha, infimum esa quvuvchilarning joiz boshqaruvlari bo'yicha olinadi. Agar $\underline{\Gamma} = \bar{\Gamma} = \gamma$ bo'lsa, u holda γ o'yin qiymati deyiladi.

III. Asosiy natija.

Bir quvuvchi va bir qochuvchili hol. Ikki quvuvchi va bitta qochuvchi ishtirokidagi asosiy o'yinni tahlil qilishdan oldin, bir quvuvchi P va bir

qochuvchi E ishtirokidagi sodda differensial o'yinni qaraymiz. Ushbu o'yin quyidagicha aniqlanadi

$$\begin{aligned} P &: \dot{x} = -ax + u, \quad x(0) = x_0, \\ E &: \dot{y} = -ay + v, \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \quad (2)$$

bu yerda u, v joiz boshqaruvlar bo'lib, quyidagi integral cheklavlarni qanoatlantiradi:

$$\int_0^\theta \|u(t)\|^2 dt \leq \rho^2, \quad \int_0^\theta \|v(t)\|^2 dt \leq \sigma^2,$$

bunda ρ, σ berilgan musbat sonlar.

Quyidagi funktsiyani kiritamiz:

$$\psi = \sqrt{\int_0^\theta e^{-2a(\theta-s)} ds} = \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\theta}}{2a}}.$$

Ma'lumki, quvuvchining boshlang'ich x_0 nuqtasidan θ vaqtgacha erishish to'plami yopiq shar

$$H(e^{-a\theta}x_0, \psi\rho),$$

va shunga o'xshash qochuvchining erishish to'plami $H(e^{-a\theta}y_0, \psi\sigma)$ dir.

Yordamchi o'yin uchun quvuvchining quyidagi strategiyasini ko'rib chiqamiz

$$u(t) = u_0(t) + v(t), \quad 0 \leq t \leq \theta, \quad (3)$$

bu yerda

$$u_0(t) = \frac{y_0 e^{-a\theta} - x_0 e^{-a\theta}}{\psi^2} e^{-a(\theta-t)}.$$

Lemma 1. Agar qochuvchining $y(\theta)$ vaziyati

$$\begin{aligned} 2(y_0 e^{-a\theta} - x_0 e^{-a\theta}, y(\theta)) &\leq \psi^2 \rho^2 - \psi^2 \sigma^2 \\ &+ \|y_0 e^{-a\theta}\|^2 - \|x_0 e^{-a\theta}\|^2, \end{aligned} \quad (4)$$

shartini qanoatlantirsa, u holda (3) strategiyasi joiz bo'lib, $x(\theta) = y(\theta)$ bo'lishini kafolatlaydi.

Isbot. Avval (4) shartini $y(\theta) = y_0 e^{-a\theta} + \int_0^\theta e^{-a(\theta-s)} v(s) ds$ tenglik yordamida qayta yozamiz. Almashtirishlardan so'ng

$$2 \int_0^\theta e^{-a(\theta-s)} (y_0 e^{-a\theta} - x_0 e^{-a\theta}, v(s)) ds \leq \psi^2 \rho^2 - \psi^2 \sigma^2 - \|y_0 e^{-a\theta} - x_0 e^{-a\theta}\|^2 \quad (*)$$

munosabat hosil bo'ladi.

Endi quvuvchining boshqaruvini baholaymiz. $\int_0^\theta \|u_0(s)\|^2 ds = \frac{\|y_0 e^{-a\theta} - x_0 e^{-a\theta}\|^2}{\psi^2}$

ekanligidan foydalanib,

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \|u(s)\|^2 ds &= \frac{\|y_0 e^{-a\theta} - x_0 e^{-a\theta}\|^2}{\psi^2} + 2 \int_0^\theta (u_0(s), v(s)) ds \\ &+ \int_0^\theta \|v(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

O'rtadagi qo'shiluvchini yuqoridagi (*) tengsizlik yordamida qayta baholaymiz

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\theta (u_0(s), v(s)) ds &= \frac{2}{\psi^2} \int_0^\theta e^{-a(\theta-s)} (y_0 e^{-a\theta} - x_0 e^{-a\theta}, v(s)) ds \\ &\leq \rho^2 - \sigma^2 - \frac{\|y_0 e^{-a\theta} - x_0 e^{-a\theta}\|^2}{\psi^2} \end{aligned}$$

$\int_0^\theta \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \|u(s)\|^2 ds &\leq \frac{\|y_0 e^{-a\theta} - x_0 e^{-a\theta}\|^2}{\psi^2} + \rho^2 - \sigma^2 - \\ &- \frac{\|y_0 e^{-a\theta} - x_0 e^{-a\theta}\|^2}{\psi^2} + \sigma^2 = \rho^2 \end{aligned}$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak strategiya joiz.

$x(\theta) = y(\theta)$ ekanligini tekshirish uchun u ni yechimga qo'yamiz

$$x(\theta) = x_0 e^{-a\theta} + \int_0^\theta e^{-a(\theta-s)} u_0(s) ds + \int_0^\theta e^{-a(\theta-s)} v(s) ds.$$

Birinchi integral qurilishiga ko'ra $y_0 e^{-a\theta} - x_0 e^{-a\theta}$ ga teng, ikkinchi integral esa aynan $y(\theta) - y_0 e^{-a\theta}$ dir. Shuning uchun $x(\theta) = y(\theta)$.

Endi esa (1) tenglama bilan tavsiflangan ikki quvuvchi va bitta qochuvchi ishtirokidagi o'yinni tahlil qilamiz.

O'yin qiymatini quyidagicha aniqlaymiz

$$\begin{aligned} \gamma &= \inf \{ l \geq 0 : H(y_0 e^{-a\theta}, \psi\sigma) \subset \\ &H(x_{10} e^{-a\theta}, \psi\rho_1 + l) \cup H(x_{20} e^{-a\theta}, \psi\rho_2 + l) \} \end{aligned}$$

Boshqacha aytganda, γ shunday eng kichik manfiy bo'lmagan sonki, qochuvchining erishish to'plami quvvuchilarning l ga kengaytirilgan to'plamlari birlashmasi yordamida qoplanadi.

Lemma 2. Faraz qilaylik, shunday noldan farqli $p_0 \in l_2$ vektori mavjudki, $i = 1, 2$ uchun $(y_0 e^{-a\theta} - x_{i0} e^{-a\theta}, p_0) \geq 0$ bo'lsin.

a) Agar biror i uchun $H(y_0 e^{-a\theta}, \psi\sigma) \subset H(x_{i0} e^{-a\theta}, \psi\rho_i)$ bo'lsa, u holda

$$H(y_0 e^{-a\theta}, \psi\sigma) \subset X_i,$$

bu yerda X_i Lemma1dagi kabi aniqlanadi.

b) Agar $\varepsilon > 0$ uchun

$$H(y_0 e^{-a\theta}, \psi\sigma) \not\subset H(x_{i0} e^{-a\theta}, \psi\rho_i - \varepsilon) \quad i = 1, 2,$$

bo'lsa, u holda shunday $\bar{y} \in S(y_0 e^{-a\theta}, \psi\sigma)$ nuqta mavjudki, $\|\bar{y} - x_{i0} e^{-a\theta}\| \geq \psi\rho_i$ ($i = 1, 2$) bo'ladi.

Lemma2 ning isboti Ibragimovning [5] maqolasida keltirilgan.

Theorem 1 Faraz qilaylik, shunday noldan farqli $p_0 \in l_2$ vektori mavjud bo'lib, quyidagi

$$\begin{aligned} (y_0 e^{-a\theta} - x_{10} e^{-a\theta}, p_0) &\geq 0, \\ (y_0 e^{-a\theta} - x_{20} e^{-a\theta}, p_0) &\geq 0. \end{aligned}$$

tengsizliklarni qanoatlantirsa u holda (1) o'yin γ qiymatga ega bo'ladi.

Quvvuchilar va qochuvchi uchun optimal strategiyalarni quramiz.

Quvvuchilarning optimal strategiyalarini qurish
Har bir $i = 1, 2$ uchun soxta quvvuch z_i ni kiritamiz, uning harakati

$$\dot{z}_i = -az_i + w_i, \quad z_i(0) = x_{i0}, \quad \int_0^\theta \|w_i(t)\|^2 dt \leq \bar{\rho}_i^2,$$

bunda $\bar{\rho}_i = \rho_i + \gamma / \psi$ bilan berilgan. z_i soxta quvvuchining erishish to'plami $H(x_{i0} e^{-a\theta}, \psi\bar{\rho}_i) = H(x_{i0} e^{-a\theta}, \psi\rho_i + \gamma)$ bo'ladi.

Quvvuchi strategiyasini quyidagicha tanlaymiz

$$u_{0i}(t) = \frac{y_0 e^{-a\theta} - x_{i0} e^{-a\theta}}{\psi^2} e^{-a(\theta-t)}.$$

Berilgan $\varepsilon > 0$ uchun $\bar{\rho}_i(\varepsilon) = \rho_i + \frac{\gamma}{\psi} + \frac{\varepsilon}{k_i \psi}$ ni olamiz, bu yerda $k_i = \max\{1, \rho_i\}$. Huddi [6] maqoladagi kabi τ_i hamda τ_i^ε vaqtlarni aniqlaymiz

$$\tau_i^\varepsilon = \min \left\{ \theta, \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \|u_{0i}(s) + v(s)\|^2 ds = \bar{\rho}_i^2(\varepsilon) \right\} \right\},$$

va τ_i ham xuddi shunday aniqlanadi, ammo $\bar{\rho}_i(\varepsilon)$ o'rniga $\bar{\rho}_i$ bilan. Soxta quvvuchilar uchun quyidagi strategiyalarni quramiz

$$\begin{aligned} w_i^\varepsilon(t) &= \begin{cases} u_{0i}(t) + v(t), & 0 \leq t \leq \tau_i^\varepsilon, \\ 0, & \tau_i^\varepsilon < t \leq \theta, \end{cases} \\ w_i(t) &= \begin{cases} u_{0i}(t) + v(t), & 0 \leq t \leq \tau_i, \\ 0, & \tau_i < t \leq \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

P_i haqiqiy quvvuchi quyidagi boshqaruvni qo'llaydi

$$u_i(t) = \frac{\rho_i}{\bar{\rho}_i} w_i(t), \quad 0 \leq t \leq \theta.$$

Quvvuchilar uchun kafolatlangan natija

Har bir joiz $v(\cdot)$ qochuvchi boshqaruvi uchun

$$\min\{\|x_1(\theta) - y(\theta)\|, \|x_2(\theta) - y(\theta)\|\} \leq \gamma$$

ekanligini ko'rsatamiz.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ ni olib, $\bar{\rho}_i(\varepsilon)$ bilan aniqlangan z_i^ε soxta quvvuchilarini qaraymiz. γ ning ta'rifiga ko'ra, har bir joiz $v(\cdot)$ uchun

$$y(\theta) \in H(y_0 e^{-a\theta}, \psi\sigma) \subset \bigcup_{i=1}^2 H(x_{i0} e^{-a\theta}, \psi\rho_i + \gamma + \varepsilon / k_i)$$

o'rinli. Demak, shunday $i \in \{1, 2\}$ indeksi mavjudki,

$$y(\theta) \in H(x_{i0} e^{-a\theta}, \psi\rho_i + \gamma + \varepsilon / k_i).$$

p_0 haqidagi faraz va Lemma 2(a) dan foydalanib, $y(\theta) \in X_i^\varepsilon$ ekanligini olamiz, bu yerda

$$X_i^\varepsilon = \{z \in l_2 : 2(y_0 e^{-a\theta} - x_{i0} e^{-a\theta}, z) \leq (\psi \rho_i + \gamma + \varepsilon / k_i)^2 - (\psi \sigma)^2 + \|y_0 e^{-a\theta}\|^2 - \|x_{i0} e^{-a\theta}\|^2\}.$$

$y(\theta) \in X_i^\varepsilon$ sharti aynan Lemma1 dagi kabi farazdir, bunda ρ o'rniga $\rho_i + (\gamma + \varepsilon / k_i) / \psi$ olingan. Shuning uchun shu i uchun z_i^ε soxta quvuvchi $z_i^\varepsilon(\theta) = y(\theta)$ ni qanoatlantiradi va uning w_i^ε boshqaruvi $\bar{\rho}_i(\varepsilon)$ joizdir.

Endi haqiqiy quvuvchi P_i va $y(\theta)$ orasidagi masofani baholaymiz:

$$\begin{aligned} \|y(\theta) - x_i(\theta)\| &= \|z_i^\varepsilon(\theta) - x_i(\theta)\| \leq \\ &\leq \int_0^\theta e^{-a(\theta-s)} \|w_i^\varepsilon(s) - w_i(s)\| ds + \\ &+ \int_0^\theta e^{-a(\theta-s)} \|w_i(s) - \frac{\rho_i}{\bar{\rho}_i} w_i(s)\| ds. \end{aligned}$$

Birinchi integral [6] maqola isbotidagidek $K\sqrt{\varepsilon}$ bilan chegaralanadi, chunki $\tau_i^\varepsilon > \tau_i$. Ikkinchi had uchun

$$\begin{aligned} \int_0^\theta e^{-a(\theta-s)} (1 - \frac{\rho_i}{\bar{\rho}_i}) \|w_i(s)\| ds &\leq \\ &\leq (1 - \frac{\rho_i}{\bar{\rho}_i}) \psi \bar{\rho}_i = \frac{\gamma}{\psi \bar{\rho}_i} \psi \bar{\rho}_i = \gamma. \end{aligned}$$

Shunday qilib, i quvuvchi uchun $\|y(\theta) - x_i(\theta)\| \leq \gamma + K\sqrt{\varepsilon}$. $\varepsilon \rightarrow 0$ da

$$\min_{i=1,2} \|y(\theta) - x_i(\theta)\| \leq \gamma$$

kelib chiqadi. Demak,

$$\underline{\Gamma} = \inf_{U_1, U_2} \sup_{v(\cdot)} \Phi(U_1, U_2, v) \leq \gamma.$$

Qochuvchi uchun kafolatlangan natija

Endi qochuvchining shunday strategiyasini quramizki, u

$$\inf_{u_1(\cdot), u_2(\cdot)} \Phi(u_1(\cdot), u_2(\cdot), V) \geq \gamma$$

ni kafolatlaydi.

IV.Xulosa.

Agar $\gamma = 0$ bo'lsa, tengsizlik bajarilishi ravshan. Shuning uchun $\gamma > 0$ deb faraz qilaylik. γ ning ta'rifiga ko'ra, $\varepsilon > 0$ uchun

$$H(y_0 e^{-a\theta}, \psi \sigma) \not\subset \bigcup_{i=1}^2 H(x_{i0} e^{-a\theta}, \psi \rho_i + \gamma - \varepsilon)$$

munosabat o'rinli. Shuning uchun shunday $\bar{y} \in S(y_0 e^{-a\theta}, \psi \sigma)$ nuqta mavjudki,

$$\|\bar{y} - x_{i0} e^{-a\theta}\| \geq \psi \rho_i + \gamma, \quad i = 1, 2.$$

bu yerda $S(y_0 e^{-a\theta}, \psi \sigma)$ - markazi $y_0 e^{-a\theta}$ nuqtada, radiusi esa $\psi \sigma$ ga teng bo'lgan sfera.

Qochuvchi quyidagi strategiyadan foydalanadi

$$v(t) = \frac{\bar{y} - y_0 e^{-a\theta}}{\psi^2} e^{-a(\theta-t)}, \quad 0 \leq t \leq \theta,$$

bu boshqaruv joizdir, chunki

$$\int_0^\theta \|v(t)\|^2 dt = \frac{\|\bar{y} - y_0 e^{-a\theta}\|^2}{\psi^4} \int_0^\theta e^{-2a(\theta-t)} dt = \frac{(\psi \sigma)^2}{\psi^4} \psi^2 = \sigma^2.$$

Bundan tashqari, $y(\theta) = \bar{y}$.

Quvuvchilarning ixtiyoriy joiz $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$ boshqaruvlari uchun har bir i da

$$\begin{aligned} \|x_i(\theta) - y(\theta)\| &\geq \|\bar{y} - x_{i0} e^{-a\theta}\| - \|x_i(\theta) - x_{i0} e^{-a\theta}\| \geq \\ &\geq (\psi \rho_i + \gamma) - \psi \rho_i = \gamma \end{aligned}$$

bo'ladi. Shunday qilib $\Phi(u_1, u_2, V) = \min\{\|x_1(\theta) - y(\theta)\|, \|x_2(\theta) - y(\theta)\|\} \geq \gamma$ va natijada

$$\bar{\Gamma} = \sup_{V} \inf_{u_1, u_2} \Phi(u_1, u_2, V) \geq \gamma.$$

Ikkala natijalarni birlashtirib $\underline{\Gamma} \leq \gamma \leq \bar{\Gamma}$ ni olamiz. Har doim $\underline{\Gamma} \geq \bar{\Gamma}$ ekanligidan $\underline{\Gamma} = \bar{\Gamma} = \gamma$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, o'yin γ qiymatga ega.

Biz l_2 Hilbert fazosida integral cheklovlar ostidagi ikki quvuvchi va bitta qochuvchi

ishtirokidagi chiziqli quvish-qochish differensial o'yinini o'rgandik. O'yin qiymati sifatida yakuniy vaqtda qochuvchi bilan quvuvchilar orasidagi minimal masofa belgilandi. Boshlang'ich vaziyatlarga qo'yilgan geometrik shart ostida o'yin γ qiymatga ega ekanligini isbotladik, bu γ qochuvchining erishish to'plami quvuvchilarning γ ga kengaytirilgan erishish to'plamlari birlashmasi bilan qoplanishini ta'minlaydigan eng kichik manfiy bo'lmagan sonidir. Quvuvchilar va qochuvchi uchun optimal strategiyalar qurildi va o'yin qiymati aniqlandi.

Adabiyotlar

- [1] Ahmed I., Kumam P., Ibragimov G., Rilwan J., Kumam W. (2019). An Optimal Pursuit Differential Game Problem with One Evader and Many Pursuers. *Mathematics*, 7, 842. <https://doi.org/10.3390/math7090842>.
- [2] Azamov A.A., Turgunboyeva M.A. (2025). The differential game with inertial players under integral constraints on controls. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsess upravleniya*, 21(1): 122–138. <https://doi.org/10.3389/fceg.2022.1093186>.
- [3] Badakaya A., Halliru A., Adamu J., Kiri A. (2022). A differential game of pursuit-evasion with constrained players' energy. *Data Analytics and Applied Mathematics*, 3(1): 42–51. <https://doi.org/10.15282/daam.v3i1.7617>.
- [4] Badakaya A., Halliru A., Adamu J. (2022). A game problem of pursuit-evasion with nth order differential equations describing players' dynamics. *Journal of Control and Decision*, 9(2): 193–201. <https://doi.org/10.1080/23307706.2021.1941336>.
- [5] Ibragimov G.I. (2005). Optimal Pursuit with Countable Many Pursuers and One Evader. *Differential Equations*, 41(5), 627–635. <https://doi.org/10.1007/s10625-005-0198-y>.
- [6] Ibragimov, G.I. and Kuchkarov, A.Sh. (2013). Fixed Duration Pursuit-Evasion Differential Game with Integral Constraints. *Journal of Physics: Conference Series*, 435(1), 012017. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/435/1/012017>.
- [7] Ibragimov G.I., Salleh Y. (2012). Simple motion evasion differential game of many pursuers and one evader with integral constraints on control functions of players. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, Article ID 748096, doi:10.1155/2012/748096.
- [8] Rilwan, J. and Badakaya, A. (2018). Pursuit differential game problem with integral and geometric constraints in a Hilbert space. *Journal of the Nigerian Mathematical Society*, 37, 203–215.
- [9] Rilwan, J., Fotia, P., Ferrara, M. On game value of a differential game problem with Gronwall-type constraints on players control functions. *Decisions Econ Finan* 46, 319–333 (2023). <https://doi.org/10.1007/s10203-023-00389-y>
- [10] Salimi M., Ibragimov G.I., Siegmund S., Sharifi S. (2016). On a Fixed Duration Pursuit Differential Game with Geometric and Integral Constraints. *Dynamic Games and Applications*, 6: 409–425. <https://doi.org/10.1007/s13235-015-0161-3>.
- [11] Salimi M., Ferrara M. (2017). Differential game of optimal pursuit of one evader by many pursuers. *Int. J. Game Theory*, 48(2): 481–490.
- [12] Samatov B.T. (2013). Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players. *I. Cybern. Syst. Anal.*, 49, 794–801. <https://doi.org/10.1007/s10559-013-9563-7>.

Mualliflar haqida ma'lumot

1. Saidakbar G'ulomov - Qo'qon universiteti Andijon filiali, Fizika va matematika kafedrası o'qituvchisi. E-mail: saidakbargulomov89@gmail.com Tel.: +99893-418-75-18;
2. Sarvarbek Zokirjonov -Andijon davlat pedagogika instituti, Matematika va informatika kafedrası o'qituvchisi. E-mail: zokirjonovs19@gmail.com Tel.: +99893-414-46-36

Об одном способе преследования в дифференциально-разностных уравнениях нейтрального типа с интегральными и различными ограничениями на управления игроков

Н.А. Мамадалиев¹, Т.Т. Ибайдуллаев²

¹Национальный университет Узбекистана

²Андижанский государственный университет

Аннотация. В настоящей работе основное внимание уделяется исследованию задачи преследования описываемой системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа при интегральных ограничениях на управления игроков. Терминальное множество представляется в виде цилиндра в n -мерном евклидовом пространстве. При исследовании этой задачи получены новые достаточные условия для разрешимости задачи преследования.

Ключевые слова: Дифференциально-разностные уравнения, терминальное множество, нейтральный тип, интегральные ограничения, задача преследования

Annotatsiya. Ushbu ishda asosiy e'tibor o'yinchilarning boshqaruvlari integral chegaralanishli neytral tipdagi chiziqli differensial–ayrimali tenglamalar sistemasi bilan berilgan quvish masalasini tadqiq etishga qaratilgan. Terminal to'plam n - o'lchamli fazoda silindr ko'rinishida tasvirlangan. Ushbu masalani tadqiq etishda quvish masalasini yechish uchun yangi yetarli shartlar olingan.

Kalit so'zlar: Differensial–ayrimali tenglamalar, terminal to'plam, neytral tip, integral chegaralanishlar, quvish masalasi.

Annotation: In this work, a pursuit problem described by a system of linear neutral-type differential-difference equations, where the players' controls are subject to integral constraints is studied. The terminal set is defined as a cylindrical set in n -dimensional space. In the study of this problem, new sufficient conditions to solve the pursuit problem have been established

Keywords: Differential-difference equations, terminal set, neutral type, integral constraints, pursuit problem

Введение. Теория конфликтно управляемых процессов представляет собой интенсивно развивающийся раздел современной математики. В данной теории исследуются задачи управления динамическими процессами в условиях конфликта, который предполагает наличие двух или более сторон, способных воздействовать на процесс с противоположными или несовпадающими целями и оптимизировать заданные функционалы качества процесса.

Конфликтно управляемые процессы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, называют дифференциальными играми, термин был введен американским математиком Р.Айзексом [1] - одним из основоположников теории дифференциальных игр. Дифференциальные игры - один из важнейших разделов математической теории управления, в котором изучается управление объектом в конфликтных ситуациях. Теория дифференциальных игр развивает идеи и методы теории оптимального управления; последнюю

можно рассматривать как частный случай первой, когда число игроков равно 1.

Дифференциальные игры имеют своим источником практические задачи. Эти задачи укладываются в следующую общую схему. Имеется динамическая система, описываемая обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые связывают ее фазовые координаты с управляющими и другими силами. Часть сил нацелена на выполнение какой-то задачи, другие силы могут мешать достижению этой цели. Поэтому процесс трактуется как игра между противоборствующими сторонами, которым приписывается власть над той или иной группой сил. При этом игровой характер таких конфликтных задач управления проявляется особенно в том предположении, что тому или иному игроку в каждый момент времени не известен точно будущий образ действий противника, и при определении своих действий этот игрок может опираться лишь на знание физических возможностей своих и противника. Типичные задачи дифференциальной игры являются, как задача о преследовании одного движущегося управляемого объекта другим,

задача о приведении управляемого объекта в заданное состояние при неизвестных заранее возмущающих силах, задача об управлении объектом при неполной информации о его текущем фазовом состоянии и др. При этом преследующий стремится осуществить встречу как можно раньше, а преследуемый стремится оттянуть ее на возможно поздний срок.

Основным математическим аппаратом теории дифференциальных игр является теория обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью дифференциальных уравнений удается описать и исследовать целый ряд важных законов физики, механики, химии, биологии, астрономии, экономики и, теории управления. Использование аппарата дифференциальных уравнений приводит к тому, что в теории дифференциальных игр остро встают различные проблемы теории дифференциальных уравнений. Это обстоятельство отличает теорию дифференциальных игр от других направлений теории игр и порождает ее определенную самостоятельность. Теория дифференциальных игр сформировалась как самостоятельная наука сравнительно недавно.

Теория дифференциальных игр - математическая теория конфликтных ситуаций, описываемых дифференциальными уравнениями и имеющих место в различных областях человеческой деятельности. Кроме исследования конфликтных ситуаций в теории дифференциальных игр рассматриваются и задачи оптимального управления, осложненного наличием различного рода помех.

Систематическое развитие теории дифференциальных игр началось в конце 50-х и начале 60-х годов XX столетия. Оно стимулировалось потребностями практики, большими успехами математической теории управления, теории игр и исследования операций. Прогресс теории дифференциальных игр связан прежде всего с именами Л.С. Понтрягина, Н.Н. Красовского, Е. Ф. Мищенко, Р. Айзекса, У. Флеминга. Крупный вклад в развитие теории дифференциальных игр внесли Ю.С.

Осипов, Б.Н. Пшеничный, Л.А. Петросян, А.И. Субботин. Интересные результаты получены в исследованиях А.А. Азамова, А.Я. Азимова, Н.Л. Григоренко, Р.В. Гамкрелидзе, П.Б. Гусятникова, А.В. Кряжмского, А.Б. Куржанского, А.Н. Красовского, А.А. Меликяна, М.С. Никольского, Н.Н. Петрова, Н.Ю. Сатимова, Н.Н. Субботиной, В. Е. Третьякова, В. Н. Ушакова, В. И. Ухоботова, А.З. Фазылова, А.Г. Ченцова, Ф.Л. Черноусько, А.А. Чикрия, Л.П. Югая, Б.Т. Саматова, Н.А. Мамадалиева, Г.И. Ибрагимова и их ученики.

Основополагающий вклад в развитие теории дифференциальных игр внесли школы Л.С.Понтрягина и Н.Н.Красовского. Н.Н.Красовским и представителям и его научной школы был предложен и развит позиционный подход к дифференциальным играм [2], [3], [4]. Этот подход, основанный на конструктивных законах управления с обратной связью, позволил сформулировать и доказать центральный результат теории позиционных дифференциальных игр - теорему об альтернативе [3]. Задача преследования, представляет большой практический и теоретический интерес. Имеется ряд работ, посвященных дифференциальным играм, частным случаем которых является задача преследования. Здесь, в первую очередь, следует отметить книгу Айзекса [1], которая содержит большое количество примеров и на них достаточно глубоко выяснены все основные принципиальные трудности проблемы. При этом заслуживает внимание то, что управления противоборствующих сторон конструируются в виде синтезирующих функций, т.е. они зависят только от состояния игры. Р.Айзекс с помощью своего метода решил много интересных прикладных задач и получил оригинальные результаты.

Фундаментальные результаты по решению дифференциальных игр преследования и убегания получили Л. С. Понтрягин и Е. Ф. Мищенко [5]. В работе [5], сформулированы достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейных дифференциальных играх. В

ней использован формализм принципа максимума - одного из центральных методов теории управления. Основным результатом заключается в описании 9 множества начальных точек (состояний), из которых гарантируется возможность завершения преследования, а также в вычислении времени преследования, и способ формирования управления преследователя, реализующего процесс преследования.

Упрощение результатов работы [5] полученное Л. С. Понтрягиным и Е.Ф. Мищенко, в конечном счете привело к созданию Л. С. Понтрягиным первого и второго (прямых) методов решения задачи преследования для линейных дифференциальных играх. Для решения поставленной задачи введены некоторые операции над выпуклыми множествами, в частности операцию альтернированного интерирования выпуклых множеств. Все рассматриваемые в дальнейшем множества являются замкнутыми подмножествами пространства R^n : В продолжение первого и второго методов Л.С. Понтрягина в работах [5,6,7] Н.Ю. Сатимовым [8] предложен так называемый третий метод решения задач и преследования в линейных дифференциальных играх. Этот метод в начальных вариантах занимал промежуточное положение между упомянутыми выше первым и вторым методами. Дальнейшее развитие этот метод (его модификации) получил в работах А.Азамова, Б.Саматова [9], М.С. Никольского [10], Н.Ю.Сатимова [8].

Во всех упомянутых выше работах изучались дифференциальные игры, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Однако при более тщательном изучении часто становится очевидным, что более реалистичная модель игры должна включать некоторые из предшествующих состояний системы. Отметим, что усилиями математиков разных стран теория дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (в основном, запаздывающего и в несколько меньшей степени нейтрального типов) глубоко

разработана в различных направлениях, найдены естественные постановки задач и установилась адекватная терминология.

В последнее время ежегодно публикуются более сотни работ, представляющих математический интерес, посвященных теории и приложениям дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Появились и сводные работы, относящиеся к этому кругу идей; ей полностью или в значительной степени посвящены книги Р.Беллмана и К.Кука [12], С.Б.Норкина [13], Дж.Хейл [14] и др. Они посвящены наиболее важным для приложений разделам теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом - теории линейных дифференциально-разностных уравнений и теории устойчивости. Простейший тип зависимости от прошлого в дифференциальных играх осуществляется через фазовые переменные.

Изучению дифференциальных игр, описываемых дифференциально-разностными уравнениями, посвящены работы Н.Н.Красовского, Ю.С. Осипова, А.Б.Куржанского, А.В.Кряжмского, В.И. Максимова. В этих работах приводятся достаточные условия успешного завершения дифференциально-разностной игры сближения, выясняется структура экстремальных стратегий сближения, доказан ряд теорем об альтернативе. В работах М.С.Никольского [ДАН, ДУ], А.А.Чикрий, Г.Ц.Чикрий [ДУ], А.П.Коновалов [1,2] изучаются дифференциально-разностные игры преследования при геометрических и при интегральных ограничениях на управления игроков. Исследована структура дифференциальных игр, описываемых уравнениями с запаздывающим аргументом. В работе А.А.Чикрий, Г.Ц.Чикрий изучаются дифференциально-разностные игры преследования многих лиц при геометрических ограничениях на управления игроков. В частности в работе М.С.Никольского [11] предложены конструкции являющиеся естественным обобщением конструкций Л.С.Понтрягина [7] на случай линейных дифференциальных игр при наличии запаздываний. Получены

некоторые достаточные условия общего вида, при выполнении которых для данного начального состояния гарантируется, что преследование из него может быть закончено за конечное время. В настоящей работе основное внимание уделяется исследованию задачи преследования описываемой системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа при интегральных ограничениях на управления

Постановка задачи. Динамика конфликтно-управляемого процесса в конечномерном евклидовом пространстве R^n описывается системой линейных дифференциально - разностных уравнений нейтрального типа, содержащей неизвестную функцию и ее производные в различные моменты времени [12]

$$\dot{z} = Az(t) + \sum_{i=1}^m B_i \dot{z}(t - h_i) + \sum_{i=1}^m C_i z(t - h_i) - Du(t) + Fv(t) + a, t \geq 0, \quad (1)$$

где $z(t) \in R^n, n \geq 1$; $A, B_i (i = 1, 2, \dots, m), C_i (i = 1, 2, \dots, m)$, – постоянные квадратные матрицы размерности которых $n \times n, n \times n$; D, F – постоянные матрицы порядка $n \times p$ и $n \times q$, соответственно; $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m = h$ – действительные числа; a – некоторая точка R^n . $u(t)$ и $v(t)$ – управления преследующего и преследуемого игроков соответственно; Они выбираются как суммируемые с квадратом функции, удовлетворяющие неравенствам

$$\|u(\cdot)\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} \|u(t)\|^2 dt} \leq \rho, \quad (2) \|v(\cdot)\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} \|v(t)\|^2 dt} \leq \sigma, \quad (3)$$

где ρ и σ – неотрицательные константы.

Измеримые функции $u = u(t); v = v(t); 0 \leq t < +\infty$; удовлетворяющие ограничениям (2),(3) назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Кроме того, в пространстве R^n выделено непустое цилиндрическое терминальное множество M в виде $M = M_0 + M_1$; где M_0 – линейное подпространство пространства R^n ; M_1 – произвольное компактное подмножество подпространства L ; где L – ортогональное дополнение к подпространству M_0 в R^n (т.е. $M_0 \oplus L = R^n$).

Начальным положением для преследования (1) является n – мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(t)$; определенная на отрезке $[-h_m, 0]$, т.е.

$$\{\varphi(\cdot): z(t) = \varphi(t), t \in [-h_m, 0], z(0) = \varphi(0) \in R^n \setminus M\} \quad (4)$$

Обозначим через S множество точек вида $S = \{t: t = \sum_{i=0}^m j_i h_i, j_i - \text{целое число}\}$, и пусть S^0 обозначает пересечение S с полуплоскостью $(0; \infty)$ т.е. $S^0 = S \cap (0; \infty)$.

Преследование начинается в момент $t = 0$ из положения $z_0(\cdot) \in X$ и считается законченным в момент времени $t = t(z_0(\cdot))$, когда фазовая точка $z(t)$ впервые попадает на множество M : Цель убегающего игрока состоит в том, чтобы по возможности оттянуть окончание игры.

Цель первого игрока, преследователя (u) с помощью выбора управления $u(t)$ (при ограничениях (2)) вывести траекторию процесса (1) на терминальное множество M за конечное момент времени. Цель второго игрока, убегающего (v) с помощью управления $v(t)$ уклонить траекторию процесса (1) от встречи с терминальным множеством M в

игроков. Терминальное множество представляется в виде цилиндра в n -мерном евклидовом пространстве. Разработаны и применены аналоги третьего метода преследования для решения задачи преследования. При исследовании этой задачи получены новые достаточные условия Л.С. Понтрягина разрешимости задачи преследования.

конечный момент времени, если это невозможно, то максимально оттянуть окончание игры. Пусть τ – произвольное число и $t \in [0; \tau]$.

Определение 1. Пусть $K(t)$, $0 < t \leq \tau$; – единственная матричная функция, обладающая следующими свойствами [12,14]: а) $K(t) = \tilde{0}$; $t < 0$; $\tilde{0}$ – нулевая матрица порядка n ; б) $K(0) = E_n$; где E_n – единичная матрица порядка n ; в) элементы матричной функции $\sum_{i=0}^m C_i K(t - h_i)$, непрерывна на $[0; +\infty)$; г) функция $K(t)$ при $t > 0$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + \sum_{i=0}^m A_i \dot{K}(t - h_i) + \sum_{i=0}^m B_i K(t - h_i), t > 0, t \notin S^0. \quad (5)$$

Существование и единственность матричной функции $K(t)$, $-1 < t \leq \tau$; удовлетворяющей условиям а)–б), могут быть доказаны обычным методом последовательного интегрирования уравнения (5). Функция $K(t)$ принадлежит классу C^1 при $t > 0$; $t \notin S^0$; но в общем случае имеет разрывы первого рода в точках множества S^0 .

Пусть допустимые управления $u = u(t)$; $v = v(t)$ выбраны на отрезке $[0; \tau]$; $\tau > 0$. Тогда для решения $z(t)$ уравнения (1) при начальном условии (3) в силу формулы Коши имеет место следующее представление [12]

$$\begin{aligned} z(\tau) = & \left[K(t) - \sum_{i=0}^m K(\tau - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \\ & + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau - t - h_i) [B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t)] dt - \\ & - \int_0^{\tau} K(\tau - t) [Du(t) - Fv(t) + a] dt, \end{aligned} \quad (6)$$

где $B_0 = -E_n$, E_n – единичная матрица порядка $n \times n$.

Определение 2. Будем говорить, что в игре (1)–(3) можно завершить преследования из начального положения $\varphi(\cdot)$ за время $T = T(\varphi(\cdot)) > 0$; $0 \leq T < +\infty$, если существует функция $u = u(t; v)$, $0 \leq t < \infty$, $v \in R^q$, $u(t; v) \in R^p$, что для произвольной суммируемой с квадратом функции $v(t)$, $0 \leq t < \infty$, $v(t) \in R^q$, удовлетворяющей неравенству $\|v(\cdot)\|_{L_2[0; \infty)} \leq \sigma$, функция $u(t) = u(t; v(t))$; $0 \leq t < \infty$, является функцией суммируемым с квадратом, удовлетворяющей неравенству $\|u(\cdot)\|_{L_2[0; \infty)} \leq \rho$; и траектория $z(t)$; $0 \leq t < \infty$, уравнения (1) с учетом начального условия (4) попадает на множество M : $z(t) \in M$ при некотором $t = t^* \in [0; T]$. При этом для ведения преследования догоняющему нужно знать информацию об объектах. Предполагается, что преследователь знает: в каждый момент времени $t \geq 0$ решение $z(s)$ на отрезке $-h_m \leq s \leq t$ и управление $v(s)$, $0 \leq s \leq t$.

Число $T(\varphi(\cdot))$ называется временем преследования из точки $\varphi(\cdot)$, функция $u(t; v)$, $0 \leq t \leq T(\varphi(\cdot))$; $v \in R^q$, — функцией преследования.

Требуется найти начальные положения $\varphi(\cdot)$, из которых в игре (1)–(3) возможно завершение преследования за конечное время T .

Обозначим через π – матрицу оператора ортогонального проектирования из R^n на L , а через

$$X \underset{Y}{*} Y = \{x: x + Y \subset X\} = \bigcap_{y \in Y} (X - y)$$

– обозначим геометрическую разность (разность Минковского) множеств X и Y , где $X, Y \subset R^n$ [5].

Под решением задачи преследования понимается: а) нахождение начальных положений $\varphi(\cdot)$, из которых в игре (1)–(3) возможно завершение преследования в смысле

введенного выше определения; б) нахождение в явном виде или указание способа построения функции преследования $u(t; v)$.

А. Изменив вектор a в уравнение (1), если это необходимо, будем считать $0 \in M_1$. Через $[coM_1]$ обозначим несущее подпространство выпуклой оболочки coM_1 множества M_1 , через k – обозначим его размерность. Ясно, что существует бесконечно много матриц $H_1: R^k \rightarrow R^n$; таких, что $H_1 R^k = [coM_1]$.

Величины

$$\rho^2(\tau) = \rho^2 - \int_0^\tau |u(\tau)|^2 dt, \quad \sigma^2(\tau) = \sigma^2 - \int_0^\tau |v(\tau)|^2 dt,$$

характеризуют оставшиеся к моменту времени t ресурсы преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Предположение 1. Существует постоянная матрица H_1 такая, что для всех $t \in [0; \tau]$ выполнено включение

$$\pi H_1 R^k + \pi K(t) D R^p \supset \pi K(t) F R^q.$$

При выполнении предположения 1 существуют матричные функции $G_i(t)$; $0 \leq t \leq \tau$; $i = 1; 2$, $G_1(t): R^m \rightarrow R^k$, $G_2(t): R^m \rightarrow R^p$; с суммируемыми с квадратами элементами, такие, что имеет место равенство

$$\pi H_1 G_1(t) w + \pi K(t) D G_2(t) w = \pi K(t) F w$$

для произвольных $t \in [0; \tau]$ и $w \in R^q$.

Считая выполненным условие предположения 1, введем в рассмотрение следующее множество

$$W(\tau) = \left\{ \int_0^\tau \pi G_1(t) w dt : \int_0^\tau |w(t)|^2 dt \leq \sigma^2 \right\}, \quad (7)$$

и неотрицательное число

$$\chi_1(\tau) = \sqrt{\sup \left\{ \int_0^\tau |G_2(t) w(t)|^2 dt : \int_0^\tau |w(t)|^2 dt \leq \sigma^2 \right\}}. \quad (8)$$

Предположение 2. Имеет место неравенство $\chi_1(\tau) \leq \rho$. Считая выполненным условие и предположения 2, введем в рассмотрение следующие множества

$$\Omega_1(\tau) = \left\{ w_1(t) : w_1(t) \in L_1[0, \tau, R^k], \right. \\ \left. \int_0^\tau \pi H_1 w_1(t) dt \in M_1 \ast [\Phi(\tau) \varphi(\cdot) + W(\tau)] \right\} \quad (9)$$

где

$$\Phi(\tau) \varphi(\cdot) = \left[K(t) - \sum_{i=0}^m K(\tau - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \\ + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau - t - h_i) [B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t)] dt$$

$$\Lambda_1(\tau) = \left\{ w_2(t), 0 \leq t \leq \tau : w_2(t) \in L_2[0, \tau, R^p], \right. \\ \left. \int_0^\tau |w_2(t)|^2 dt \leq [\rho - \chi_1(\tau)]^2 \right\} \quad (10)$$

$$W_1(\tau) = \left\{ \int_0^\tau [\pi H_1 w_1(t) + \pi K(t) D w_2(t)] dt : w_1(\cdot) \in \Omega_1(\tau), w_2(\cdot) \in \Lambda_1(\tau) \right\}. \quad (11)$$

Теперь сформулируем достаточное условие для возможности завершения преследования в игре (1)–(3). Завершение преследования понимается в смысле определения 2.

Теорема 1. Пусть при некотором $\tau_1(\varphi(\cdot)) > 0$ выполнены предположения 1, 2 и имеет место включение

$$\int_0^{\tau_1} \pi K(t) a dt \in W_1(\tau_1) \quad (12)$$

Тогда в игре (1)–(3) можно завершить преследования из начального положения $\varphi(\cdot)$ за некоторое конечное время $T = \tau_1(\varphi(\cdot))$.

Доказательство. В силу (9)–(12) найдутся функции

$$w_1(\cdot) \in \Omega_1(\tau_1(\varphi(\cdot))); w_2(\cdot) \in \Lambda_1(\tau_1(\varphi(\cdot))), \text{ такие, что} \\ \int_0^{\tau_1} \pi K(t) a dt = \int_0^{\tau_1} [\pi H_1 w_1(t) + \pi K(t) D w_2(t)] dt \quad (13)$$

Пусть управляющая параметром v ; выбрала произвольную суммируемую с квадратом функцию $v(t)$; $0 \leq t \leq \tau_1$; для которой

$$\|v(\cdot)\|_{L_2[0; \tau_1]} \leq \sigma.$$

Тогда преследующему игроку рекомендуется применять управление

$$u(t) = u(t, v(t)) = G_2(\tau_1 - t)v(t) + w_2(\tau_1 - t), 0 \leq t \leq \tau_1. \quad (14)$$

Вначале убедимся в допустимости управления (14). Действительно, в силу неравенства Коши–Буняковского (см.(8),(10)) имеем

$$\left[\int_0^{\tau_1} |u(t, v(t))|^2 dt \right]^{1/2} \leq \left[\int_0^{\tau_1} |G_2(\tau_1 - t)v(t)|^2 dt \right]^{1/2} + \left[\int_0^{\tau_1} |w_2(\tau_1 - t)|^2 dt \right]^{1/2} \leq \\ \leq \chi_1(\tau_1) + \rho - \chi_1(\tau_1) = \rho,$$

что и означает допустимость управления $u(t)$; $0 \leq t < \infty$, (см.(14)).

Для траектории $z(t)$; $0 \leq t \leq \tau_1$, уравнения

$$\dot{z} = Az(t) + \sum_{i=1}^m B_i \dot{z}(t - h_i) + \sum_{i=1}^m C_i z(t - h_i) - Du(t, v(t)) + Fv(t) + a,$$

с учетом начального условия (4) при $\tau = \tau_1(\varphi(\cdot))$, имеем

$$\pi z(\tau_1) = \left[K(t) - \sum_{i=0}^m K(\tau - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \\ + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau - t - h_i) [B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t)] dt -$$

$$-\int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t)[Du(t, v(t)) - Fv(t)]dt + \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t)adt.$$

Но в соответствии с (14)

$$Du(t, v(t)) = D[G_2(\tau_1 - t)v(t) + w_2(\tau_1 - t)].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \pi z(\tau_1) = \Phi_1(\tau)\varphi(\cdot) - \\ - \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t)[DG_2(\tau_1 - t)v(t) - Fv(t) + Dw_2(\tau_1 - t)]dt + \\ + \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t)adt. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу предположения 1 имеем

$$\pi K(\tau_1 - t)DG_2(\tau_1 - t)v(t) - \pi K(\tau_1 - t)Fv(t) = -\pi H_1 G_1(\tau_1 - t)v(t). \quad (16)$$

Следовательно, (см.(15),(16))

$$\begin{aligned} \pi z(\tau_1) = \Phi_1(\tau)\varphi(\cdot) - \int_0^{\tau_1} [\pi K(\tau_1 - t)Dw_2(\tau_1 - t) - \pi H_1 G_1(\tau_1 - t)v(t)]dt + \\ + \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t)adt. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда следует, что (см.(13),(17))

$$\pi z(\tau_1) = \Phi_1(\tau)\varphi(\cdot) + \int_0^{\tau_1} [\pi H_1 w_1(t) + \pi H_1 G_1(\tau_1 - t)v(t)]dt.$$

Далее, так как

$$\int_0^{\tau_1} \pi H_1 G_1(\tau_1 - t)v(t)dt \in W(\tau_1),$$

то

$$\pi z(\tau_1) \in \int_0^{\tau_1} \pi H_1 w_1(t)dt + [\Phi_1(\tau)\varphi(\cdot) + W(\tau_1)]$$

Отсюда, и из определения множества $\Omega(\tau_1)$ (см.(1.17)) вытекает включение $\pi z(\tau_1) \in M_1$, что эквивалентно включению $z(\tau_1) \in M_1$. Следовательно, преследование заканчивается за время τ_1 . Теорема 1 доказана.

Б. Теперь рассмотрим случай, когда на управляющие параметры наложены разнотипные ограничения следующего вида

$$\|u(\cdot)\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} \|u(t)\|^2 dt} \leq \rho, v(t) \in V, 0 \leq t < \infty, \quad (18)$$

где V — непустое компактное подмножество пространства R^q .

Пусть H_2 — постоянная матрица такая, что $H_2: R^m \rightarrow R^q, H_2 R^m = [coV]$.

Предположение 3. Существует постоянная матрица H_2 такая, что для всех $t \in [0; \tau]$ выполнено включение

$$\pi H_1 R^k + \pi K(t)DR^p \supset \pi K(t)FH_2 R^q.$$

При выполнении предположения 3 существуют матричные функции $G_i(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, $i = 1, 2$, элементы которых являются суммируемыми функциями, и $G_1(t) : R^m \rightarrow R^k$; $G_2(t) : R^m \rightarrow R^p$,

$$\pi H_1 G_1(t) + \pi K(t) D G_2(t) = \pi K(t) F, 0 \leq t \leq \tau$$

Через $S(\tau)$ обозначим интеграл многозначного отображения $\pi H_1 G_1(t) V$, т.е.

$$S(\tau) = \pi \int_0^\tau H_1 G_1(t) V dt.$$

Пусть $\chi_2(\tau)$ — арифметический корень числа

$$\chi_2^2(\tau) = \sup \left\{ \int_0^\tau |G_2(t) v(t)|^2 dt : v(t) \in V, 0 \leq t \leq \tau \right\}.$$

Предположение 4. Имеет место неравенство $\chi_2(\tau) \leq \rho$.

Считая выполненным и предположение 1.10, введем в рассмотрение следующие множества

$$\Omega_2(\tau) = \left\{ w_1(t) : w_1(t) \in L_1[0, \tau, R^k], \right. \\ \left. \int_0^\tau \pi H_1 w_1(t) dt \in M_1 \ast [\Phi(\tau) \varphi(\cdot) + S(\tau)] \right\}, \quad (19)$$

$$\Lambda_2(\tau) = \left\{ w_2(t), 0 \leq t \leq \tau : w_2(t) \right. \\ \left. \in L_2[0, \tau, R^p], \int_0^\tau |w_2(t)|^2 dt \leq [\rho - \chi_2(\tau)]^2 \right\}. \quad (20)$$

Теперь определим множество $W_2(\tau)$ следующим образом (см. (19), (20)):

$$W_2(\tau) = \left\{ \int_0^\tau [\pi H_1 w_1(t) + \pi K(t) D w_2(t)] dt : w_1(\cdot) \in \Omega_2(\tau), w_2 \in \Lambda_2(\tau) \right\}.$$

Теорема 2. Пусть при некотором $\tau = \tau_2(\varphi(\cdot)) > 0$ выполнены предположения 3, 4 и имеет место включение

$$\int_0^{\tau_2} \pi K(t) a dt \in W_2(\tau_2). \quad (21)$$

Тогда в игре (1)–(3) можно завершить преследование из начального положения $\varphi(\cdot)$ за некоторое конечное время $\tau = \tau_2$.

Отметим, что при доказательстве этой теоремы строится не только $u(t)$, $0 \leq t < \infty$, — управление преследующего игрока, но конструируется и функция $m(t)$; $0 \leq t \leq \tau_2$, т.е. управлением является пара функций $(u(t), m(t))$, $0 \leq t \leq \tau_2$.

Доказательство. Из включения (1.29) следует существование функций $\tilde{w}_1 \in R^q$, $\tilde{w}_2 \in R^p$ $0 \leq t \leq \tau_2$, таких, что

$$\int_0^{\tau_2} \pi H_1 \tilde{w}_1(t) dt \in M_1(\tau) \ast [\Phi(\tau_2) \varphi(\cdot) + S(\tau_2)], \quad \int_0^{\tau_2} |\tilde{w}_2(t)|^2 dt \leq [\rho - \chi_2(\tau)]^2, \\ \int_0^{\tau_2} \pi K(t) a dt = \int_0^{\tau_2} [\pi H_1 \tilde{w}_1(t) + \pi K(t) D \tilde{w}_2(t)] dt. \quad (22)$$

Пусть $v(t), 0 \leq t < \infty$, – произвольное допустимое управление убегающего игрока. Преследующему игроку рекомендуется строить свое управление $u(t), 0 \leq t < \infty$ в следующем виде

$$u(t, v(t)) = G_2(\tau_2 - t)v(t) + \tilde{w}_2(\tau_2 - t), 0 \leq t \leq \tau_2, u(t, v(t)) = 0, t > \tau_2. \quad (23)$$

Кроме того, он должен конструировать и функцию $m(t), 0 \leq t \leq \tau_2$. Ее рекомендуется строить следующим образом:

$$m(t, v(t)) = G_1(\tau_2 - t)v(t) + \tilde{w}_1(\tau_2 - t), 0 \leq t \leq \tau_2. \quad (24)$$

Покажем допустимость управления (23). Так как $\|u(\cdot)\|_{L_2[0; \tau_2]} \leq \|G_2(\cdot)v(\cdot)\|_{L_2[0; \tau_2]} + \|\tilde{w}_2(\cdot)\|_{L_2[0; \tau_2]}$, то в силу предположения 4 и ввиду неравенств $\|\tilde{w}_2(\cdot)\|_{L_2[0; \tau_2]} \leq \rho - \chi_2(\tau_2)$ имеем $\|u(\cdot)\|_{L_2[0; \tau_2]} \leq \rho$, что и означает допустимость управления $u(t, v(t)), 0 \leq t \leq \tau_1$. Далее, имеем следующие соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_2} \pi H_1 m(t) dt &= \int_0^{\tau_2} \pi H_1 G_1(\tau_2 - t)v(t) dt + \int_0^{\tau_2} \pi H_1 \tilde{w}_1(t) dt \in \\ &\in S(\tau_2) + \{M_1 * [\Phi(\tau_2)\varphi(\cdot) + S(\tau_2)]\} = M_1 * \Phi(\tau_2)\varphi(\cdot). \end{aligned} \quad (25)$$

Теперь покажем, что с помощью управления $u(t, v(t)), 0 \leq t < \infty$, (см.(23)), можно завершить преследование за время τ_2 . Подставив управления $u(t, v(t)), v(t), 0 \leq t < \infty$ в уравнение (1), с учетом начального условия (4), получим задачу Коши:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + \sum_{i=1}^m B_i \dot{z}(t - h_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^m C_i z(t - h_i) - Du(t, v(t)) + Fv(t) + a, \quad z(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0]. \end{aligned}$$

Для решения $z = z(t); 0 \leq t < \infty$, этой задачи, после проектирования на L имеем

$$\pi z(\tau) = \Phi(\tau)\varphi(\cdot) - \int_0^{\tau} \pi K(\tau - t)[Du(t, v(t)) - Fv(t) - a]dt.$$

Учитывая (22),(23),(24) и считая $\tau = \tau_2$ преобразуем полученную формулу следующим образом:

$$\begin{aligned} \pi z(\tau_2) &= \Phi(\tau_2)\varphi(\cdot) - \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)DG_2(\tau_2 - t)v(t)dt - \\ &- \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)D\tilde{w}_2(\tau_2 - t)dt + \int_0^{\tau_2} \pi H_1 G_1(\tau_2 - t)v(t)dt + \\ &+ \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)DG_2(\tau_2 - t)v(t)dt + \int_0^{\tau_2} \pi K(t)adt = \Phi(\tau_2)\varphi(\cdot) - \\ &- \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)D\tilde{w}_2(\tau_2 - t)dt + \int_0^{\tau_2} \pi H_1 G_1(\tau_2 - t)v(t)dt + \int_0^{\tau_2} \pi K(t)adt. \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду (23),(24) имеем

$$\pi z(\tau_2) = \Phi(\tau_2)\varphi(\cdot) + \int_0^{\tau_2} \pi H_1 m(t)dt -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t) D\tilde{w}_2(\tau_2 - t) dt - \int_0^{\tau_2} \pi H_1 \tilde{w}_1(t) dt + \int_0^{\tau_2} \pi K(t) a dt = \\
& = \Phi(\tau_1) \varphi(\cdot) + \int_0^{\tau_2} \pi H_1 m(t) dt \in \Phi(\tau_2) \varphi(\cdot) + [M_1 * [\Phi(\tau_2) \varphi(\cdot)]] \subset M_1.
\end{aligned}$$

Это означает, что можно завершить преследование за время τ_2 . Теорема 2 доказана.

Литература

- [1]. Айзекс Р. Дифференциальные игры. - М.: Мир, 1967. - 480 с.
- [2]. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
- [3]. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [4]. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
- [5]. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.: Наука, Т.2, 1988.
- [6]. Понтрягин Л.С. К теории дифференциальных игр // М: УМН. 1966. 21(4). С.219–274.
<https://doi.org/10.1070/RM1966v021n04ABEH004171>
- [7]. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Матем.сб. 1980. 3(7). С. 307–330.
<https://doi.org/10.1070/SM1981v040n03ABEH001815>
- [8]. Сатимов Н.Ю. Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. Ташкент: Нац.библ.ка Узбекистана имени Алишера Навои, 2019.
- [9]. Сатимов Н.Ю. О задаче преследования в квазилинейных дифференциальных играх многих лиц//В кн."Неклассические задачи математической физики". ФАН Ташкент. - 1985. - С. 154-174.
- [10]. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования при запаздываниях//Дифференц.уравнения. - 1972. - Т. 8. - №2. - С. 260-267.
- [11]. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний//ДАН. - 1971. - Т.197. - №5. - С.1018-1021.
- [12]. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения, М.: Наука, 1967.- 548 с.
- [13]. Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. - М. Наука. 1965. - 356 с.
- [14]. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1984.
- [15]. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Труды Института математики и механики УрОРАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 290 – 301.
<https://doi.org/10.1134/S0081543810060076>
- [16]. Белоусов А.А. Метод разрешающих функций для дифференциальных игр с интегральными ограничениями // Теория оптимальных решений. 2010. № 2. С. 10–16.
http://nbuv.gov.ua/UJRN/Tor_2010_9_3
- [17]. Мамадалиев Н.А., Мустапокулов Х. Я., Абдуалимова Г.М. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования при интегральных ограничениях на управления // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 103–118.
<https://doi.org/10.35634/vm230107>
- [18]. Саматов Б.А. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования при интегральных ограничениях на управления // Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики". Киев, 2013. № 4. С. 16–32.
- [19]. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992, 384 с.
- [20]. Мамадалиев Н.А., Ибайдуллаев Т.Т. Модификация третьего метода преследования для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Известия вузов. Математика. 2021. № 11. С. 21–33. <https://doi.org/10.26907/0021-3446->

2021-11-21-33

- [21].Мамадалиев Н.А., Хайиткулов Б.Х. Полное решение одного класса дифференциальных игр преследования с интегральными ограничениями и импульсным управлением // Известия вузов. Математика. 2022. № 3. С. 28–37. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-3-28-37>
- [22].Мухсинов Е.М. Об одной дифференциальной игре нейтрального типа с

- интегральными ограничениями в гильбертовом пространстве // Уфимск. матем. журн. 2022. Т.14, вып. 3. С. 90-100.
- [23].Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. - М.: Наука, 1977. - 624 с.
- [24].Петров Н. Ник. Об одной задаче преследования со многими убегающими //Вестник Удмурт, ун-та. 2000. № 1. С. 131-13

О нелокальной краевой задаче для смешанно-параболического уравнения в неограниченной области

М.Х. Акбарова, С.Х. Акбарова, У.М. Кодирова

Ташкентский университет информационных технологий,
Андижанский государственный университет

Аннотация. Данная статья посвящена постановке и исследованию нелокальной краевой задачи для смешанно-параболического уравнения в неограниченной области. Единственность решения поставленной задачи доказывается с помощью принципа экстремума. На основе теории интегральных уравнений показано существование решения задачи.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, краевая задача, прямо-параболическое уравнение, обратно-параболическое уравнение, регулярное решение, неограниченная область, интегральное уравнение.

Annotatsiya. Ushbu maqola aralash parabolik tenglama uchun chegaralanmagan sohada nolokal chegaraviy masalani qo'yilishi va tadqiq etishga bag'ishlangan. Qo'yilgan masala yechimining yagonaligi ekstremum prinsipi yordamida isbotlangan. Integral tenglamalar nazariyasi asosida masala yechimining mavjudligi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: aralash tipdagi tenglama, chegaraviy masala, to'g'ri-parabolik tenglama, teskari-parabolik tenglama, regular yechim, chegaralanmagan soha, integral tenglama.

Abstract. This paper is devoted to the formulation and study of a nonlocal boundary value problem for a mixed-parabolic equation in an unbounded domain. The uniqueness of the solution of the posed problem is proved using the extremum principle. The existence of a solution of the problem is demonstrated using the theory of integral equations.

Key words: equation of mixed type, boundary value problem, a direct parabolic equation, inversely parabolic equation, regular solution, unbounded domain, integral equation.

I. Введение

Теория смешанно-параболических уравнений имеет большое значение при исследовании практических задач, встречающихся в физике, механике и других науках, и является одним из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений в частных производных. Такие уравнения особенно часто используются в гидродинамике с изучением движения жидкости со знакопеременным коэффициентом вязкости.

Основы этой теории, ещё в начале XX века, были заложены в работах М. Жевре [1-2]. В этих работах содержатся первые фундаментальные исследования по линейным уравнениям с частными производными второго порядка смешанно-параболического типа. Далее изучены новые постановки краевых задач для смешанно-параболических уравнений в работах [3-4].

Следует отметить, что локальные и нелокальные краевые задачи для смешанно-параболических уравнений изучены в работах [5-8].

II. Постановка задачи

В области $\Omega = \Omega_0 \cup I$ будем рассматривать смешанно-параболическое уравнение

$$u_{xx} - \operatorname{sgn}(x)u_t = f(x, t), \quad (1)$$

где

$$\Omega_0 = \{(x, t) : -1 < x < 0, 0 < t \leq T\}, \quad T > 0,$$

$$\Omega_\infty = \{(x, t) : 0 < x < \infty, 0 < t \leq T\}, \quad I = \{(x, t) : x = 0, 0 < t \leq T\}.$$

Видно, что уравнение (1) является прямо-параболическим в области Ω_∞ , обратно-параболическим в области Ω_0 [9].

Пусть

$$I_0 = \{(x, t) : x = -1, 0 \leq t \leq T\}, I_1 = \{(x, t) : -1 \leq x \leq 0, t = T\},$$

$$I_\infty = \{(x, t) : 0 \leq x < \infty, t = 0\};$$

и пусть $x_k = x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ - произвольно заданные функции из класса $C^1[0, T]$, причем $-1 < x_k(t) < 0$.

Для уравнения (1) исследуем следующую нелокальную краевую задачу.

Задача. Требуется найти функцию $u(x, t)$ со следующими свойствами:

1) $u(x, t) \in C^1(\Omega) \cap C^{2,1}(\Omega_0 \cup \Omega_\infty)$ и непрерывно вплоть до границы области Ω ;

2) $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_0 , Ω_∞ и ограничена для всех $\forall (x, t) \in (0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq T)$;

3) выполняются следующим краевым условиям

$$u(-1, t) + \sum_{k=1}^n a_k(t) u(x_k, t) = \mu_1(t), \quad x_k \in I_1, t \in I_0, \quad (2)$$

$$u(x, T) = \mu_2(x), \quad x \in I_1, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in I_\infty, \quad (4)$$

где $\mu_1(t)$, $a_k(t)$, ($k = \overline{1, n}$), $\mu_2(x)$, $\varphi(x)$ - заданные функции, причем

$$\mu_1(t), a_k(t) \in C[0, T] \cap C^2(0, T], \quad \mu_2(-1) + \sum_{k=1}^n a_k(T) u(x_k(T), T) = \mu_1(T),$$

$$\mu_2(x) \in C[-1, 0] \cap C^2(-1, 0), \text{ а } \varphi(x) - \text{ограничена в } I_\infty.$$

III. Существование и единственность решения задачи

Теорема. Если выполняется условие

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k(t) \right| \leq 1, \quad (5)$$

то задача имеет не более одного решения.

Единственность решения поставленной задачи доказывается с помощью принципа экстремума: решение $u(x, t)$ задачи при $f(x, t) = 0$, $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ своего положительного максимума и отрицательного минимума в области $\overline{\Omega}$ может достигать лишь на границе $I_1 \cup I_\infty$.

Действительно, положим

$$M = \max_{\overline{\Omega}} |u(x, t)|.$$

По принципу экстремума для смешанно-параболических уравнений [9] функция $u(x, t)$ свое положительное максимальное и отрицательное минимальное значение может достигать только на $I_0 \cup I_1 \cup I_\infty$.

Предположим, что на I_0 существует такая точка $(-1, t_0) \in I_0$, для которой имеет место $|u(-1, t_0)| = M$.

Тогда из условия (2) получим

$$u(-1, t_0) + \sum_{k=1}^n a_k(t_0)u(x_k, t_0) = 0,$$

или

$$M = |u(-1, t_0)| = \left| \sum_{k=1}^n a_k(t_0)u(x_k(t_0), t_0) \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k(t_0)| |u(x_k(t_0), t_0)|,$$

$$M < M \sum_{k=1}^n |a_k(t_0)| \leq M,$$

что противоречиво.

Отсюда в силу произвольности точки $(-1, t_0)$ следует, что на I_0 решение $u(x, t)$ не достигает своих экстремальных значений.

Таким образом, решение $u(x, t)$ поставленной задачи достигает максимум и минимум лишь на $I_1 \cup I_\infty$.

Теперь докажем единственность решения задачи. Предположим обратное. Пусть существует два различные решения $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$. Рассмотрим их разность: $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, тогда эта функция будет решением следующей задачи:

$$u_{xx} - \operatorname{sgn}(x)u_t = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$u(-1, t) + \sum_{k=1}^n a_k(t)u(x_k, t) = 0, \quad x_k \in I_1, \quad t \in I_0,$$

$$u(x, T) = 0, \quad x \in I_1, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in I_\infty.$$

Так как решение $u(x, t)$ достигает максимум и минимум лишь на $I_1 \cup I_\infty$, то по условию однородной задачи получим, что $u(x, t) = 0$ в области Ω .

Существование решения показано на основе теории интегральных уравнений.

Предположим, что $f(x, t) \in C^{(1,h)}(\overline{\Omega})$, $\mu_2(x) = 0$.

В области Ω_0 рассмотрим задачу A^- : найти решение $u(x, t) \in C(\overline{\Omega_0}) \cap C^{2,1}(\Omega_0)$ уравнения

$$u_{xx} + u_t = f(x, t), \quad (6)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(-1, t) + \sum_{k=1}^n a_k(t) u(x_k, t) = \mu_1(t), \quad t \in I_0, \quad (7)$$

$$u(x, T) = 0, \quad x \in I_1, \quad (8)$$

$$u(0, t) = \tau(t), \quad t \in \bar{I}, \quad (9)$$

причем

$$\tau(T) = \mu_1(T) = 0.$$

Положим

$$u(-1, t) = \psi(t), \quad t \in I_0, \quad (10)$$

Тогда решение уравнения (6), удовлетворяющее условиям (6), (8), (9), (10) имеет вид:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_t^T \tau(\eta) G_{\xi}^{-}(x, t; 0, \eta) d\eta - \int_t^T \tau_0(\eta) G_{\xi}^{-}(x, t; -1, \eta) d\eta + g^{-}(x, t), \\ & (11) \end{aligned}$$

где $G^{-}(x, t; \xi, \eta) = G^{+}(-x, 1-t; -\xi, 1-\eta)$ - функция Грина первой краевой задачи в области Ω_0 , и

$$\begin{aligned} G^{+}(x, t; \xi, \eta) = & \\ = & \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}} \sum \left\{ e^{-\frac{(x-\xi-2\eta)^2}{4(t-\eta)}} - e^{-\frac{(x+\xi-2\eta)^2}{4(t-\eta)}} \right\}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$g^{-}(x, t) = - \int_{-1}^0 d\xi \int_t^T G^{-}(x, t; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\eta. \quad (13)$$

А в области Ω_{∞} рассмотрим задачу A^{+} : определить решение $u(x, t) \in C^1(\Omega_{\infty} \cup I) \cap C^{2,1}(\Omega_{\infty})$ уравнения

$$u_{xx} - u_t = f(x, t), \quad (14)$$

непрерывное вплоть до границы области Ω_{∞} и ограниченное для всех $0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq T$, и удовлетворяющее условиям (4), (9).

Решение этой задачи представляется в виде [10-11]:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} \right) \varphi(\xi) d\xi + \\ & + \int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\eta)}} \tau(\eta) d\eta + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\eta)}} \right) f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (15)$$

Используя формулы (11), (15), существование решения поставленной задачи эквивалентным образом свеем к разрешимости сингулярного интегрального уравнения нормального типа с нулевым индексом [11-12]. Регуляризируя это уравнение мы приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи.

Литература

- [1]. Gevrey M. Sur les equations aux derives partielles du type parabolique. *J.Math.Appl.* 1913. T.9. Sec.6. P.305-475.
- [2]. Gevrey M. Sur les equations aux derives partielles du type parabolique. *J.Math.Appl.* 1914. Sec.4. P.105-137.
- [3]. Кереев А.А. Об одной краевой задаче Жевре для параболического уравнения со знакопеременным разрывом первого рода у коэффициента при производной по времени. *Дифференциальные уравнения*. 1974. Т.Х. №1. С.69-77.
- [4]. Шополов Н.Н. Една гранична задача за смесено параболично уравнение с нелокални начални условия. *1. Год. ВУЗ. Приложна математика*. 1979 (1980). Т.15. №2. С.137-146.
- [5]. Ёринов А.Қ. Параболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. Тошкент. «MUMTOZ SO'Z». 2015. 196 б.
- [6]. Джураев Т.Д., Акбарова М.Х. Нелокальные краевые задачи для смешанно-параболического уравнения. *Узбекский математический журнал*. 1993. №2. С.16-25.
- [7]. Акбарова М.Х. Краевая задача с нелокальными условиями для линейного смешанно – параболического уравнения. *ДАН РУ*. 1994. №7. С. 5-7.
- [8]. Akbarova S, X., Akbarova M, X. A problem of Bitsadze-Samarskiy type for a degenerate parabolic equation of mixed type. *Abstracts of VIII International Scientific Conference*. Samarkand, 2023, September 25-26. P.170.
- [9]. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. Москва. «Мир». 1968. 428 с.
- [10]. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва. МГУ. 2004. 679 с.
- [11]. Салоҳиддинов М. Математик физика тенгламалари. Тошкент. «Ўзбекистон». 2002. 448 б.
- [12]. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Москва. Наука. 1968. 512 с.

To'rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun boshlang'ich masala

Sh.A. Oripov, N, Rahmatullayeva

Farg'ona davlat universiteti

Annotatsiya. Mazkur ish to'rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun Koshi masalasini o'rganishga bag'ishlangan. Masalaning yechimini topish uchun Riman usulidan foydalanilgan. Riman funksiyasi qurilgan va uning yordamida qo'yilgan masala yechimining integral ko'rinishi topilgan.

Kalit so'zlar: Koshi masalasi, to'rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama, Riman usuli, Riman funksiyasi.

Аннотация. Данная работа посвящена исследованию задачи Коши для дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка. Для нахождения решения задачи использован метод Римана. Построена функция Римана, с помощью которой получено интегральное представление решения поставленной задачи.

Ключевые слова: задача Коши, дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка, метод Римана, функция Римана.

Abstract. This paper is devoted to the investigation of the Cauchy problem for a fourth-order partial differential equation. The solution of the problem is obtained using the Riemann method. A Riemann function is constructed, which makes it possible to derive an integral representation of the solution to the posed problem.

Key words: Cauchy problem, fourth-order partial differential equation, Riemann method, Riemann function.

I. Kirish

Bir qator muhim amaliy muammolarni tadqiq etishda klassik bo'lmagan differensial tenglamalar paydo bo'ladi. Matematik fizikaning bunday modellari noklassik deyilib, xususiy hosilali differensial tenglamalar yoki tenglamalar sistemasi shaklida ifodalanadi hamda klassik tiplar – elliptik, parabolik, giperbolik tiplardan biriga mos kelmaydi. Xususan, noklassik modellarga aralash tipdagi tenglamalarni (Trikomi, Gellerstedt tenglamalari), buziladigan tenglamalarni (masalan, Keldish tenglamasi) yoki Sobolev tipidagi tenglamalarni (masalan, Barenblat-Jeltov-Kochina tenglamasi) tavsiflovchi modellar kiradi.

Sobolev tipidagi tenglamalarning muhim sinfi to'rtinchi tartibli Bussineska-Lyav tenglamasidir [1]:

$$\Delta u_{tt}(x, t) - u_{tt} + \Delta u(x, t) = 0$$

bu yerda Δ – Laplas operatori.

A.G.Sveshnikov, A.B.Alshin, M.O.Korpusov, Yu.D.Pletner [2], M.O.Korpusov [3], S.A.Gabov, B.B.Orazov [4], V.I.Jegalov [5], A.N.Mironov, E.A.Utkina va boshqalar ishlarida psevdogiperbolik Bussineska-Lyav tenglamasi uchun boshlang'ich va lokal chegaraviy masalalar yechilishi o'rganilgan. T.D.Jo'raev va A.Sopuyevlar [6] ishlarida ikki o'zgaruvchili umumiy to'rtinchi tartibli chiziqli tenglamani to'liq sinflash va kanonik ko'rinishga keltirish masalalari o'rganilgan.

II. Asosiy qism

Masalaning qo'yilishi. $\Omega = \{(\xi, \eta) : \eta > \xi > 0\}$ sohada

$$L(u) \equiv u_{\xi\xi\eta\eta} - u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} = 0 \quad (1)$$

tenglamaning xarakteristika bo'lmagan $\eta = \xi$ chiziqdagi quyidagi

$$u(\xi, \xi) = f_0(\xi), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\xi} = f_1(\xi), \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial n^2} \right|_{\eta=\xi} = f_2(x), \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial^3 u(\xi, \eta)}{\partial n^3} \right|_{\eta=\xi} = f_3(x), \quad (5)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(\xi, \eta) \in C^4(\Omega)$ regular yechimi topilsin, bu yerda $f_i(\xi) \in C^3(\Omega \cap \{\eta = \xi\})$, $i = \overline{0, 3}$ – berilgan funksiyalar, $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ esa $\eta = \xi$ chiziqqa o'tkazilgan tashqi birlik normal vektor.

Bu masalaning yechimini qurishda Riman usulidan foydalanamiz.

$$RL(u) = Ru_{\xi\xi\eta\eta} - Ru_{\eta\eta} + Ru_{\xi\xi} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } Ru_{\xi\xi\eta\eta} &= (Ru_{\xi\xi\eta})_{\eta} - R_{\eta}u_{\xi\xi\eta} = (Ru_{\xi\xi\eta})_{\eta} - (R_{\eta}u_{\xi\eta})_{\xi} + R_{\xi\eta}u_{\xi\eta} = \\ &= (Ru_{\xi\xi\eta})_{\eta} - (R_{\eta}u_{\xi\eta})_{\xi} + (R_{\xi\eta}u_{\eta})_{\xi} - R_{\xi\xi\eta}u_{\eta} = \\ &= (Ru_{\xi\xi\eta})_{\eta} - (R_{\eta}u_{\xi\eta})_{\xi} + (R_{\xi\eta}u_{\eta})_{\xi} - (R_{\xi\xi\eta}u)_{\eta} + R_{\xi\xi\eta\eta}u = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi}(R_{\xi\eta}u_{\eta} - R_{\eta}u_{\xi\eta}) - \frac{\partial}{\partial \eta}(R_{\xi\xi\eta}u - Ru_{\xi\xi\eta}) + R_{\xi\xi\eta\eta}u; \\ \text{b) } Ru_{\eta\eta} &= (Ru_{\eta})_{\eta} - R_{\eta}u_{\eta} = (Ru_{\eta})_{\eta} - (R_{\eta}u)_{\eta} + R_{\eta\eta}u = \frac{\partial}{\partial \eta}(Ru_{\eta} - R_{\eta}u) + R_{\eta\eta}u; \\ \text{c) } Ru_{\xi\xi} &= (Ru_{\xi})_{\xi} - R_{\xi}u_{\xi} = (Ru_{\xi})_{\xi} - (R_{\xi}u)_{\xi} + R_{\xi\xi}u = \frac{\partial}{\partial \xi}(Ru_{\xi} - R_{\xi}u) + R_{\xi\xi}u; \end{aligned}$$

Topilganlarni (6) tenglamaga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} RL(u) &= \frac{\partial}{\partial \xi}(R_{\xi\eta}u_{\eta} - R_{\eta}u_{\xi\eta}) - \frac{\partial}{\partial \eta}(R_{\xi\xi\eta}u - Ru_{\xi\xi\eta}) + R_{\xi\xi\eta\eta}u - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \eta}(Ru_{\eta} - R_{\eta}u) - R_{\eta\eta}u + \frac{\partial}{\partial \xi}(Ru_{\xi} - R_{\xi}u) + R_{\xi\xi}u; \\ RL(u) &= uL(R) + \frac{\partial}{\partial \xi}(R_{\xi\eta}u_{\eta} - R_{\eta}u_{\xi\eta} + Ru_{\xi} - R_{\xi}u) - \frac{\partial}{\partial \eta}(R_{\xi\xi\eta}u - Ru_{\xi\xi\eta} + Ru_{\eta} - R_{\eta}u); \\ RL(u) - uL(R) &= \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (7)$$

bu yerda $Q = R_{\xi\eta}u_{\eta} - R_{\eta}u_{\xi\eta} + Ru_{\xi} - R_{\xi}u$; $P = R_{\xi\xi\eta}u - Ru_{\xi\xi\eta} + Ru_{\eta} - R_{\eta}u$.

(7) tenglikni Ω_0 soha bo'yicha integrallaymiz:

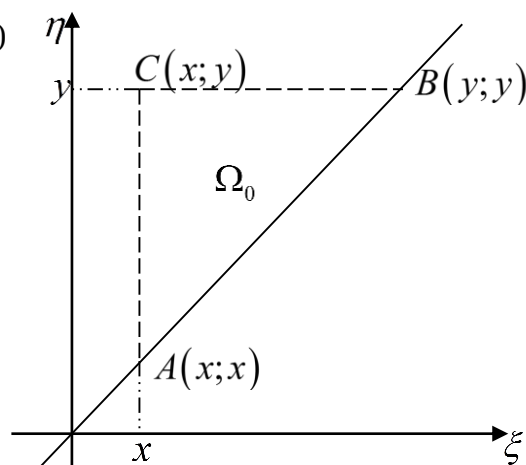
$$\iint_{\Omega_0} [RL(u) - uL(R)] d\xi d\eta = \iint_{\Omega_0} \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \quad (8)$$

Matematik analiz kursidan ma'lum bo'lgan

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = \oint_{\partial D} Pd\xi + Qd\eta$$

Grin formulasiga asosan (8) tenglik quyidagicha bo'ladi:

$$\iint_{\Omega_0} [RL(u) - uL(R)] d\xi d\eta = \oint_{\partial\Omega_0} Pd\xi + Qd\eta \quad (9)$$



(1) tenglamaning $R(x, y; \xi, \eta)$ Riman funksiyasi

deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyaga aytiladi:

1⁰. (x, y) va (ξ, η) o'zgaruvchilar jufti bo'yicha $\Omega \times \Omega$ da $R(x, y; \xi, \eta) \in M$, bu yerda $M = \{R: R \in C'(\bar{\Omega}), R_{xyy}, R_{yxx} \in C(\bar{\Omega}), R_{xyy} \in C(\Omega)\}$, $\Omega = \{(x, y): y > x > 0\}$;

2⁰. Har qanday $(x, y) \in \Omega$ bo'yicha $R(x, y; \xi, \eta)$ funksiya

$$L^*(R) \equiv R_{\xi\xi\eta\eta} + R_{\xi\xi} - R_{\eta\eta} = 0, \quad (10)$$

tenglamani qanoatlantiradi;

3⁰. $\xi = x$, $\eta = y$ xarakteristikalarda quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\xi = x \text{ da: } R(x, y; x, \eta) = 0, \quad R_{\xi}(x, y; x, \eta) = \omega_1(\eta; x, y), \quad (11)$$

$$\eta = y \text{ da: } R(x, y; \xi, y) = 0, \quad R_{\eta}(x, y; \xi, y) = \omega_2(\xi; x, y), \quad (12)$$

bu yerda $\omega_1(\eta; x, y)$ va $\omega_2(\xi; x, y)$ quyidagi Koshi masalasining yechimini ifodalaydi:

$$\omega_{1\eta\eta} + \omega_1 = 0, \quad \omega_1|_{\eta=y} = 0, \quad \omega_{1\eta}|_{\eta=y} = 1, \quad x \leq \eta \leq y$$

$$\omega_{2\xi\xi} - \omega_2 = 0, \quad \omega_2|_{\xi=x} = 0, \quad \omega_{2\xi}|_{\xi=x} = 1, \quad x \leq \xi \leq y.$$

Eslatib o'tamizki, bu masalalar birqiyimatli yechiladi va bu yechimlar mos ravishda quyidagilarga teng:

$$\omega_1(\eta, x, y) = \sin(\eta - y), \quad \omega_2(\xi, x, y) = sh(\xi - x).$$

Izlanayotgan Riman funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$R(x, y; \xi, \eta) = p \cdot K_0\left(1; \frac{3}{2}, 1; \frac{3}{2}, 1; \sigma_1, \sigma_2\right), \quad (13)$$

bu yerda $p = (\xi - x)(\eta - y)$, $\sigma_1 = \frac{(\xi - x)^2}{4}$, $\sigma_2 = -\frac{(\eta - y)^2}{4}$,

$$\begin{aligned} K_0\left(1; \frac{3}{2}, 1; \frac{3}{2}, 1; \sigma_1, \sigma_2\right) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(1)_{m+n}}{(3/2)_m (1)_m (3/2)_n (1)_n} \frac{\sigma_1^m}{m!} \frac{\sigma_2^n}{n!} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sigma_1^m}{(3/2)_m m!} {}_1F_2\left(1+m; \frac{3}{2}, 1; \sigma_2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_2^n}{(3/2)_n n!} {}_1F_2\left(1+n; \frac{3}{2}, 1; \sigma_1\right), \end{aligned}$$

yoki Kampe de Feriet funksiyasi [7], orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$K_0\left(1; \frac{3}{2}, 1; \frac{3}{2}, 1; \sigma_1, \sigma_2\right) = F_{0;2;2}^{1;0;0} \begin{bmatrix} 1; & -; & -; \\ -; & 3/2, 1; & 3/2, 1; \end{bmatrix} \sigma_1, \sigma_2.$$

(1) va (10) ifodalarga ko‘ra (9) tenglikdan $\oint_{\partial\Omega_0} Pd\xi + Qd\eta = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu tenglikdagi integralni soddalashtiraylik.

$$\oint_{\partial\Omega_0} Pd\xi + Qd\eta = \oint_{AB \cup BC \cup CA} Pd\xi + Qd\eta = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 1) \oint_{BC} Pd\xi + Qd\eta &= \int_y^x P|_{\eta=y} d\xi = \int_y^x \left[R_{\xi\xi\eta} u - Ru_{\xi\xi\eta} + Ru_\eta - R_\eta u \right] \Big|_{\eta=y} d\xi = \\ &= \int_y^x \left[u(R_{\xi\xi\eta} - R_\eta) - R(u_{\xi\xi\eta} - u_\eta) \right] \Big|_{\eta=y} d\xi. \end{aligned}$$

(12) shartlarga ko‘ra bu integralning qiymati nolga teng bo‘ladi.

$$\begin{aligned} 2) \oint_{CA} Pd\xi + Qd\eta &= \int_y^x Q|_{\xi=x} d\eta = \int_y^x \left[R_{\xi\eta} u_\eta - R_\eta u_{\xi\eta} + Ru_\xi - R_\xi u \right] \Big|_{\xi=x} d\eta = \\ &= \int_y^x R_{\xi\eta} u_\eta \Big|_{\xi=x} d\eta - \int_y^x R_\eta u_{\xi\eta} \Big|_{\xi=x} d\eta + \int_y^x Ru_\xi \Big|_{\xi=x} d\eta - \int_y^x R_\xi u \Big|_{\xi=x} d\eta. \end{aligned}$$

Bu tenglikdagi 2- va 3-integrallar (11) shartga ko‘ra nolga teng. Demak,

$$\oint_{CA} Pd\xi + Qd\eta = \int_y^x R_{\xi\eta} u_\eta \Big|_{\xi=x} d\eta - \int_y^x R_\xi u \Big|_{\xi=x} d\eta \quad (15)$$

tenglikka egamiz. (15) tenglikning o‘ng tomonidagi 1-integralni bo‘laklab integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \oint_{CA} Pd\xi + Qd\eta &= R_{\xi\eta}(x, y; x, \eta) u(x, \eta) \Big|_{\eta=y}^{\eta=x} - \int_y^x R_{\xi\eta\eta} u \Big|_{\xi=x} d\eta - \int_y^x R_\xi u \Big|_{\xi=x} d\eta = \\ &= R_{\xi\eta}(x, y; x, x) u(x, x) - R_{\xi\eta}(x, y; x, y) u(x, y) - \int_y^x u(R_{\xi\eta\eta} + R_\xi) \Big|_{\xi=x} d\eta = \\ &= \cos(x - y) f_0(x) - u(x, y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \oint_{AB} Pd\xi + Qd\eta &= \int_x^y \left[P + Q \right] \Big|_{\eta=\xi} d\xi = \\ &= \int_x^y \left[R_{\xi\xi\eta} u - Ru_{\xi\xi\eta} + Ru_\eta - R_\eta u + R_{\xi\eta} u_\eta - R_\eta u_{\xi\eta} + Ru_\xi - R_\xi u \right] \Big|_{\eta=\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Yuqoridagi hisoblashlarni e‘tiborga olib, (14) tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$u(x, y) = \cos(x - y) f_0(x) +$$

$$+ \int_x^y \left[R(u_\eta + u_\xi - u_{\xi\xi\eta}) - R_\eta(u + u_{\xi\eta}) - R_\xi u + R_{\xi\eta} u_\eta + R_{\xi\xi\eta} u \right] \Big|_{\eta=\xi} d\xi. \quad (16)$$

Endi $\eta = \xi$ da u , u_ξ , u_η , $u_{\xi\eta}$, $u_{\xi\xi\eta}$ larni (2)–(5) shartlardan foydalanib topamiz.

$$u(\xi, \xi) = f_0(\xi),$$

$$\begin{aligned}
u_{\xi}(\xi, \xi) - u_{\eta}(\xi, \xi) &= \sqrt{2} f_1(\xi), \\
u_{\xi}(\xi, \xi) + u_{\eta}(\xi, \xi) &= f_0'(\xi), \\
u_{\xi\xi}(\xi, \xi) - u_{\eta\eta}(\xi, \xi) &= \sqrt{2} f_1'(\xi), \\
u_{\xi\xi}(\xi, \xi) - 2u_{\xi\eta}(\xi, \xi) + u_{\eta\eta}(\xi, \xi) &= 2f_2(\xi), \\
u_{\xi\xi}(\xi, \xi) + 2u_{\xi\eta}(\xi, \xi) + u_{\eta\eta}(\xi, \xi) &= f_0''(\xi), \\
u_{\xi\xi\xi}(\xi, \xi) - 3u_{\xi\xi\eta}(\xi, \xi) + 3u_{\xi\eta\eta}(\xi, \xi) - u_{\eta\eta\eta}(\xi, \xi) &= 2\sqrt{2} f_3(\xi), \\
u_{\xi\xi\xi}(\xi, \xi) + u_{\xi\xi\eta}(\xi, \xi) - u_{\xi\eta\eta}(\xi, \xi) - u_{\eta\eta\eta}(\xi, \xi) &= \sqrt{2} f_1''(\xi), \\
u_{\xi\xi\xi}(\xi, \xi) + 3u_{\xi\xi\eta}(\xi, \xi) + 3u_{\xi\eta\eta}(\xi, \xi) + u_{\eta\eta\eta}(\xi, \xi) &= f_0'''(\xi), \\
u_{\xi\xi\xi}(\xi, \xi) - u_{\xi\xi\eta}(\xi, \xi) - u_{\xi\eta\eta}(\xi, \xi) + u_{\eta\eta\eta}(\xi, \xi) &= 2f_2'(\xi).
\end{aligned}$$

Yuqoridagilardan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
u_{\xi}(\xi, \xi) &= \frac{\sqrt{2} f_1(\xi) + f_0'(\xi)}{2}, \quad u_{\eta}(\xi, \xi) = \frac{f_0'(\xi) - \sqrt{2} f_1(\xi)}{2}, \\
u_{\xi\eta}(\xi, \xi) &= \frac{f_0''(\xi) - 2f_2(\xi)}{4}, \\
u_{\xi\xi\eta}(\xi, \xi) &= \frac{f_0'''(\xi) + \sqrt{2} f_1'(\xi) - 2f_2'(\xi) - 2\sqrt{2} f_3(\xi)}{4}.
\end{aligned}$$

$$\omega(\sigma_1, \sigma_2) = K_0(a; b, c; b', c'; \sigma_1, \sigma_2) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}}{(b)_m (c)_m (b')_n (c')_n} \frac{\sigma_1^m}{m!} \frac{\sigma_2^n}{n!} \quad \text{qator uchun}$$

quyidagi differensiallash formulalari o'rinli:

- 1) $\frac{\partial}{\partial \sigma_1} K_0(a; b, c; b', c'; \sigma_1, \sigma_2) = \frac{a}{bc} K_0(a+1; b+1, c+1; b', c'; \sigma_1, \sigma_2);$
- 2) $\left(\sigma_1 \frac{\partial}{\partial \sigma_1} + (b-1) \right) K_0(a; b, c; b', c'; \sigma_1, \sigma_2) = (b-1) K_0(a; b-1, c; b', c'; \sigma_1, \sigma_2);$
- 3) $\left(\sigma_1 \frac{\partial^2}{\partial \sigma_1^2} + b \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \right) K_0(a; b, c; b', c'; \sigma_1, \sigma_2) = \frac{a}{c} K_0(a+1; b, c+1; b', c'; \sigma_1, \sigma_2).$

1)–3) lardan foydalanib (16) ifodadagi R_{ξ} , R_{η} , $R_{\xi\eta}$, $R_{\xi\xi\eta}$ hosilalarni hisoblaymiz.

$$\begin{aligned}
R_{\eta} &= 2(\xi - x) \left(\sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_2} + \frac{1}{2} \right) K_0 \left(1; \frac{3}{2}, 1; \frac{3}{2}, 1; \sigma_1, \sigma_2 \right) = (\xi - x) K_0 \left(1; \frac{3}{2}, 1; \frac{1}{2}, 1; \sigma_1, \sigma_2 \right); \\
R_{\xi} &= 2(\eta - y) \left(\sigma_1 \frac{\partial}{\partial \sigma_1} + \frac{1}{2} \right) K_0 \left(1; \frac{3}{2}, 1; \frac{3}{2}, 1; \sigma_1, \sigma_2 \right) = (\eta - y) K_0 \left(1; \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, 1; \sigma_1, \sigma_2 \right); \\
R_{\xi\eta} &= 4 \left(\sigma_1 \frac{\partial}{\partial \sigma_1} + \frac{1}{2} \right) \left(\sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_2} + \frac{1}{2} \right) K_0 \left(1; \frac{3}{2}, 1; \frac{3}{2}, 1; \sigma_1, \sigma_2 \right) = K_0 \left(1; \frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2}, 1; \sigma_1, \sigma_2 \right); \\
R_{\xi\xi\eta} &= 2(\xi - x) \left(\sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_2} + \frac{1}{2} \right) \left(\sigma_1 \frac{\partial^2}{\partial \sigma_1^2} + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \right) K_0 \left(1; \frac{3}{2}, 1; \frac{3}{2}, 1; \sigma_1, \sigma_2 \right) =
\end{aligned}$$

$$=(\xi-x)K_0\left(2;\frac{3}{2},2;\frac{1}{2},1;\sigma_1,\sigma_2\right);$$

Bu tengliklarni (16) formulaga qo'ysak, qo'yilgan Koshi masalasining yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{aligned} u(x,y) = & \cos(x-y)f_0(x) + \\ & + \int_x^y (\xi-x)(\xi-y)K_0(1;3/2,1;3/2,1;\sigma_1,\rho)\Phi_1(\xi)d\xi - \\ & - \int_x^y (\xi-x)K_0(1;3/2,1;1/2,1;\sigma_1,\rho)\Phi_2(\xi)d\xi - \\ & - \int_x^y (\xi-y)K_0(1;1/2,1;3/2,1;\sigma_1,\rho)f_0(\xi)d\xi + \\ & + \int_x^y K_0\left(1;\frac{1}{2},1;\frac{1}{2},1;\sigma_1,\rho\right)\Phi_3(\xi)d\xi + \int_x^y (\xi-x)K_0(2;3/2,2;1/2,1;\sigma_1,\rho)f_0(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (17)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \frac{1}{4} \left[2f_0'(\xi) - 2\sqrt{2}f_1(\xi) + 2\sqrt{2}f_1(\xi) + 2f_0'(\xi) - \right. \\ & \left. - f_0'''(\xi) - \sqrt{2}f_1'(\xi) + 2f_2'(\xi) + 2\sqrt{2}f_3(\xi) \right]; \\ \Phi_2(\xi) = & \frac{1}{4} (4f_0(\xi) + f_0''(\xi) - 2f_2(\xi)), \quad \Phi_3(\xi) = \frac{1}{2} (f_0'(\xi) - \sqrt{2}f_1(\xi)), \quad \rho = -\frac{(\xi-y)^2}{4}. \end{aligned}$$

Masala yechimining yagonaligi Riman funksiyasining yagonaligidan kelib chiqadi. Mavjudligi esa konstruktiv isbotlangan.

Teorema. Agar $f_i(\xi) \in C^3(\Omega \cap \{\eta = \xi\})$, $i = \overline{0,3}$ bo'lsa, u holda Koshi masalasining yechimi mavjud va yagona bo'lib, u (17) ko'rinishda bo'ladi.

Adabiyotlar

- [1]. Соболев С.Л. Об одной краевой задаче математической физики. Изв.АН СССР. Сер.Матем. – 1954. –Т.18, №2. –С.3-50
- [2]. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнение соболевского типа. –М.: Физматлит, 2007
- [3]. Корпусов М.О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. –М.: Либрокком, 2011
- [4]. С.А.Габов, Б.Б.Оразов. Об уравнении $\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u_{xx}-u]+u_{xx}=0$ и некоторых связанных с ним задачах. // Ж.вычисл. матем. и матем. физ., 1986, том 26, номер 1, 92–102.
- [5]. В.И.Жегалов. Об одной задаче для обобщенного уравнения Буссинеска–Лява. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, № 4. С. 771–776.
- [6]. Т.Д.Джураев, А.Сопуев. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент: “Фан”, 2000.
- [7]. Н.Bateman and A.Erdelyi, *High Transendent Functions*. New York: McGraw-Hill, 1953.

Π-STRATEGY IN A PURSUIT DIFFERENTIAL GAME WITH DIFFERENT CONSTRAINTS

B.I.Juraev, R.O.Uraimxudjaeva

Andijan state university, 170100 Andijan, Uzbekistan.

Abstract. In this work, we consider a pursuit problem in a simple motion differential game when geometric and an exponential integral constraints are imposed on controls of a Pursuer and an Evader. In order to solve the pursuit problem, the parallel approach strategy (the Π-strategy) for the Pursuer is constructed, and sufficient conditions of pursuit are obtained.

Keywords: Differential game, pursuer, evader, pursuit, geometrical constraint, integral constraint, strategy, guaranteed capture time.

Аннотация. В настоящей статье мы рассматриваем задачи преследования в простой дифференциальной игре движения, когда управления преследователя и убегающего подчиняются геометрическим и экспоненциальным интегральным ограничениям. Для решения задачи преследования строится стратегия параллельной сходимости (Π-стратегия) для преследователя и получаются достаточные условия преследования.

Ключевые слова: Дифференциальные игры, преследователь, убегающий, преследование, геометрическое ограничение, интегральное ограничение, стратегия, гарантированное время захвата.

Annotatsiya. Bu ishda, sodda harakatli quvish differensial o'yini, quvlovchi va qochuvchining boshqaruvlari geometrik va eksponensial integral chegaralanishlar qo'yilgan holda ko'rib chiqilgan. Quvish masalasini yechishda, quvlovchining parallel yaqinlashish strategiyasi (Π-strategiya) qurilgan, quvishning yetarli shartlari aniqlangan.

Kalit so'zlar: Differensial o'yin, quvlovchi, qochuvchi, quvish, geometrik chegaralanish, integral chegaralanish, strategiya, kafolatlangan tutish vaqti.

INTRODUCTION

The theory of differential games was began to explore systematically by the American scientist R.Isaacs [1], and in 1965, his monograph entitled "Differential Games" was published. In this monograph, many differential game problems are investigated, and a number of new problems for the further research were offered. These problems have been widely studied by world scientists so far. Besides, L.S.Pontryagin [2], N.N.Krasovskii [3], A.Friedman [4], L.A.Petrosyan [5], N.Yu.Satimov [6], A.A.Azamov [7], B.N.Pshenichnii [8], A.I.Subbotin [9], and other mathematician scientists are considered as the fundamental founders of the theory of differential games, and they made their great contributions to the development of this field.

The "Life-line" differential game problem, which is one of the intriguing problems proposed in the monograph of R.Isaacs [1], was first solved for a simple motion differential game by L.A.Petrosyan [5] using the method of parallel approach, and this method is also called the parallel pursuit strategy (briefly, Π-strategy). Later on, A.A.Azamov [7]

gave an analytical solution of the "Life-line" problem for a differential game with multi-pursuer and one evader. Employing ideas of the Π-strategy and L.S.Pontryagin's [2] first direct method A.A.Chikrii [10] generalized the method of Π-strategy for linear systems. Subsequently, the Π-strategy served as the basis for the development of methods of pursuit in differential games with multiple pursuers.

Differential games with various types of constraints set apart from other games under the same type of constraints because of simultaneous physical properties and special constructions of strategies. The pursuit and evasion problems with different constraints were considered in comparatively few works, for instance, in [11, 12]. Hence, the more researches on such kinds of problems contribute to extensive the class of new problems in the theory of differential games. For example, B.T. Samatov pioneered to use the new types of constraints, e.g. linear constraint [13], Gronwall type constraint [14], Langenhop type constraint [15]

Statement of the problems

Suppose that in R^n controlled object P called the Pursuer, chases another controlled object E called the Evader. Denote by x the position of the Pursuer and denote by y the position of the Evader in R^n . In the present work, we consider the pursuit-evasion problems when the objects move in accordance with the equations

$$P: \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$E: \quad \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \quad (2)$$

respectively, where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$; x_0 and y_0 are the initial position of the objects accordingly, and it is assumed that $x_0 \neq y_0$; u and v are the control parameters of the objects correspondingly, and they denote the velocity vectors which depend on the time $t \geq 0$. We regard the control parameters u and v as measurable functions $u(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $v(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectively.

On the control parameter u , we impose the constraint [16]

$$\int_0^t |u(s)|^2 ds \leq \alpha^2 t \quad (3)$$

where α is given positive number. We denote by U the set of all measurable functions $u(\cdot)$ such that satisfy the geometric constraint.

Similarly, on the control parameter v , we impose the constraint [17]

$$\int_0^t |v(s)|^2 ds \leq \frac{\sigma_1^2}{2l} (1 - e^{-2lt}) + \sigma_0^2 \quad (4)$$

where $\sigma_0 > 0$, $\sigma_1 > 0$ and $l > 0$ are positive numbers. We denote by V the set of all measurable functions $v(\cdot)$ such that satisfy an exponential integral constraint.

Definition 1. The functions $u(\cdot) = (u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_n(\cdot))$ and $v(\cdot) = (v_1(\cdot), v_2(\cdot), \dots, v_n(\cdot))$ are said to be admissible control functions of pursuer and evader, respectively if (1) and (2) are satisfied for $u(\cdot)$ and $v(\cdot)$ correspondingly.

Definition 2. If $u(\cdot) \in U$ and $v(\cdot) \in V$, then by virtue of the equations (1), (2), the pairs $(x_0, u(\cdot))$ and $(y_0, v(\cdot))$ generate the motion trajectories

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(s) ds, \quad y(t) = y_0 + \int_0^t v(s) ds$$

of the objects P and E accordingly.

The chief target of the object P (Pursuer) is to capture the object E (Evader), i.e., to achieve the equality $x(T) = y(T)$ at some finite moment $T > 0$ (Pursuit Game). While the object E struggles not to be captured (Evasion Game), i.e., to keep the condition $x(t) \neq y(t)$ for every $t, t \geq 0$, or to lengthen the encounter time T .

Definition 3. We say the strategy $\mathbf{u}(t, v)$ the parallel approach strategy, or in short, Π -strategy if, for an control $v(\cdot) \in V$, the solution $z(t)$ of the initial value problem

$$\dot{z} = \mathbf{u}(t, v) - v(t), \quad z(0) = \dot{z}_0$$

may be represented as

$$z(t) = z_0 \Gamma(t, v(\cdot)), \quad \Gamma(0, v(\cdot)) = 1,$$

where $\Gamma(t, v(\cdot))$ is the scalar function of $t, t \geq 0$, and it is generally called the approach function in the pursuit game.

Definition 4. We say that a strategy $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, v)$ guarantees capture at time moment $T(\mathbf{u})$ if at some time $t_* \in [0, T(\mathbf{u})]$ the equality $x(t_*) = y(t_*)$ is satisfied for any control $v(\cdot), v(\cdot) \in V$, where $x(t)$ and $y(t)$ are the solutions of the initial value problems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{u}(t, v), & x(0) &= x_0 \\ \dot{y} &= v(t), & y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

where $t \geq 0$.

Solution of the pursuit game

According to the equations (1), (2) for any $v(\cdot) \in V$ and $\mathbf{u}(v(\cdot)) \in U$ the pairs $(x_0, \mathbf{u}(v(\cdot)))$ and $(y_0, v(\cdot))$ generate the trajectories

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \mathbf{u}(s, v(s)) ds \quad (5)$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v(s) ds \quad (6)$$

of the Pursuer and Evader respectively.

Definition 5. We say the function [17]

$$\mathbf{u}(t, v) = v - \gamma(t, v)\xi_0 \quad (7)$$

the Π -strategy in the Game of Pursuit, where

$$\gamma(t, v) = \langle v, \xi_0 \rangle - \frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} + \sqrt{\left(\langle v, \xi_0 \rangle - \frac{\sigma_0^2}{2|z_0|}\right)^2 + \alpha^2 - \sigma_1^2 e^{-2lt}} \quad (8)$$

$\xi_0 = \frac{z_0}{|z_0|}$, $z_0 = x_0 - y_0$ and $\langle v, \xi_0 \rangle$ means the inner product of the vectors v and ξ_0 in R^n . It is worth noting that the function $\gamma(t, v)$ is usually called the resolving function.

Proposition. If $\alpha > \sigma_1$, then for any pair (t, v) : $R_+^n \times V$:

- a) $\gamma(t, v)$ function is defined, continuous and non-negative;
- b) the equality

$$|\mathbf{u}(t, v)|^2 = |v|^2 - \frac{\sigma_0^2}{|z_0|} \gamma(t, v) + \alpha^2 - \sigma_1^2 e^{-2lt} \quad (8a)$$

is satisfied.

Lemma. Let $\alpha > \sigma_1$, then the equation [17]

$$\sqrt{F(t) + G(t)} - \sqrt{F(t)} = |z_0| \quad (9)$$

has at least one positive root in respect to $t, t \geq 0$ where

$$F(t) = t \left(\frac{\sigma_1^2}{2l} (1 - e^{-2lt}) + \sigma_0^2 \right), \quad G(t) = (\alpha - \sigma_1^2) \left(\frac{1 - e^{-lt}}{l} \right)^2 - \sigma_0^2 t.$$

Proof. From (9) let's write the following function down:

$$\Lambda(t) = \sqrt{F(t) + G(t)} - \sqrt{F(t)} - |z_0|$$

Consider below some properties of $\Lambda(t)$, i.e.,

- a) $\Lambda(0) = -|z_0|$;
- b) take the limit of $\Lambda(t)$ as $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{F(t) + G(t)} - \sqrt{F(t)} - |z_0| \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{G(t)}{\sqrt{F(t) + G(t)} + \sqrt{F(t)}} - |z_0| \right) = +\infty.\end{aligned}$$

According to the above properties of $\Lambda(t)$, there can be found some $\tau \in [0, +\infty)$ that generates $\Gamma(\tau) = 0$. This completes the proof.

In the Game of Pursuit, we call the smallest positive root of (9) the guaranteed capture time and denote it by T .

Theorem. Let $\alpha > \sigma_1$. Then Π -strategy guarantees realization of capture on the time interval $[0, T]$.

Proof. Let's suppose that the Evader chooses any arbitrary control $v(\cdot) \in V$ and the Pursuer realizes the Π -strategy (7). Then from (5), (6) and from the denotation $z(t) = x(t) - y(t)$, we generate the function

$$z(t) = z_0 + \int_0^t (\mathbf{u}(s, v(s)) - v(s)) ds \quad (10)$$

Considering the form of (7), the function (10) can be rewritten as

$$z(t) = z_0 \Gamma(t, v(\cdot)), \quad (11)$$

where

$$\Gamma(t, v(\cdot)) = 1 - \frac{1}{|z_0|} \int_0^t \gamma(s, v(s)) ds.$$

Now, analyze the nature of decay of the convergence function $\Gamma(t, v(\cdot))$ with respect to t . Obviously, the function $\Gamma(t, v(\cdot))$ is continuous and monotonically decreasing with respect to t , $t \geq 0$, and therefore, in view of (8), the following estimation holds:

$$\begin{aligned}\Gamma(t, v(\cdot)) &= 1 - \frac{1}{|z_0|} \int_0^t \left[\langle v, \xi_0 \rangle - \frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} + \sqrt{\left(\langle v, \xi_0 \rangle - \frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} \right)^2 + \alpha^2 - \sigma_1^2 e^{-2ls}} \right] ds \leq \\ &\leq 1 - \frac{1}{|z_0|} \int_0^t \left[-\left(\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} + |v(s)| \right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} + |v(s)| \right)^2 + \alpha^2 - \sigma_1^2 e^{-2ls}} \right] ds = \\ &= 1 - \frac{1}{|z_0|} \int_0^t e^{-ls} \left[e^{ls} \left(\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} + |v(s)| \right) + \sqrt{\left(e^{ls} \left(\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} + |v(s)| \right) \right)^2 + \alpha^2 - \sigma_1^2} \right] ds,\end{aligned}$$

or

$$\Gamma(t, v(\cdot)) \leq 1 - \frac{1}{|z_0|} \int_0^t \psi(s) \varphi(\omega(s)) ds, \quad (12)$$

where

$$\psi(s) = e^{-ls}, \quad \omega(s) = e^{ls} \left(\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} + |v(s)| \right), \quad \varphi(\omega) = \omega + \sqrt{\omega^2 + \alpha^2 - \sigma_1^2}.$$

Since $\varphi(\omega)$ is a convex function ($\ddot{\varphi}(\omega) > 0$) with ω and $\psi: [0, +\infty] \rightarrow (0, 1]$ is integrable, the Jensen inequality [17]

$$\int_0^t \psi(s) \varphi(\omega(s)) ds \geq \int_0^t \psi(s) ds \varphi\left(\frac{\int_0^t \psi(s) \omega(s) ds}{\int_0^t \psi(s) ds}\right)$$

can be applied to the integral in (12). Then for the right side of this Jensen inequality and from the definitions of the functions $\psi(s)$, $\omega(s)$ and $\varphi(\omega)$ we have

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi(s) ds \varphi\left(\frac{\int_0^t \psi(s) \omega(s) ds}{\int_0^t \psi(s) ds}\right) &= - \int_0^t \left(\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} + |v(s)| \right) ds + \\ &+ \sqrt{\left(\int_0^t \left(\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} + |v(s)| \right) ds \right)^2 + \frac{\alpha^2 - \sigma_1^2}{l^2} (1 - e^{-lt})^2} \end{aligned}$$

Consequently, from (12) we get

$$\Gamma(t, v(\cdot)) \leq 1 - \frac{1}{|z_0|} \left[-\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} t - p(t) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} t + p(t) \right)^2 + (\alpha^2 - \sigma_1^2) \left(\frac{1 - e^{-lt}}{l} \right)^2} \right] \quad (13)$$

Where $p(t) = \int_0^t |v(s)| ds$. The function

$$f(t, p) = -\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} t - p + \sqrt{\left(\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} t + p \right)^2 + (\alpha^2 - \sigma_1^2) \left(\frac{1 - e^{-lt}}{l} \right)^2}$$

which is on the right-hand side of (13), is monotonically decreasing with respect to p . Taking into account the Cauchy–Bunyakovskii inequality and constraint (4), we have

$$\int_0^t |v(s)| ds \leq \sqrt{t} \left(\int_0^t |v(s)|^2 ds \right)^{1/2} \leq \sqrt{F(t)}$$

Then, from these inequalities and from the property of monotonically decreasing function $f(t, p)$, we obtain an inequality of the form

$$f(t, p(t)) \geq -\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} t - \sqrt{F(t)} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} t + \sqrt{F(t)} \right)^2 + (\alpha^2 - \sigma_1^2) \left(\frac{1 - e^{-lt}}{l} \right)^2}$$

for $t \geq 0$. Thus, by virtue of the last inequality, from (12) we obtain

$$\Gamma(t, v(\cdot)) \leq \Gamma(t) \quad (14)$$

where

$$\Gamma(t) = 1 - \frac{1}{|z_0|} \left[-\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} t - \sqrt{F(t)} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} t + \sqrt{F(t)} \right)^2 + (\alpha^2 - \sigma_1^2) \left(\frac{1 - e^{-lt}}{l} \right)^2} \right]$$

Let us show the equivalence of the equalities $\Gamma(t) = 0$ and (9). From the latter and from the form $\Gamma(t)$, it easily follows that

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} t + \sqrt{F(t)} \right)^2 + (\alpha^2 - \sigma_1^2) \left(\frac{1 - e^{-lt}}{l} \right)^2} = |z_0| + \frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} t + \sqrt{F(t)}$$

Multiplying this equality on both sides by the conjugate part of the left side we have

$$(\alpha^2 - \sigma_1^2) \left(\frac{1 - e^{-lt}}{l} \right)^2 = |z_0| \left[\sqrt{\left(\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} t + \sqrt{F(t)} \right)^2 + (\alpha^2 - \sigma_1^2) \left(\frac{1 - e^{-lt}}{l} \right)^2} + \frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} t + \sqrt{F(t)} \right]$$

$$\frac{(\alpha^2 - \sigma_1^2) \left(\frac{1 - e^{-lt}}{l} \right)^2}{|z_0|} - \frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} t - \sqrt{F(t)} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} t + \sqrt{F(t)} \right)^2 + (\alpha^2 - \sigma_1^2) \left(\frac{1 - e^{-lt}}{l} \right)^2}$$

Squaring the latter on both sides, we get

$$(\alpha^2 - \sigma_1^2) \left(\frac{1 - e^{-lt}}{l} \right)^2 - 2|z_0| \left(\frac{\sigma_0^2}{2|z_0|} t + \sqrt{F(t)} \right) = |z_0|^2$$

We find

$$|z_0|^2 + 2|z_0|\sqrt{F(t)} - G(t) = 0$$

whence (9).

Now, by virtue of Lemma, there exists a time T such that $\Gamma(T) = 0$. Based on (14) there exists some time $\eta \in [0, T]$ which gives the result $\Gamma(\eta, v(\cdot)) = 0$ and thereby, by virtue of (11) we have $z(\eta) = 0$, or, more precisely, $x(\eta) = y(\eta)$.

And now, we will have to prove the admissibility of the strategy (7) for all $t \in [0, \eta]$. To do this, suppose that the Evader picks an arbitrary control $v(\cdot) \in V$. Then taking the integral of both sides of (8a) and considering (4) we obtain the relations

$$\begin{aligned} \int_0^\eta |\mathbf{u}(s, v(s))|^2 ds &= \int_0^\eta |v(s)|^2 ds - \frac{\sigma_0^2}{|z_0|} \int_0^\eta \gamma(s, v(s)) ds + \alpha^2 t - \\ &- \sigma_1^2 \int_0^\eta e^{-2ls} ds \leq \frac{\sigma_1^2}{2l} (1 - e^{-2l\eta}) + \sigma_0^2 - \sigma_0^2 + \alpha^2 t - \\ &- \frac{\sigma_1^2}{2l} (1 - e^{-2l\eta}) \leq \alpha^2 t \\ &\int_0^\eta |\mathbf{u}(s, v(s))|^2 ds \leq \alpha^2 t. \end{aligned}$$

This completes the proof of Theorem 1.

CONCLUSIONS

In the paper, we investigate a pursuit problem in a simple motion differential game when geometric and an exponential integral constraints are imposed on controls of a Pursuer and an Evader. In order to solve the pursuit problem, the parallel approach strategy (the Π -strategy) for the Pursuer is constructed, and sufficient conditions of pursuit are obtained.

REFERENCES

- [1] Isaacs R. Differential Games. John Wiley and Sons, (1965);
- [2] Pontryagin L.S. Selected Works, MAKS Press, Moscow, (2004);
- [3] Krasovskii N.N. Game Problems of Contact of Motions. Nauka, (1970);
- [4] Friedman A. Differential Games. New York, Wiley Inter Science, (1971);
- [5] Petrosyan L.A. Differential games of pursuit. Series on optimization. World Scientific Publishing, Singapore, 2. 326 p. (1993);
- [6] Satimov N.Yu. Methods of solving of pursuit problem in differential games, Tashkent: NUUZ, (2003);
- [7] Azamov A. On the quality problem for simple pursuit games with constraint. Publ.Sofia: Serdica Bulgariacae math. 1(12), pp. 38–43. (1986);
- [8] Pshenichnii B.N. Simple pursuit by several objects. Cybernetics and System Analysis. 12(3), pp. 484-485. (1976);
- [9] Subbotin A.I. Generalization of the Main Equation of Differential Game Theory. Journal of Optimization Theory and Applications. 43(1), pp. 103–133. (1984);
- [10] Chikrii A.A. Conflict-Controlled Processes, Kluwer, Dordrecht, (1997);
- [11] Kornev D.V, Lukoyanov N.Yu. On a minimax control problem for a positional functional under geometric and integral constraints on control actions. Proc. Steklov Inst. Math. Vol.293, pp. 85-100. (2016);
- [12] Ostapenko V.V, Ryzhkova I.L. Linear differential games with diverse integral constraints. Syst. Res. Inform. Technol. Vol.1, pp. 141-153. (2002);
- [13] Samatov B.T. The Π -strategy in a differential game with linear control constraints. J.Appl.Maths and Mechs. Vol.78, Issue 3, pp. 258-263. (2014);
- [14] Samatov B.T, Ibragimov G.I, Khodjibayeva I.V. Pursuit-evasion differential games with the Gronwall type constraints on controls. Ural Mathematical Journal. Vol.5, Issue 1, pp. 1-13. (2019);
- [15] Samatov B.T, Umaraliyeva N.T, Uralova S.I. Differential Games with the Langenhof Type Constrains on Controls. Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol.42, Issue 12, pp. 2942-2951. (2021);
- [16] Samatov B.T., Juraev B.I. Pursuit-evasion problems with a constraint for energy expenditure of velocity. Uzbek Mathematical Journal. Tashkent. Vol. 66, Issue 4, pp. 146-155. (2022);
- [17] Samatov B.T., Horilov M.A., Juraev B.I. Π -strategy for a differential game of pursuit with integral constraints of a generalized type. Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. Vol. 33, Issue 2, pp. 293-311. (2023);

A pursuit–evasion differential game for players with inertial motion under Gronwall type constraints on controls.

A.X.Akbarov, S.Ma'rufjonova

Andijan State University named after Z. M. Babur, 129, University Street, Andijan, Uzbekistan, 170100

Abstract: This study develops a Π -strategy for the inertial motion pursuit problem when players' control functions belong to different Gronwall-type constraint classes, and establishes sufficient conditions for capture. A control strategy for the Evader is also proposed, with conditions ensuring evasion. Additionally, the attainability domains of both players are constructed, along with their time-dependent inclusion conditions. These results extend the work of R. Isaacs, L. A. Petrosyan, B. N. Pshenichnyi, A. A. Chirii, A. A. Azamov, and others.

Keywords: differential game, Gronwall's inequality, pursuit, evasion, optimal strategy, capture time.

Аннотация: В данной работе разрабатывается Π -стратегия для задачи преследования при инерционном движении, когда управляющие функции игроков принадлежат различным классам ограничений типа Гронуолла, и устанавливаются достаточные условия захвата. Предлагается также стратегия управления для убегающего, при которой получены условия уклонения. Кроме того, строятся области достижимости игроков и формулируются условия их вложения во времени. Полученные результаты развивают работы Р. Айзека, Л. А. Петросяна, Б. Н. Пшеничного, А. А. Чирия, А. А. Азамова и других исследователей.

Ключевые слова: дифференциальная игра, неравенство Гронуолла, преследование, убежание, оптимальная стратегия, время поимки.

I. Introduction.

According to the fundamental approaches of Pontryagin and Krasovskii, a differential game can be viewed as a control problem from the perspective of either the pursuer or the evader. In this sense, it reduces to either a pursuit (approach) or an evasion (escape) problem. In this paper, we focus mainly on the pursuit problem.

The concept of differential games was introduced by Isaacs and has been widely studied since the 1960s, with important contributions from many researchers, including Pontryagin, Krasovskii, Bercovitz, Elliott and Kalton, Fleming, Friedman, Hajek, Petrosyan, and others.

In Isaacs' work, several specific problems were proposed, including the life-line problem. For the case of geometric constraints on controls, this problem was extensively studied by Petrosyan using piecewise constant controls that implement a parallel approach strategy, later known as the Π -strategy. This approach also influenced the development of pursuit methods in games with multiple pursuers. Differential games with integral constraints have also been considered, though less extensively than those with geometric constraints. Interception problems in dynamic flow fields have also been investigated.

Typically, control functions are subject to geometric, integral, or mixed constraints. However, in some applied settings, such as

ecological and engineering problems, differential-type constraints also arise.

In the work of B.T. Samatov, G.I. Ibragimov and I.V. Hodjibayeva, the notion of Gr-constraint (Gronwall type constraint) on controls of players, which expresses more general form of geometric constraints, is first introduced. In the present work, a pursuit–evasion differential game with Gr-constraints is considered for more generalized cases. This paper studies inertial movements pursuit–evasion game with Gronwall-type constraints on the players' controls, determines the pursuit time, and constructs strategies.

II. Main part.

Assume that in the space $\mathbb{R}^n$ a controlled object P , called a pursuer, chases another object E , called an evader. Denote by x a state of the pursuer and by y that of the evader in $\mathbb{R}^n$.

Let the motion dynamics of the players be generated by the following differential equations and initial conditions respectively:

$$P: \ddot{x} = u, \quad x(0) = x_{10}, \quad \dot{x}(0) = x_{11}, \quad (1)$$

$$E: \ddot{y} = v, \quad y(0) = y_{10}, \quad \dot{y}(0) = y_{11}, \quad (2)$$

where $x, y, x_{10}, y_{10}, x_{11}, y_{11}, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; x_{10} and y_{10} are initial states of the players, and x_{11} and y_{11} are their initial velocity vectors, respectively. We suppose that $x_{10} \neq y_{10}$ and $x_{11} \neq y_{11}$.

Here the temporal variation of u must be a measurable function $u(\cdot):[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}^n$ and we impose a Gronwall type constraint on this vector-function (briefly, Gr -constraint) in the form

$$|u(t)|^2 \leq \rho^2 + 2k \int_0^t |u(s)|^2 ds, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

where ρ are nonnegative numbers and k is positive number.

In a similar way, the temporal variation of v must be a measurable function $v(\cdot):[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}^n$, and we impose on this vector-function a Gr -constraint in the form

$$|v(t)|^2 \leq \sigma^2 + 2k \int_0^t |v(s)|^2 ds, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

where σ are nonnegative numbers and k is positive number.

The control parameters of the players are the acceleration vectors u and v , which depend on time $t \geq 0$. We denote by U_{Gr} and V_{Gr} the set of all control parameters u and v satisfying conditions (3) and (4), respectively.

Definition 1. We call the measurable function $u(\cdot)$ ($v(\cdot)$) that satisfies the condition (3) (the condition (4)) an admissible control of the pursuer (the evader) of the class U_{Gr} (the class V_{Gr}), where the pair of classes of admissible controls introduced (U_{Gr}, V_{Gr}) defines a differential game.

By means of the equations (1) and (2), each triplet $(x_{10}, x_{11}, u(\cdot))$ and $(y_{10}, y_{11}, v(\cdot))$ generates the trajectories of motion

$$x(t) = x_{10} + x_{11}t + \int_0^t (t-s)u(s)ds \quad (5)$$

$$y(t) = y_{10} + y_{11}t + \int_0^t (t-s)v(s)ds. \quad (6)$$

of the pursuer and evader respectively.

We use the following statement.

Lemma 1. (Gronwall's inequality, see [27]). If

$$|\gamma(t)|^2 \leq \alpha^2 + 2k \int_0^t |\gamma(s)|^2 ds,$$

then $|\gamma(t)| \leq \alpha e^{kt}$, where $\gamma(t)$, $t \geq 0$, is a measurable function; α and k are non-negative numbers.

By Lemma 1, if $u(\cdot) \in U_{Gr}$ and $v(\cdot) \in V_{Gr}$, then

$$|u(t)| \leq \rho e^{kt}, \quad |v(t)| \leq \sigma e^{kt}, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

It can be easily presented that the converse is not satisfied, that is, the inequalities (7) do not mean the inequalities (3) and (4). To define the notions of optimal strategies of the players and optimal pursuit time, we will consider two games.

Suppose that a closed subset M called a lifeline is given in the space $\mathbb{R}^n$. The main goal of a pursuer P , is to catch an evader E , that is, to achieve the equality $x(t^*) = y(t^*)$ at some time t^* , $t^* > 0$, while the evader remains in the zone $\mathbb{R}^n \setminus M$. The goal of the evader is to reach the zone M before being caught by the pursuer or to maintain the relation $x(t) \neq y(t)$ for all $t, t > 0$. We should note that M does not restrict the motion of the pursuer. Further, it is assumed that the initial states x_{10} and y_{10} are given under the conditions $x_{10} \neq y_{10}$ and $y_{10} \notin M$.

It is known that control functions depending only on the time parameter $t, t > 0$, are insufficient for the pursuer to solve the pursuit problem, and suitable types of control must be strategies. There are several methods for defining such a concept. Below we will give some concepts to define.

First, we introduce the following notation:

$$z(t) = x(t) - y(t), \quad z(0) = z_{10} = x_{10} - y_{10}, \\ \dot{z}(0) = z_{11} = x_{11} - y_{11}. \quad (8)$$

Then according to (1), (2) and (8), we get the initial value problem

$$\ddot{z} = u - v, \quad z(0) = z_{10}, \quad \dot{z}(0) = z_{11}. \quad (9)$$

Consequently, as an alternative to the game (1)–(4), we have generated the game (3), (4), (9), or for brevity, the game (U_{Gr}, V_{Gr}) .

Later, the symbol S_μ will be used to denote the ball of a radius μ centered at the origin in $\mathbb{R}^n$.

Definition 2. It is said that a function $u: \mathbb{R}^n \times V_{Gr} \rightarrow U_{Gr}$ is the strategy of the Pursuer if:

i) for any control $v(\cdot) \in V_{Gr}$, the inclusion $u(\cdot) = \mathbf{u}(z_{10}, v(\cdot)) \in U_{Gr}$ is satisfied. Here, we term the function $u(\cdot) = \mathbf{u}(z_{10}, v(\cdot))$ as the *implementation of the strategy* $\mathbf{u}(\cdot)$;

ii) for each $v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in V_{Gr}$ and for all $t \in [0, +\infty)$, the equality $v_1(\varepsilon) = v_2(\varepsilon)$ is reasonable almost everywhere on $[0, t]$, then $u_1(\varepsilon) = u_2(\varepsilon)$ takes place almost everywhere on the same interval, where $u_i(\cdot) = \mathbf{u}(z_{10}, v_i(\cdot))$, $i = 1, 2$.

A special case of the strategy can be given by a mapping $\mathbf{u}: \mathbb{R}^n \times S_E \rightarrow S_P$, which is a Borel measurable function with respect to v , $v \in S_E$.

Definition 3. In the game (U_{Gr}, V_{Gr}) , we say that a strategy $\mathbf{u} = \mathbf{u}(z_{10}, v)$ is the *parallel pursuit strategy*, or the Π -strategy for short, if, for any $v(\cdot) \in V_{Gr}$, the solution $z(t)$ of the Cauchy problem

$\ddot{z} = \mathbf{u}(z_{10}, v(t)) - v(t)$, $z(0) = z_{10}$, $\dot{z}(0) = 0$ (10) can be expressed as

$$z(t) = z_{10} \Lambda(t, v(\cdot)), \quad \Lambda(0, v(\cdot)) = 1, \quad (11)$$

where $\Lambda(t, v(\cdot))$ is a scalar function with respect to $t \in [0, +\infty)$, and it is called the *convergence function of the objects*.

Definition 4. We say that the Π -strategy *guarantees to catch the object* E on the time interval $[0, t_{Gr}]$ if, for every $v(\cdot) \in V_{Gr}$:

i) there exists such a time moment $t^*, t^* \in [0, t_{Gr}]$ that generates the equality $z(t^*) = 0$;

ii) the inclusion $\mathbf{u}(z_{10}, v(\cdot)) \in U_{Gr}$ is fulfilled on the time interval $[0, t^*]$.

Here the number t_{Gr} is called the *guaranteed pursuit (or capture) time*.

Definition 5. In the game (U_{Gr}, V_{Gr}) , we call a control $v_{Gr}: [0, +\infty) \rightarrow V_{Gr}$ the *strategy of the object* E if $v_{Gr}(t)$ is a Lebesgue measurable function in respect to t , $t \in [0, +\infty)$.

And now, we will define the game (U_{Gr}, V_{Gr}) from the vantage point of the object E .

Definition 6. It is said that a strategy $v_{Gr}(\cdot) \in V_{Gr}$ *guarantees to escape* if, for any $u(\cdot) \in U_{Gr}$, the solution $z(t)$ of the Cauchy problem

$$\ddot{z} = u(t) - v_{Gr}(t), \quad z(0) = z_{10}, \quad \dot{z}(0) = 0 \quad (12)$$

is nonzero, viz, $z(t) \neq 0$ for all $t \in [0, +\infty)$.

The next sections of the Chapter are intended to be individually discussed the following problems for a differential game with the inertial motion dynamics (1)–(2) when Gr -constraints (3)–(4) are enforced on the controls of the objects P and E correspondingly:

Problem 1. Problem of Pursuit: define the Π_{Gr} -strategy for the object P , and identify solvability conditions of the Problem of Pursuit.

Problem 2. Problem of Evasion: prescribe an admissible control for the object E , and determine solvability conditions of the Problem of Evasion.

Problem 3. Find an analytical formula for an attainability domain of the object P in the Problem of Pursuit.

A solution of the pursuit problem

In a great number of mathematical problems with parameters, an interesting property of the final analytic results is their explicit dependence on these parameters, which are regarded as constants in the solution. However, these parameters can help to determine feasibility conditions for these problems. In this section, we are going to present necessary and sufficient feasibility conditions for the pursuit problem in the game (U_{Gr}, V_{Gr}) .

If the pursuer and evader choose admissible controls $u(\cdot) \in U_{Gr}$ and $v(\cdot) \in V_{Gr}$, respectively, then, depending on equation (9), we obtain the solution

$$z(t) = z_{10} + \int_0^t (t-s)(u(s) - v(s)) ds. \quad (13)$$

In the new notation introduced, the goal of the pursuer is now to fulfill the equality $z(t^*) = 0$ at some time t^* , $t^* > 0$. As for

evader's goal, it is to maintain the relation $z(t) \neq 0$ for all $t \in [0, +\infty)$.

To construct a strategy for Pursuer, first we assume that Pursuer knows t , $v(t)$ at the current time t .

Definition 7. Assume that $\rho \geq \sigma$. Then, in the game (U_{Gr}, V_{Gr}) , we call the function

$$u_{Gr}(z_{10}, v) = v - \lambda_{Gr}(z_{10}, v) \xi_{10} \quad (14)$$

a parallel pursuit strategy (briefly, Π -strategy) of the pursuer, where

$$\lambda_{Gr}(z_{10}, v) = \langle v, \xi_{10} \rangle + \sqrt{\langle v, \xi_{10} \rangle^2 + \delta e^{2kt}},$$

$$\xi_{10} = \frac{z_{10}}{|z_{10}|}, \delta = \rho^2 - \sigma^2, \quad (15)$$

and $\langle v, \xi_{10} \rangle$ is the scalar product of the vectors v and ξ_{10} in $\mathbb{R}^n$. The function $\lambda(z_{10}, v)$ is usually called a resolving function.

Now we will indicate some important features for the strategy (14) and the resolving function (15).

Lemma 2. The strategy (14) is defined and continuous for all $v \in S_E$, and the equality $|u_{Gr}(z_{10}, v)| = |v|^2 + \delta e^{2kt}$ holds during the pursuit game.

Lemma 4. Let following condition $\rho > \sigma$ valid.

Then the equation

$$1 - \frac{\rho - \sigma}{|z_0|} \left[\frac{(e^{kt} - 1)}{k^2} - \frac{t}{k} \right] = 0$$

has at least one positive root with respect to t and we denote it by t_{Gr} .

Proof. Let $\rho > \sigma$. Using equation we will form the function

$$|z_0| - \frac{\rho - \sigma}{k^2} [(e^{kt} - 1) - kt] = 0,$$

$$F(t) = |z_0| - \frac{\rho - \sigma}{k^2} [(e^{kt} - 1) - kt],$$

and analyze it as follows:

a) $F(0) = |z_0|;$

b) The derivative of the function $F(t)$ is monotone decreasing in t , $t > 0$.

d) Take the limit of the function $F(t)$ as $t \rightarrow \infty$.

Then there exists a positive root of the equation.

Theorem 1. If the condition of Lemma 4 holds in the game (U_{Gr}, V_{Gr}) . Then Π_{Gr} -strategy (14) guarantees catching the evader on the time interval $[0, t_{Gr}]$.

Proof. Assume that the evader chooses some control $v(\cdot) \in V_{Gr}$ while the pursuer implements the Π -strategy (14). Then, by (13), we obtain the function

$$z(t) = z_{10} + \int_0^t (t-s) \lambda_{Gr}(z_{10}, v(s)) \xi_{10} ds,$$

which can be written as follows:

$$z(t) = z_{10} A_{Gr}(t, v(\cdot)), \quad (16)$$

where

$$A_{Gr}(t, v(\cdot)) = 1 - \frac{1}{|z_{10}|} \int_0^t (t-s) \lambda_{Gr}(z_{10}, v(s)) ds. \quad (17)$$

Now we will study the behavior of the function $\Lambda(t, v(\cdot))$ of t . Using the definition of the function $\lambda_{Gr}(t, v)$. It can be checked that the function

$f(t, \varsigma) = \sqrt{\varsigma^2 + \rho^2 e^{2kt} - |v(t)|^2} - \varsigma$, $\varsigma \in \mathbb{R}$, is monotonically decreasing with respect to ς for every $t \geq 0$. Therefore, by the inequality $|\langle v(t), \xi_{10} \rangle| \leq |v(t)|$ and also, from (7) we have

$$A_{Gr}(t, v(\cdot)) \leq 1 - \frac{\rho - \sigma}{|z_0|} \int_0^t (t-s) e^{ks} ds = F(t).$$

According to Lemma 2 we know that the function $F(t)$ is equal to zero at $t = t_{Gr}$.

Therefore, there exists $t^* \in [0, t_{Gr}]$ such that

$A_{Gr}(t^*, v(\cdot)) = 0$, and this (see (16)) implies that $z(t^*) = 0$. Thus, Theorem 1 is proved. $\square$

A solution of the evasion problem

In this section, we will suggest an admissible strategy for the evader, which guarantees escaping in the evasion problem.

Definition 8. We call the control function

$$v_{Gr}(t) = -\sigma e^{kt} \xi_{10} \quad (18)$$

a strategy of the evader in the game (U_{Gr}, V_{Gr}) .

Theorem 2. Let $\alpha \leq \beta$. Then the strategy (18) guarantees escaping on the time interval $[0, +\infty)$ in the game (U_{Gr}, V_{Gr}) , and the distance between the players is estimated as follows:

$$|z(t)| \geq \begin{cases} |z_{10}| & \text{if } \rho = \sigma, \\ |z_{10}| + \frac{(\sigma - \rho)}{k^2} (e^{kt} - 1 - kt) & \text{if } \rho < \sigma. \end{cases}$$

Proof. 1) Assume that $\rho \leq \sigma$ and the pursuer picks a control $u(\cdot) \in U_{Gr}$ while the evader applies the strategy (18). In accordance with (13), it follows the function

$$z(t) = z_{10} + \int_0^t (t-s) u(s) ds + \int_0^t (t-s) \sigma e^{ks} \xi_{10} ds. \quad (19)$$

Estimate the absolute value of (19) as follows:

$$\begin{aligned} |z(t)| &\geq \left| z_{10} + \int_0^t (t-s) \sigma e^{ks} \xi_{10} ds \right| - \int_0^t (t-s) |u(s)| ds \geq \\ &\geq |z_{10}| \left(1 + \frac{\sigma}{k|z_{10}|} \left(\frac{e^{kt} - 1}{k} - t \right) \right) - \\ &\quad - \int_0^t (t-s) \rho e^{ks} ds = \Psi(t), \end{aligned}$$

where

$$\Psi(t) = |z_{10}| + \frac{(\sigma - \rho)}{k^2} (e^{kt} - 1 - kt).$$

If $\rho \leq \sigma$, then

$$\Psi'(t) = \frac{(\sigma - \rho)}{k} (e^{kt} - 1) \geq 0,$$

for all $t \in [0, +\infty)$.

This implies that the function $\Psi(t)$ is monotone increasing on $[0, \infty)$. Hence it follows that

$\Psi(t) \geq |z_{10}| > 0$. Theorem 2 is proved. $\square$

An attainability domain of the pursuer

In accordance with Theorem 1, if $\rho > \sigma$ then, by the Π_{Gr} -strategy (14), the evader is captured at some point in the space $\mathbb{R}^n$. In the considered game, we will construct a set of meeting points of the players for the case $\rho > \sigma$.

Let a triplet $(y_{10}, y_{11}, v(\cdot)), v(\cdot) \in V_{Gr}$ generates a trajectory of an evader E in the form (6) while a triplet $(x_{10}, x_{11}, u_{Gr}(z_{10}, v(\cdot))), u_{Gr}(z_{10}, v(\cdot)) \in U_{Gr}$, generates a trajectory of a pursuer P in the form

$$x(t) = x_{10} + x_{11}t + \int_0^t (t-s) u_{Gr}(z_{10}, v(\cdot)) ds, \quad (20)$$

where $t \in [0, t^*]$, $0 < t^* \leq t_{Gr}$, and t^* is the encounter time of the players, that is, the equality $x(t^*) = y(t^*)$ holds. Thus, for each pair $((x(t), y(t)))$, we form the set

$$P_{Gr}(t) = P_{Gr}(x(t), y(t)) = \left\{ p : |p - x| \geq \frac{\rho}{\sigma} |p - y| \right\}, \quad (21)$$

on $[0, t^*]$. Note that

$$P_{Gr}(0) = P_{Gr}(x_{10}, y_{10}) = \left\{ p : |p - x_{10}| \geq \frac{\alpha}{\beta} |p - y_{10}| \right\}.$$

Since $|z(t)| \geq 0$ on $[0, t^*]$, it is obvious that the inclusion $y(t) \in P_{Gr}(t)$ is valid on this time interval.

Remark 1. Note that the trajectories $x(t)$ and $y(t)$ of the players and the multi-valued mapping $P_{Gr}(t)$ directly depend on the choice of a control $v(\cdot) \in V_{Gr}$. This dependence is omitted for brevity.

Lemma 5. The multi-valued mapping $P_{Gr}(t)$ can be expressed as

$$P_{Gr}(t) = x(t) + A_{Gr}(t, v(\cdot)) [P_{Gr}(0) - x_{10}], \quad (22)$$

where $A_{Gr}(t, v(\cdot))$ is the convergence function (17) and

$$P_{Gr}(0) = x_{10} - C(z_{10}) + R(z_{10})S, \\ C(z_{10}) = \frac{\rho^2 z_{10}}{\rho^2 - \sigma^2}, \quad R(z_{10}) = \frac{\rho\sigma |z_{10}|}{\rho^2 - \sigma^2}, \quad (23)$$

and S is the unit ball centered at the origin of the space $\mathbb{R}^n$.

Proof. First, write the set (21) as follows:

$$P_{Gr}(t) = x(t) + \left\{ p : |p| \geq \frac{\rho}{\sigma} |p + z(t)| \right\} = \\ = x(t) - C(z(t)) + R(z(t))S,$$

where

$$C(z(t)) = \frac{\rho^2 z(t)}{\rho^2 - \sigma^2}, \quad R(z(t)) = \frac{\rho\sigma |z(t)|}{\rho^2 - \sigma^2}.$$

Now, by (16) and (23), the functions $C(z(t))$ and $R(z(t))$ can be written in the form

$$C(z(t)) = -C(z_{10})A_{Gr}(t, v(\cdot)), \\ R(z(t)) = R(z_{10})A_{Gr}(t, v(\cdot)).$$

Hence, we derive the validity of formula (22).

Corollary 1. Lemma 4 implies that, for each $t \in [0, t^*]$, the multi-valued mapping $P_{Gr}(t)$ is a ball of radius $R(z_{10})A_{Gr}(t, v(\cdot))$ centered at the point $x(t) - C(z_{10})A_{Gr}(t, v(\cdot))$ and the set $P_{Gr}(0)$ is a ball of the radius $R(z_{10})$ centered at the point $x(0) - C(z_{10})$.

Lemma 6. The multi-valued mapping $P_{Gr}(t) - x_{11}t$ is monotonically decreasing in $t \in [0, t^*]$, with respect to embedding, i.e., if $t_1, t_2 \in [0, t^*]$ and $t_1 < t_2$, then

$$P_{Gr}(t_2) - x_{11}t_2 \subset P_{Gr}(t_1) - x_{11}t_1.$$

Proof. From the statement of the problem, we have geometric constraint of the form (7) on values of the evader's acceleration vector. As a consequence, we find that

$$|v(t)|^2 \leq \frac{\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2} \delta e^{2kt}. \quad (24)$$

From the form of the resolving function (15), it is easy to ensure in the validity of the equality

$$\delta e^{2kt} = \lambda_{Gr}(z_{10}, v(t)) (\lambda_{Gr}(z_{10}, v(t)) - 2 \langle v(t), \xi_{10} \rangle).$$

Due to this, inequality (24) takes the form

$$|v(t)|^2 + \frac{2\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2} \langle v(t), \xi_{10} \rangle \lambda_{Gr}(z_{10}, v(t)) \leq \\ \leq \frac{\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2} \lambda_{Gr}^2(z_{10}, v(t)).$$

Completing the square in this inequality, we obtain the following inequality:

$$\left| v(t) + \frac{\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2} \lambda_{Gr}(z_{10}, v(t)) \xi_{10} \right| \leq \\ \leq \frac{\rho\sigma}{\rho^2 - \sigma^2} \lambda_{Gr}(z_{10}, v(t)). \dots (25)$$

However, for all $\psi \in \mathbb{R}^n, |\psi| = 1$, the relation

$$\left\langle v(t) + \frac{\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2} \lambda_{Gr}(z_{10}, v(t)) \xi_{10}, \psi \right\rangle \leq \\ \leq \left| v(t) + \frac{\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2} \lambda_{Gr}(z_{10}, v(t)) \xi_{10} \right|$$

holds. Then, using the inequality (25), we find that

$$\left\langle v(t) + \frac{\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2} \lambda_{Gr}(z_{10}, v(t)) \xi_{10}, \psi \right\rangle \leq \leq \frac{\rho\sigma}{\rho^2 - \sigma^2} \lambda_{Gr}(z_{10}, v(t)).$$

Integrate both sides of this inequality over the interval $[0, t]$

$$\int_0^t \left\langle v(s) + \frac{\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2} \lambda_{Gr}(z_{10}, v(s)) \xi_{10}, \psi \right\rangle ds \leq \leq \frac{\rho\sigma}{\rho^2 - \sigma^2} \int_0^t \lambda_{Gr}(z_{10}, v(s)) ds. \quad (26)$$

For the left-hand side of (26), we can write the following equalities:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left\langle v(s) + \frac{\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2} \lambda_{Gr}(z_{10}, v(s)) \xi_{10}, \psi \right\rangle ds = \\ &= \int_0^t \left\langle v(s) + \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 - \sigma^2} - 1 \right) \lambda_{Gr}(z_{10}, v(s)) \xi_{10}, \psi \right\rangle ds = \\ &= \int_0^t \left\langle v(s) - \lambda_{Gr}(z_{10}, v(s)) \xi_{10}, \psi \right\rangle ds + \\ &+ \left\langle \frac{\rho^2}{\rho^2 - \sigma^2} \xi_{10}, \psi \right\rangle \int_0^t \lambda_{Gr}(z_{10}, v(s)) ds. \end{aligned}$$

By the definition of Π_{Gr} -strategy (14) and in view of the form of the vector $C(z_{10})$ in (23), the latter equality takes the form

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left\langle v(s) + \frac{\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2} \lambda_{Gr}(z_{10}, v(s)) \xi_{10}, \psi \right\rangle ds = \\ &= \left\langle \int_0^t \mathbf{u}_{Gr}(z_{10}, v(s)) ds, \psi \right\rangle + \\ &+ \frac{\langle C(z_{10}), \psi \rangle}{|z_{10}|} \int_0^t \lambda_{Gr}(z_{10}, v(s)) ds. \quad (27) \end{aligned}$$

Taking into account the form of $R(z_{10})$ in (23), for the right-hand side of inequality (26), we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{\rho\sigma}{\rho^2 - \sigma^2} \int_0^t \lambda_{Gr}(z_{10}, v(s)) ds = \\ &= \frac{R(z_{10})}{|z_{10}|} \int_0^t \lambda_{Gr}(z_{10}, v(s)) ds. \quad (28) \end{aligned}$$

Thus, by (26), (27), and (28), we have the relation

$$\begin{aligned} & \left\langle \int_0^t \mathbf{u}_{Gr}(z_{10}, v(s)) ds, \psi \right\rangle + \\ &+ \frac{\langle C(z_{10}), \psi \rangle - R(z_{10})}{|z_{10}|} \int_0^t \lambda_{Gr}(z_{10}, v(s)) ds \leq 0. \quad (29) \end{aligned}$$

Applying the properties of the support function [7]

$$F(P_{Gr}, \psi) = \sup_{p \in P_{Gr}} \langle p, \psi \rangle$$

in $\psi \in \mathbb{R}^n$, $|\psi| = 1$, and using formulas (17), (20), (22), and (23) we can find the derivative of $P_{Gr}(t)$ in t as follows:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} F(P_{Gr}(t), \psi) = \\ &= \frac{d}{dt} F(x_{10} + x_{11}t + \int_0^t (t-s) \mathbf{u}_{Gr}(z_{10}, v(s)) ds + \\ &+ A_{Gr}(t, v(\cdot)) [R(z_{10}) \mathbf{S} - C(z_{10})], \psi) = \\ &= \langle x_{11}, \psi \rangle + \left\langle \int_0^t \mathbf{u}_{Gr}(z_{10}, v(s)) ds, \psi \right\rangle + \\ &+ \frac{\langle C(z_{10}), \psi \rangle - R(z_{10})}{|z_{10}|} \int_0^t \lambda_{Gr}(z_{10}, v(s)) ds. \end{aligned}$$

From this and inequality (29) we get $\frac{d}{dt} F(P_{Gr}(t) - x_{11}t, \psi) \leq 0$ for all $\psi \in \mathbb{R}^n$, $|\psi| = 1$. This completes the proof of Lemma 6. $\square$

Corollary 2. Lemma 5 implies the inclusion $P_{Gr}(t) \subset P_{Gr}(0) + x_{11}t$ or all $t \in [0, t^*]$.

By Lemma 6, we obtain an attainability domain of the evader.

Lemma 7. The inclusion

$$y(t) \in P_{Gr}(0) + x_{11}t \quad (29)$$

holds for all $t \in [0, t^*]$.

Proof. The inclusion (29) easily follows from the form of the multi-valued mapping (21) and Corollary 2.

Corollary 3. Lemma 7 implies that, if the initial velocities of the players are equal to zero, i.e., $x_{11} = y_{11} = 0$, then the boundary of the attainability set of the evader is the Apollonius sphere of the form (23) in $\mathbb{R}^n$.

REFERENCES

- [1]. Azamov A. On the quality problem for simple pursuit games with constraint. *Serdica Bulgariacae Math. Publ.*, 1986, Vol. 12, No. 1, P. 38-43.
- [2]. Azamov A.A., Samatov B.T. The IL-strategy: analogies and applications. In: *Proc. The Fourth Int. Conf. Game Theory and Management (GTM2010)*, June 28-30, 2010, St. Petersburg, Russia, vol.4. 2010. P. 33-47.
- [3]. Berkovitz L.D. Differential game of generalized pursuit and evasion. *SIAM J. Contr.*, 1986. Vol. 24, No. 3. P. 361-373.
- [4]. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodejstvie grupp upravlyaemyh ob'ektov* [Conflict Interaction Between Groups of Controlled Objects]. Izhevsk: Udmurt State University, 2009. 266 p. (in Russian)
- [5]. Chikrii A.A. *Conflict-Controlled Processes*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. 404 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1135-7
- [6]. Darin A.N., Kurzhanskii A.B. Control under indeterminacy and double constraints. *Differ. Equ.*, 2003. Vol. 39, No. 11. P. 1554-1567.
- [7]. Elliot R. J., Kalton N. J. The existence of value in differential games of pursuit and evasion. *J. Differential Equations*, 1972. Vol. 12, No. 3. P. 504-523.
- [8]. Fleming W.H. The convergence problem for differential games, II. In: *Advances in Game Theory*, 2nd ed. *Annals of Math.*, vol. 52. 1964. P. 195-210.
- [9]. Friedman A. *Differential Games*, 2nd ed. *Pure Appl. Math.*, vol. 25. New York: Wiley Int., 1971. 350 p.
- [10]. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi processami* [Mathematical Methods of Control for Several Dynamic Processes]. Moscow: Izdat. Gos. Univ., 1990. 198 p. (in Russian)
- [11]. Hajek O. *Pursuit Games: An Introduction to the Theory and Applications of Differential Games of Pursuit and Evasion*. Mineola, NY: Dove. Pub. Inc., 2008. 266 p.
- [12]. Ho Y., Bryson A., Baron S. Differential games and optimal pursuit-evasion strategies. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1965. Vol. 10, No. 4. P. 385-389.
- [13]. Ibragimov G.I. A game of optimal pursuit of one object by several. *J. Appl. Math. Mech.*, 1998. Vol. 62, No. 2, P. 187-192.
- [14]. Ibragimov G.I. Optimal pursuit with countably many pursuers and one evader. *Differ. Equ.*, 2005. Vol. 41, No. 5. P. 627-635.
- [15]. Isaacs R. *Differential Games*. NY: John Wiley and Sons, 1965. 385 p.
- [16]. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-Theoretical Control Problems*. NY: Springer, 2011. 517 p.
- [17]. Petrosjan L.A. *Differential Games of Pursuit*. Ser. Optim, vol. 2. Singapore: World Scientific Publ., 1993. 340 p.
- [18]. Pontryagin L.S. *Izbrannye trudy* [Selected Works]. Moscow: MAKS Press, 2004. 551 p. (in Russian)
- [19]. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects. *Cybernet. Systems Anal.*, 1976. Vol. 12, No. 5. P. 484-485.
- [20]. Samatov B.T. On a pursuit-evasion problem under a linear change of the pursuer resource. *Siberian Adv. Math.*, 2013. Vol. 23, No. 10. P. 294-302.
- [21]. Samatov B.T. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players. I. *Cybernet. Systems Anal.*, 2013. Vol. 49, No. 5. P.
- [22]. Samatov B.T. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players. II. *Cybernet. Systems Anal.*, 2013. Vol. 49, No. 6. 907-921.
- [23]. Samatov B.T., Ibragimov G., Khodjibayeva I. V. Pursuit-evasion differential games with Grönwall-type constraints on controls. *Ural Math. J.*, 2020. Vol. 6, No. 2. P. 95-107.
- [24]. Satimov N.Yu., Rikhsiev B.B., Khamdamov A.A. On a pursuit problem for n-person linear differential and discrete games with integral constraints. *Math. USSR Sb.*, 1983. Vol. 46, No. 4. P. 459-471.
- [25]. Samatov B.T., Soyibboev U.B. Differential game with a "Life line" for the inertial movements of players // *Ural Mathematical Journal*. (2021), Vol. 7, № 2, pp. 94–109.
- [26]. Samatov B.T., Akbarov A.Kh., Zhuraev B.I. Pursuit-evasion differential games with Gr-constraints on controls // *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*. 2022. Vol. 59, pp. 67-84.
- [27]. Akbarov A.Kh. Differential games with H - constraints on the controls // *Bulletin of the Institute of Mathematics*. Tashkent. 2023. Vol. 6, No. 1, pp. 8-16.

Mualliflar haqida ma'lumot

1. Adaxambek Akbarov – *f.-m.f.b.f.d., (PhD)* Andijon davlat universiteti. Tel.: +99893-252-63-73; E-mail: akbarov.adhambek@bk.ru.
2. Ma'rufjonova Saidaxon – magistr, Andijon davlat universiteti. Tel.: +99891-168-07-61;

A pursuit problem in the linear game with constant coefficient under Gronwall type constraints

J.D.Dexkonov, A.X.Akbarov, I.Abduvosiyev

Andijan State University named after Z. M. Babur, 129, University Street, Andijan, Uzbekistan, 170100

Abstract: The primary objective of this study is to demonstrate several meaningful applications of Gronwall-type inequalities in differential game theory. We investigate the pursuit problem in linear differential games under constraints of Gronwall type, which can be regarded as a generalization of geometric constraints. To address the pursuit problem, a parallel pursuit strategy is introduced, describing the coordinated parallel movement of the players, and its structure is analyzed with respect to system parameters.

This work further develops and extends the ideas of Rufus Isaacs, Leon Petrosyan, Boris Pshenichny and other researchers. New sufficient conditions ensuring the solvability of the pursuit problem for the pursuer are established.

Keywords: differential game, Gronwall's inequality, pursuit, strategy, capture time.

Аннотация: Основной целью данной работы является освещение некоторых приложений неравенств типа Гронуолла в теории дифференциальных игр. Рассматривается задача преследования в линейных дифференциальных играх при ограничениях типа Гронуолла, которые можно интерпретировать как обобщение геометрических ограничений. Для решения задачи предлагается стратегия параллельного сближения игроков, отражающая согласованное движение сторон, и исследуется её зависимость от параметров системы.

Настоящее исследование развивает и дополняет идеи Rufus Isaacs, Leon Petrosyan, Boris Pshenichny и других ученых. Получены новые достаточные условия разрешимости задачи преследования для преследующего.

Ключевые слова: дифференциальная игра, неравенство Гронуолла, преследование, стратегия, время поимки.

I. Introduction.

The origins of pursuit–evasion problems are commonly traced back to a classical problem formulated and solved in 1732 by the French mathematician and hydrographer Pierre Bouguer [20]. A more detailed historical account can be found in the work of P. Nahin [20]. However, the systematic study of pursuit–evasion problems began much later, in the 1950s, due to the contributions of the American mathematician Rufus Isaacs.

The concept of *differential games* was first introduced in a number of his classified works carried out within the RAND Corporation (USA). Later, Isaacs presented his results in monograph form [13], which contains numerous significant examples of differential games. In these studies, he considered such problems from the viewpoint of the calculus of variations and attempted to apply the Hamilton–Jacobi approach, which is now known as Isaacs' method. However, it turned out that the theory of differential games is more complex than classical methods could fully handle, and Isaacs' approach had mainly a heuristic nature. Nevertheless, the monograph [13] generated considerable interest in this new field, and since then both mathematicians and specialists from applied sciences have actively investigated differential games.

In early studies, differential games were considered under the assumption that the controls belong to the class of bounded functions, which provided certain constructive possibilities for modeling control processes. However, the need to more accurately describe real-world phenomena led to the investigation of differential games with integral constraints imposed on the players' controls. Such constraints reflect, for instance, limitations on energy resources or the consumption of materials during the process. In particular, these types of constraints are of great importance in the mathematical modeling of technical and engineering processes, both from theoretical and applied perspectives.

Modern differential game theory, as a theory of controlled dynamical processes, combines key features such as dynamics, control, conflict, information, and optimality, and represents one of the most complex mathematical models of real processes with significant practical importance. The foundations of this theory were established by W. Fleming [10], A. Friedman [11], O. Hájek [12], L.S. Pontryagin [23], N.N. Krasovskii [16–17], L.A. Petrosyan [20–22], and B.N. Pshenichnii [24]. Each of these authors proposed their own approaches to the subject. Further development of the theory has been

carried out by many researchers [2–8, 9–10, 14–15, 18–19, 25–30, etc.].

At present, there exist more than a hundred monographs devoted to differential game theory. Nevertheless, only a relatively small number of problems have been completely solved. This work is devoted to the Pursuit problems for the linear differential game and introduce several basic notions as constraints of the Gronwall type for controls of the players.

II. Main part.

Let the motions of the pursuer P and the evader E be described by the following differential equations, initial conditions and Gronwall type constraints (briefly, Gr -constraint)

$$P: \dot{x} = ax + u, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$E: \dot{y} = ay + v, \quad y(0) = y_0, \quad (2)$$

where $x, y, u, v \in R^n$, $n \geq 2$, and a is arbitrary; u is the velocity vector of the pursuer and here the temporal variation of u must be a measurable function $u(\cdot): [0, \infty) \rightarrow R^n$. We denote by U_{Gr} the set of all measurable functions $u(\cdot)$ satisfying Gr -constraint:

$$|u(t)| \leq \rho_0 + \rho_1 t + k \int_0^t |u(s)| ds, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

Similarly, v is the velocity vector of the evader and here the temporal variation of v must be a measurable function $v(\cdot): [0, +\infty) \rightarrow R^n$. We denote by V_{Gr} the set of all measurable functions $v(\cdot)$ satisfying Gr -constraint:

$$|v(t)| \leq \sigma_0 + \sigma_1 t + k \int_0^t |v(s)| ds, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

where $\rho_0, \rho_1, \sigma_0, \sigma_1$ are nonnegative numbers and k is positive number.

Note that in (3) and (4) and in further constraints, as the norms of the control vectors u and v in the space $\mathbb{R}^n$, we will consider the usual Euclidean norm, i.e.

$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$, where $u_1, u_2, \dots, u_n$ are the coordinates of the vector u in the space $\mathbb{R}^n$ and $|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$ where

$v_1, v_2, \dots, v_n$ are the coordinates of the vector v in the same space $\mathbb{R}^n$.

Remark 2.1.1. For the case $\rho_1 = \sigma_1 = 0$, the pursuit-evasion problems with Gronwall constraints on controls have been completely studied in the work [31,32].

By virtue of the equations (1)-(2) each pair $(x_0, u(\cdot))$ and $(y_0, v(\cdot))$ generates the trajectories of motion

$$x(t) = e^{at} \left(x_0 + \int_0^t u(\tau) e^{-a\tau} d\tau \right),$$

$$y(t) = e^{at} \left(y_0 + \int_0^t v(\tau) e^{-a\tau} d\tau \right)$$

of the players P and E on interval $t \geq 0$.

Definition 1. A function $\mathbf{u}: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is called a strategy of the Pursuer if $\mathbf{u}(t, v)$ is a Lebesgue measurable function with respect to t for each fixed v and also is a Borel measurable function with respect to v for each fixed t .

Definition 2. It is said that a strategy $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, v)$ guarantees capture at time moment $T(\mathbf{u})$ if, at some time $t^* \in [0, T(\mathbf{u})]$, the equality $x(t^*) = y(t^*)$ is satisfied for any control $v(\cdot) \in V_{Gr}$ of the Evader, where $x(t)$

and $y(t)$ are the solutions of the initial value problems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + \mathbf{u}(t, v(t)), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= ay + v(t), & y(0) &= y_0,\end{aligned}$$

where $t \geq 0$.

We use the following statement.

Lemma 1. (Gronwall's inequality

[1]). If $|\omega(t)| \leq \alpha + \int_0^t (\beta + \gamma |\omega(s)|) ds$, then

$$|\omega(t)| \leq \frac{\beta}{\gamma} (e^{\gamma t} - 1) + \alpha e^{\gamma t}, \quad \text{where } \omega(t),$$

$t \geq 0$, is a measurable function, and α, β are given non-negative numbers and γ is a given positive number.

By Lemma 1, if $u(\cdot) \in U_{Gr}$ and $v(\cdot) \in V_{Gr}$, then

$$|u(t)| \leq \varphi(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$|v(t)| \leq \psi(t), \quad t \geq 0, \quad (6)$$

where

$$\varphi(t) = \frac{\rho_1}{k} (e^{kt} - 1) + \rho_0 e^{kt}, \quad \varphi(0) = \rho_0, \quad (7)$$

$$\psi(t) = \frac{\sigma_1}{k} (e^{kt} - 1) + \sigma_0 e^{kt}, \quad \psi(0) = \sigma_0. \quad (8)$$

It can be easily checked that the converse is not true, that is, the inequalities (5) and (6) do not imply (3) and (4). To define the notions of optimal strategies of players and optimal pursuit time, we consider two games.

The goal of the Pursuer P is to capture Evader E , i.e. achievement of the equality $x(t) = y(t)$ (Pursuit problem) and the Evader E strives to avoid an encounter (Evasion problem), i.e., to achieve the inequality $x(t) \neq y(t)$ for all $t \geq 0$, and in the opposite

case, to postpone the instant of encounter as long as possible.

To construct a strategy for Pursuer, first we assume that Pursuer knows $t, v(t)$ at the current time t .

Definition 3. If $\delta_0 \geq 0, \delta_1 \geq 0$, then the function

$$\mathbf{u}_{Gr}(t, v) = v - \lambda(t, v) \xi_0 \quad (9)$$

is called the Π_{Gr} -strategy of the Pursuer in the Gr -Game of pursuit, where

$$\begin{aligned}\lambda(t, v) &= \langle v, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle v, \xi_0 \rangle^2 + \varphi^2(t) - |v|^2}, \\ \xi_0 &= z_0 / |z_0|,\end{aligned}$$

$$\delta_0 = \rho_0 - \sigma_0, \quad \delta_1 = \rho_1 - \sigma_1, \quad z_0 = x_0 - y_0.$$

Note that

$$|\mathbf{u}_{Gr}(t, v)| = \varphi(t). \quad (10)$$

Indeed, if we square equalities (9) on both sides, then we get

$$|\mathbf{u}_{Gr}(t, v)|^2 = |v|^2 + \lambda(t, v)(\lambda(t, v) - 2\langle v, \xi_0 \rangle).$$

From here and from the form of the scalar function $\lambda(t, v)$, it is easy to calculate equality (10). Let us now check the admissibility of strategy (9) for every admissible function $v(t) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$. From inequality (3) and from equalities (7) and (10) we have

$$\begin{aligned}\rho_0 + \rho_1 t + k \int_0^t |\mathbf{u}_{Gr}(v(s), s)| ds &= \\ &= \rho_0 + \rho_1 t + k \int_0^t \varphi(s) ds = \\ &= \rho_0 + \rho_1 t + k \int_0^t \left[\frac{\rho_1}{k} (e^{ks} - 1) + \rho_0 e^{ks} \right] ds = \\ &= \varphi(t) = |\mathbf{u}_{Gr}(v(t), t)|\end{aligned}$$

which proves the admissibility of strategy (9).

Lemma 2. Let one of the following conditions

1) $\delta_0 > 0, \delta_1 = 0$ and

$$a \in (-\infty, 0) \cup (0, k) \text{ or } a \in (k, +\infty),$$

$$|z_0| < \frac{\delta_0}{a-k};$$

$$2) \delta_0 = 0, \delta_1 > 0 \text{ and}$$

$$a \in (-\infty, 0) \cup (0, k) \text{ or } a \in (k, +\infty),$$

$$|z_0| < \frac{\delta_1}{a-k};$$

$$3) \delta_0 > 0, \delta_1 > 0 \text{ and}$$

$$a \in (-\infty, 0) \cup (0, k) \text{ or } a \in (k, +\infty),$$

$$|z_0| < \frac{a\delta_0 + \delta_1}{a(a-k)} \text{ be valid.}$$

Then the equation

$$1 - \frac{1}{|z_0|} \left(\frac{\delta_1 + k\delta_0}{k(k-a)} (e^{(k-a)t} - 1) + \frac{\delta_1}{ka} (e^{-at} - 1) \right) = 0 \quad (11)$$

has at least one positive root with respect to t and we denote it by T_{Gr} .

Proof. Case 1). Let $\delta_0 > 0, \delta_1 = 0$ and $a \in (-\infty, 0) \cup (0, k)$. Using equation (11) we will form the function

$$1 - \frac{1}{|z_0|} \left(\frac{\delta_0}{k-a} (e^{(k-a)t} - 1) \right) = 0,$$

$$\frac{\delta_0}{k-a} (e^{(k-a)t} - 1) = |z_0|,$$

$$e^{(k-a)t} = 1 + \frac{|z_0|(k-a)}{\delta_0},$$

$$T_{Gr} = \frac{1}{k-a} \ln \left(\frac{|z_0|(k-a)}{\delta_0} + 1 \right).$$

If $a \in (k, +\infty)$ and

$$T_{Gr} = -\frac{1}{a-k} \ln \left(1 - \frac{|z_0|(a-k)}{\delta_0} \right) \Rightarrow \frac{|z_0|(a-k)}{\delta_0} < 1,$$

$$|z_0| < \frac{\delta_0}{a-k},$$

then there exists a positive root of the equation (11).

Case 2). Let $\delta_0 = 0, \delta_1 > 0$ and $a \in (-\infty, 0) \cup (0, k)$. Using equation (11) we will form the function

$$1 - \frac{1}{|z_0|} \left(\frac{\delta_1}{k(k-a)} (e^{(k-a)t} - 1) + \frac{\delta_1}{ka} (e^{-at} - 1) \right) = 0$$

$$\frac{\delta_1}{k} \left(\frac{1}{(k-a)} (e^{(k-a)t} - 1) + \frac{1}{a} (e^{-at} - 1) \right) = |z_0|$$

$$F_1(t) = \frac{\delta_1}{k} \left(\frac{(e^{(k-a)t} - 1)}{(k-a)} + \frac{1}{a} (e^{-at} - 1) \right)$$

and analyze it as follows:

$$a) F_1(0) = 0;$$

$$b) \text{ The derivative of the function } F_1(t)$$

$$\text{equals } F_1'(t) = e^{(k-a)t} \geq e^{-at} \geq 0.$$

c) The function $F_1(t)$ is increasing when $t \geq 0$.

d) Take the limit of the function $F_1(t)$ as $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta_1}{k} \left(\frac{(e^{(k-a)t} - 1)}{(k-a)} + \frac{(e^{-at} - 1)}{a} \right).$$

$$a) a < 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F_1(t) = +\infty$$

$$b) 0 < a < k \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F_1(t) = +\infty$$

then there exists a positive root of the equation (11).

2.1 If $a \in (k, +\infty)$ and

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_1(t) = -\frac{\delta_1}{k} \left(\frac{1}{(k-a)} + \frac{1}{a} \right) =$$

$$= -\frac{\delta_1}{k-a} \Rightarrow \frac{\delta_1}{a-k} > |z_0|,$$

then there exists a positive root of the equation (11).

Case 3). Let $\delta_0 > 0$, $\delta_1 > 0$ and $a \in (-\infty, 0) \cup (0, k)$. Using equation (11) we will form the function

$$1 - \frac{1}{|z_0|} \left(\frac{\delta_1 + k\delta_0}{k(k-a)} (e^{(k-a)t} - 1) + \frac{\delta_1}{ka} (e^{-at} - 1) \right) = 0,$$

$$\frac{\delta_1 + k\delta_0}{k(k-a)} (e^{(k-a)t} - 1) + \frac{\delta_1}{ka} (e^{-at} - 1) = |z_0|,$$

$$F_2(t) = \frac{\delta_1 + k\delta_0}{k(k-a)} (e^{(k-a)t} - 1) + \frac{\delta_1}{ka} (e^{-at} - 1),$$

and analyze it as follows:

- a) $F_2(0) = 0$;
- b) The derivative of the function $F_2(t)$ equals

$$e^{kt} \geq \frac{\delta_1}{\delta_1 + k\delta_0} \Rightarrow F_2'(t) \geq 0.$$

- c) The function $F_2(t)$ is increasing when $t \geq 0$.

- d) Take the limit of the function $F_2(t)$ as $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta_1 + k\delta_0}{(k-a)k} (e^{(k-a)t} - 1) + \frac{\delta_1}{ka} (e^{-at} - 1).$$

- 1) $a < 0$ $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = +\infty$
- 2) $0 < a < k$ $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = +\infty$

then there exists a positive root of the equation (11).

3.1 If $a \in (k, +\infty)$ and

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = -\frac{\delta_1 + k\delta_0}{k(k-a)} - \frac{\delta_1}{ka} = \frac{a\delta_0 + \delta_1}{a(a-k)} \Rightarrow$$

$$|z_0| < \frac{a\delta_0 + \delta_1}{a(a-k)},$$

then there exists a positive root of the equation (11). $\square$

Property. If $\delta_0 \geq 0$, $\delta_1 \geq 0$ then a function $\lambda_{Gr}(t, v)$ is continuous, non-negative and defined for all the control functions $v(\cdot)$ such that satisfies the Gr -constraint (4).

Theorem. If one of the conditions of Lemma 2 holds, then the Π_{Gr} -strategy (9) is winning in the Gr -Game of pursuit on the time interval $[0, T_{Gr}]$.

Proof. Let $v(\cdot) \in V_{Gr}$ be an arbitrary control of the Evader, and let the Pursuer use the Π_{Gr} -strategy (9). Using equations (1) and (2) we get the following initial value problem:

$$\dot{z} - az = -\lambda_{Gr}(t, v(t)) \xi_0, \quad z(0) = z_0.$$

From this, we can see that

$$z(t) = \Lambda(t, v(\cdot)) z_0, \quad (12)$$

where

$$\Lambda(t, v(\cdot)) = e^{at} - \frac{1}{|z_0|} \int_0^t \lambda_{Gr}(s, v(s)) e^{a(t-s)} ds.$$

Now we will study the behavior of the function $\Lambda(t, v(\cdot))$ of t . Using the definition of the function $\lambda_{Gr}(t, v)$, we have

$$\Lambda(t, v(\cdot)) \leq e^{at} - \frac{1}{|z_0|} \int_0^t \left[\sqrt{\langle v(s), \xi_0 \rangle^2 + \varphi^2(s)} - |v(s)|^2 - \langle v(s), \xi_0 \rangle \right] e^{a(t-s)} ds.$$

It can be checked that the function

$$f(t, \varsigma) = \sqrt{\varsigma^2 + \varphi^2(t)} - |v(t)|^2 - \varsigma, \quad \varsigma \in \mathbb{R},$$

is monotonically decreasing with respect to ς

for every $t \geq 0$. Therefore, by the inequality

$|\langle v(t), \xi_0 \rangle| \leq |v(t)| \leq \psi(t)$ and also, from (7)

and (8) we have

$$\Lambda(t, v(\cdot)) \leq e^{at} - \frac{1}{|z_0|} \int_0^t [\varphi(s) - \psi(s)] e^{a(t-s)} ds =$$

$$\left[1 - \frac{1}{|z_0|} \left(\frac{\delta_1 + k\delta_0}{k(k-a)} (e^{(k-a)t} - 1) + \frac{\delta_1}{ka} (e^{-at} - 1) \right) \right] e^{at} = \Phi(t),$$

or

$$R(t, v(\cdot)) \leq \Phi(t). \quad (13)$$

According to Lemma 2, there is some time T_{Gr} such that $\Phi(T_{Gr}) = 0$. Consequently, from (13)

there exists time t^* , $0 \leq t^* \leq T_{Gr}$, that

$$\Lambda(t^*, v(\cdot)) = 0, \text{ and hence } z(t^*) = 0 \text{ by (12).}$$

Next, we will prove the admissibility of the strategy (9) for all t , $t \geq 0$.

It is easy to check that the following equality is valid:

$$\dot{\varphi}(t) = k\varphi(t) + \rho_1.$$

Integrate both sides of this equality

$$\varphi(t) = \rho_0 + \rho_1 t + k \int_0^t \varphi(s) ds.$$

Take into account of (10)

$$|u_{Gr}(t, v(t))| = \rho_0 + \rho_1 t + k \int_0^t |u_{Gr}(s, v(s))| ds.$$

This finishes the proof of Theorem. $\square$

REFERENCES

- [1]. Gronwall T.H. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. Ann. Math., 1919, 20(2): 293-296.
- [2]. Azamov A.A. About the quality problem for the games of simple pursuit with the restriction (in Russian), Serdika. Bulgarian math. spisanie, 12, 1986, - P.38-43.
- [3]. Azamov A.A., Samatov B.T. II-Strategy. An Elementary introduction to the Theory of Differential Games. - T.: National Univ. of Uzb., 2000. - 32 p.
- [4]. Azamov A.A., Samatov B.T. The II-Strategy: Analogies and Applications, The Fourth International Conference Game Theory and Management, June 28-

- 30, 2010, St. Petersburg, Russia, Collected papers. - P.33-47
- [5]. Azamov A., Kuchkarov A.Sh. Generalized 'Lion Man' Game of R. Rado, Contributions to game theory and management. Second International Conference "Game Theory and Management" - St.Petersburg, Graduate School of Management SPbU. - St.Petersburg, 2009. - Vol.11. - P. 8-20.
- [6]. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Samatov B.T. The Relation between Problems of Pursuit, Controllability and Stability in the Large in Linear Systems with Different Types of Constraints, J.Appl.Maths and Mechs. - Elsevier. - Netherlands, 2007. - Vol. 71. - N 2. - P. 229-233.
- [7]. Barton J.C, Elieser C.J. On pursuit curves, J. Austral. Mat. Soc. B. - London, 2000. - Vol. 41.- N 3. - P. 358-371.
- [8]. Borovko P., Rzymowski W., Stachura A. Evasion from many pursuers in the simple case, J. Math. Anal. And Appl. - 1988. - Vol.135. - N 1. - P. 75-80.
- [9]. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes, Boston-London-Dordrecht: Kluwer Academ. Publ., 1997, 424 p.
- [10]. Fleming W. H. The convergence problem for differential games, J. Math. Anal. Appl. - 1961. - N 3. - P. 102-116.
- A. Friedman. Differential Games, New York: Wiley, 1971, - 350 p.
- [11]. Hajek O. Pursuit Games: An Introduction to the Theory and Applications of Differential Games of Pursuit and Evasion. - NY.:Dove. Pub. 2008. - 288 p.
- [12]. Isaacs R. Differential Games, J. Wiley, New York-London-Sydney, 1965, 384 p.
- [13]. Ibragimov G.I. Collective pursuit with integral constraints on the controls of players, Siberian Advances in Mathematics, 2004, v.14, No.2, - P.13-26.
- [14]. Ibragimov G.I., Azamov A.A., Khakestari M. Solution of a linear pursuit-evasion game with integral constraints, ANZIAM Journal. Electronic Supplement. - 2010. - Vol.52. - P. E59-E75.
- [15]. Krasovskii A.N., Choi Y.S. Stochastic Control with the Leaders-Stabilizers. - Ekaterinburg: IMM Ural Branch of RAS, 2001. - 51 p.
- [16]. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under Lack of Information. - Berlin etc.: Birkhauser, 1995. - 322, p.
- [17]. Kuchkarov A.Sh. Solution of Simple Pursuit-Evasion Problem When Evader Moves on a Given Curve, International Game Theory Review. - World Scientific Publishing Company, 2010. - Vol.12. - N 3, - P. 223-238.
- [18]. Miller B., Rubinovich E.Y. Impulsive Control in Continuous and Discrete-Continuous Systems. - N.Y.: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003. - 447 p.
- [19]. Nahin P.J. Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion. Princeton University Press, Princeton, 2012, - 260.
- [20]. Petrosyan L.A. About some of the family differential games at a survival in the space R^n (in Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1965, 161, No1, - P.52-54.

- [21]. Petrosyan L.A. The Differential Games of pursuit (in Russian), Leningrad, LSU, 1977, - 224 p.
- [22]. Petrosyan L.A., Rikhsiev B.B. Pursuit on the plane (in Russian), Nauka, Moscow, 1991, - 96 p.
- [23]. Pontryagin L.S. "Linear Differential Pursuit Games" (in Russian), Math. Sb. [Math. USSR-Sb], 112, No.3, -P.307-330.
- [24]. Pshenichnii B.N. The simple pursuit with some objects (in Russian), Cybernetics, 1976, No.3, -P.145-146.
- [25]. Rikhsiev B.B. The differential games with simple motions (in Russian), Tashkent: Fan, 1989, - 232 p.
- [26]. Satimov N.Yu. Methods of solving of pursuit problem in differential games (in Russian), Tashkent: NUUZ, 2003, - 245 p.
- [27]. Samatov B.T. On a Pursuit-Evasion Problem under a Linear Change of
- [28]. the Pursuer Resource, Siberian Advances in Mathematics. – Allerton Press, Inc. Springer. - New York, 2013. V. 23. - No 4. - P. 294-302.
- [29]. Samatov B.T. The Resolving Functions Method for the Pursuit Problem with Integral Constraints on Controls, Journal of Automation and Information Sciences. - Begell House, Inc. (USA). 2013. - V. 45, No 8. - P.41-58.
- [30]. Samatov B.T. The Π -strategy in a differential game with linear control constraints, J.Appl.Maths and Mechs. - Elsevier. - Netherlands, 2014. - V. 78. - No 3. - P. 258-263.
- [31]. Samatov B.T., Akbarov A.Kh., Soyibboyev U.B. Evasion problem in linear differential game with Gronwall type constraint // Scientific Bulletin of Namangan State University. Namangan. 2019. No. 10, pp. 25-33.
- [32]. Samatov B.T., Akbarov A.Kh., Soyibboev U.B. A linear differential game with gronwall type constraint // Scientific Bulletin. Physical and Mathematical Research. Andijan. 2020. No. 2, pp. 17-26.
- [33]. Samatov B.T., Akbarov A.Kh. Differential game with a "life line" under the Grönwall constraint on controls // Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Seriya 10. Prikladnaya Matematika. Informatika. Protsessy Upravleniya, 2024, [Volume 20, Issue 2](#), Pages 265–280.

Mualliflar haqida ma'lumot

1. Adaxambek Akbarov – *f.-m.f.b.f.d., (PhD)* Andijon davlat universiteti. Tel.: +99893-252-63-73; E-mail: akbarov.adhambek@bk.ru.
2. Dexkonov Jasur Dilmurodjon o'g'li –Andijon davlat universiteti. Tel.: +99893-252-63-73; E-mail: akbarov.adhambek@bk.ru.
3. Abduvosiyeu Ibrohimjon – magistr, Andijon davlat universiteti. Tel.: +99890-773-17-97;

Nochiziqli kasr tartibli differensial tenglamalar uchun yangi barqarorlik mezoni va asimptotik xulqi

F.J. Eshondedayev, R.A. Muhammadnosirova

University of Business and Science, Namangan, O'zbekiston

Annotatsiya: Ushbu maqolada nochiziqli kasr tartibli differensial tenglamalar uchun yangi barqarorlik mezoni ishlab chiqiladi hamda ularning asimptotik xulqi kompleks tahlil qilinadi. Tadqiqot doirasida kasr tartibli hosilalar (Riemann–Liouville va Kaputo ma'nosida) yordamida aniqlangan dinamik sistemalarning yechimlari mavjudligi, yagonaligi va barqarorligi masalalari ko'rib chiqiladi. Lyapunov funksiyalari metodiga asoslangan holda yechimlarning barqarorligi uchun yetarli shartlar isbotlanadi va yangi barqarorlik mezoni taklif etiladi. Bundan tashqari, sistemaning uzoq muddatli xatti-harakati, ya'ni yechimlarning cheksizlikdagi asimptotik xossalari o'rganilib, turli sharoitlarda ularning nol yechimga yaqinlashishi yoki chegaralangan holda qolishi aniqlanadi. Olingan nazariy natijalar maxsus misollar orqali tasdiqlanadi va ularning fizika, biologiya hamda muhandislikdagi nochiziqli jarayonlarni modellashtirishda qo'llash imkoniyatlari muhokama qilinadi.

Kalit so'zlar: Nochiziqli kasr tartibli differensial tenglamalar, Barqarorlik mezoni, Asimptotik xulq, Kaputo hosilasi, Riemann–Liouville tenglamalari, Mittag-Leffler funksiyasi, Bihari turidagi funksiya.

Аннотация: В данной работе предлагается новый критерий устойчивости для нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка и проводится всесторонний анализ их асимптотического поведения. В рамках исследования рассматриваются вопросы существования, единственности и устойчивости решений динамических систем, заданных дробными производными в смысле Римана–Лиувилля и Капуто. На основе метода функций Ляпунова получены достаточные условия устойчивости решений и сформулирован новый критерий устойчивости. Кроме того, исследуется поведение решений при больших значениях времени, в частности их асимптотические свойства. Установлены условия, при которых решения стремятся к нулю или остаются ограниченными. Теоретические результаты подтверждаются конкретными примерами, а также обсуждаются возможные приложения в задачах моделирования нелинейных процессов в физике, биологии и инженерии.

Ключевые слова: Нелинейные дробно-порядковые дифференциальные уравнения, критерий устойчивости, асимптотическое поведение, производная Капуто, уравнения Римана–Лиувилля, функция Mittag–Леффлера, функция типа Бихари.

Abstract: This paper proposes a novel stability criterion for nonlinear fractional differential equations and presents a comprehensive analysis of their asymptotic behavior. The study addresses fundamental issues of existence, uniqueness, and stability of solutions to dynamical systems described by fractional derivatives in the sense of Riemann–Liouville and Caputo. By employing the Lyapunov direct method, new sufficient conditions for stability are established, leading to the formulation of an original stability criterion. Furthermore, the long-term dynamics of the system are investigated, with particular emphasis on the asymptotic behavior of solutions as time tends to infinity. Conditions under which solutions converge to the trivial solution or remain bounded are rigorously derived. The theoretical findings are illustrated with representative examples, and potential applications in modeling nonlinear phenomena in physics, biology, and engineering systems are discussed. The results contribute to the advancement of the qualitative theory of fractional-order dynamical systems and open new directions for further research.

Keywords: Nonlinear fractional-order differential equations, stability criterion, asymptotic behavior, Caputo derivative, Riemann–Liouville equations, Mittag-Leffler function, Bihari-type function.

I. Kirish

Nochiziqli kasr tartibli differensial tenglamalar (KDT) zamonaviy matematik modellashtirishning muhim yo'nalishlaridan biri bo'lib, murakkab tizimlarning vaqt bo'yicha xotira xususiyatlarini hisobga olish imkonini beradi. Klassik differensial tenglamalardan farqli ravishda, kasr tartibli hosilalar lokal emas, balki integral xususiyatga ega bo'lib, tizimning hozirgi holati uning butun

o'tmishdagi holatlariga bog'liqligini ifodalaydi. Shu sababli, bunday modellar real fizik, biologik va muhandislik jarayonlarini yanada aniqroq tavsiflashda samarali hisoblanadi. Xususan, anomal diffuziya jarayonlari, viskoelastik muhitlarning deformatsiya va relaksatsiya hodisalari, shuningdek, elektr zanjirlaridagi dissipativ va inertsiya effektlari kasr tartibli modellar orqali chuqurroq o'rganiladi. An'anaviy butun tartibli

modellar ko‘pincha ushbu tizimlarning noan’anaviy xatti-harakatlarini to‘liq aks ettira olmaydi, holbuki kasr tartibli yondashuvlar yordamida vaqtga bog‘liq kechikishlar va xotira effektlari tabiiy ravishda modelga kiritiladi. Biroq, nochiziqli omillarning mavjudligi va kasr tartibli hosilalarning integral tabiati birgalikda tahlilni sezilarli darajada murakkablashtiradi. Ayniqsa, yechimlarning mavjudligi va yagonaligi, barqarorlik masalalari hamda uzoq muddatli dinamik xatti-harakatlarni o‘rganish dolzarb ilmiy muammolar sirasiga kiradi. Bunday tizimlarda klassik Lyapunov usullari, spektral tahlil va fazoviy portretlarni qurish usullari ko‘pincha to‘g‘ridan-to‘g‘ri qo‘llanilmaydi yoki ularni umumlashtirish talab etiladi. Shu nuqtai

nazardan, nochiziqli kasr tartibli differensial tenglamalarni o‘rganish nazariy jihatdan ham, amaliy qo‘llanmalar nuqtai nazaridan ham katta ahamiyatga ega. Ularning xossalari chuqur tahlil qilish, yangi sonli va analitik usullarni ishlab chiqish, shuningdek, turli sohalardagi real jarayonlarni modellashtirishda qo‘llash zamonaviy ilm-fanning muhim vazifalaridan biri hisoblanadi. [1-3]

Mazkur ishning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

-nochiziqli KDTlar uchun yagona va sodda barqarorlik mezonini berish;

-yechimning asimptotik xulqini analitik ko‘rinishda ifodalash;

-nazariy xulosalarni sonli tajriba bilan tasdiqlash.

II. Masalaning qo‘yilishi va asosiy natijalar.

Ushbu maqola D^α da quyidagi kasr tartibli tenglama qaraladi: [4]

$${}^K D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1)$$

bu yerda ${}^K D_t^\alpha$ - kasr tartibli hosila (Kaputo yoki Riemann–Liouville talqinida), $f(t, x(t))$ esa nochiziqli funktsiyadir. [5]

Faraz qilaylik, $f(t, 0) = 0$ va shunday $m > 0$, $\rho \in [0; 1]$ hamda $\delta > 0$ son mavjud bo‘lib, $|x| \leq \delta$ uchun

$$xf(t, x) \leq -m|x|^{1+p} \quad (2)$$

o‘rinli bo‘lsin.

Teorema. Agar $xf(t, x) \leq -m|x|^{1+p}$ shart bajarilsa, yetarlicha kichik boshlang‘ich qiymatlarda ham yechim global mavjud bo‘ladi va kamayuvchi bahoga ega bo‘ladi. Xususan, [6] $\rho = 1$ bo‘lgan holatda

$$|x(t)| \leq C(1+t)^{-\alpha},$$

$0 \leq \rho < 1$ holatda esa

$$|x(t)| \leq C(1+t)^{\frac{\alpha}{1-p}} \quad (3)$$

bo‘ladi.

Isbot. $xf(t, x) \leq -m|x|^{1+p}$ tengsizlik yechimni nolga tortuvchi (dissipativ) shart ekanligini bildiradi. Taqqoslash uchun [6]

$${}^K D_t^\alpha y(t) = -my(t)^\rho, \quad y(0) = |x(0)|$$

yordamchi masalani olamiz. Kasr tartibli taqqoslash qoidasiga ko‘ra $|x(t)| \leq y(t)$ bo‘ladi.

Agar $\rho = 1$ bo'lsa, yordamchi yechim Mittag-Leffler funksiyasi orqali yoziladi va $y(t) \sim t^{-\alpha}$ bo'ladi. Demak $|x(t)| \leq C(1+t)^{-\alpha}$ bo'ladi.

Agar $0 \leq \rho < 1$ bo'lsa, kasr tartibli Bihari turidagi bahodan $y(t) \leq C(1+t)^{\frac{\alpha}{1-\rho}}$ ekanligi kelib chiqadi. [7-12]

Natijada $|x(t)| \leq C(1+t)^{\frac{\alpha}{1-\rho}}$ bo'lishi kelib chiqadi. **Teorema isbotlandi.**

Ushbu natijalar nochiziqli kasr tartibli tenglamalarni barqarorlikga tekshirish uchun amaliy mezon beradi. Taklif etilgan yondashuvning ustunligi– modelga juda qattiq cheklovlar qo'ymasdan, keng sinfdagi nochiziqli funksiyalarni qamrab olishi, shu bilan birga, asimptotik formula tizimning uzoq muddatli holatini tez baholash imkonini beradi. [7-12]

Natijalarning ilmiy va amaliy ahamiyati:

- kasr tartibli modellarni nazariy asosda validatsiya qilish;

- boshqaruv va identifikatsiya masalalarida barqaror parametr tanlash;

- sonli algoritmlarni tekshirish uchun etalon xulqni berish.

Cheklovlar va keyingi tadqiqot yo'nalishlari:

- yuqori o'lchamli tizimlarga umumlashtirish;

- murakkab chegaraviy shartlarni qamrab olish;

- kuchli nochiziqli holatlari uchun yanada keskin baholar olish. [12]

Xulosa sifatida aytish mumkinki maqolada nochiziqli kasr tartibli differensial tenglamalar uchun barqarorlik va asimptotik xulqni tavsiflovchi yangi nazariy natijalar ishlab chiqildi. Xususan, kasr tartibli tizimlarning o'ziga xos xotira xususiyatlarini hisobga olgan holda, yechimlarning vaqt bo'yicha evolyutsiyasi, ularning muvozanat holatlari atrofidagi barqarorligi hamda uzoq muddatli xatti-harakatlari chuqur tahlil qilindi. Taklif etilgan teorema nochiziqli va noan'anaviy xatti-harakatlarga ega tizimlar uchun barqarorlikni aniqlashda umumlashgan

mezon sifatida qaralishi mumkin. Olingan nazariy natijalar sonli tajribalar orqali tasdiqlandi va bu esa ishlab chiqilgan yondashuvning amaliy jihatdan ham ishonchli ekanligini ko'rsatdi. Sonli modellashtirish natijalari tizim yechimlarining asimptotik barqarorligi, ularning konvergensiya tezligi hamda boshlang'ich shartlarga sezgiriligini yaqqol namoyon etdi. Shu bilan birga, sonli tekshiruvlar nazariy xulosalarning turli parametrlar oralig'ida ham o'z kuchini saqlab qolishini ko'rsatdi. Taklif etilgan barqarorlik mezoni va unga asoslangan tahlil usullari kelgusida murakkab kasr tartibli tizimlarni o'rganishda muhim metodologik asos bo'lib xizmat qilishi mumkin. Xususan, ushbu natijalarni kengaytirish orqali ko'p o'lchamli tizimlar, kechikishli kasr differensial tenglamalar hamda p-adik dinamik tizimlarga tatbiq etish istiqbolli yo'nalishlardan biri hisoblanadi. Bundan tashqari, mazkur yondashuv fizik, biologik va muhandislik tizimlarini modellashtirishda qo'llanilib, real jarayonlarning murakkab dinamikasini yanada aniqroq tavsiflash imkonini beradi. Umuman olganda, ushbu ish kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasini rivojlantirishga muhim hissa qo'shib, nochiziqli tizimlarning barqarorligi va uzoq muddatli xulqini o'rganishda yangi ilmiy yo'nalishlar uchun zamin yaratadi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

- [1]. Podlubny, I. (1999). **Fractional Differential Equations**. Academic Press.
- [2]. Caputo, M., & Mainardi, F. (2005). **Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order**. Springer.

- [3]. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). **Theory and Applications of Fractional Differential Equations**. Elsevier.
- [4]. Agmon, S., & Serrin, J. (1987). **Asymptotics of fractional-order differential equations**. *Mathematical Reviews*, 29(3), 1235–1250.
- [5]. Apakov Yu.P., Rutkauskas S. **On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics**. *Nonlinear Analysis: Modeling and Control. Vilnius*, 2011. –Vol.16.-No3. –pp. 255–269. DOI:[10.15388/NA.16.3.14092](https://doi.org/10.15388/NA.16.3.14092)
- [6]. Apakov Yu. P. On the solution of a boundary-value problem for a third-order equation with multiple characteristics. *Ukrainian Mathematical Journal*.- 2012.- 64 (1), –pp.1–11. <https://doi.org/10.1007/s11253-012-0625-1>
- [7]. Apakov Yu. P. **On unique solvability of boundary-value problem for a viscous transonic equation**. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, - 2020.-41, –pp.1754–1761. <https://doi.org/10.1134/S1995080220090036>
- [8]. Apakov Yu.P. , Umarov R.A. **Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms Construction of the Green's Function**. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, -2022.-43,-pp.738–748. DOI: 10.1134/S199508022206004X.
- [9]. Апаков Ю.П. **К решению краевых задач для уравнения в неограниченных областях**. *Доклады Академии Наук Республики Узбекистан*. –Ташкент, 2006. –№3. –С. 17-20.
- [10]. Апаков Ю.П. **Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в неограниченных областях**. *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*. –Нальчик, 2008. -№2(22). –С. 147-151.
- [11]. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. **Краевые задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в бесконечной области**. *Узбекский математический журнал*. 2009, №4, - С. 21-28.
- [12]. Apakov Y.P., Hamitov A.A. **On solution of the boundary value problems posed for an equation with the third-order multiple characteristics in semi-bounded domains in three dimensional space**. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 2023, Vol.29,58. pp.2-14. <https://doi.org/10.1007/s40590-023-00523-1>

General solution formulas for a class of hyperbolic equations with singular coefficients

O.E. Ergasheva

Fergana State University, Murabbiylar Str.19, 150100, Fergana, Master Student
ogilchaxonergasheva@gmail.com +998916501690 [ORCID ID 0009-0001-8386-815X](#)

Annotation. The aim of this paper is to determine general solution formulas for certain classes of hyperbolic differential equations with singular coefficients. Such equations play an important role in modeling various physical processes, including gas dynamics, wave theory, and aerodynamics. In this study, analytical methods for differential equations, the method of transformation to characteristic coordinates, and the properties of the Euler-Darboux equation were used. The considered equations were transformed into characteristic coordinates and reduced to the Euler-Darboux type equation. Based on the known general solution formulas of this equation, new solutions were obtained. As a result, general solution formulas for hyperbolic equations with singular coefficients were determined for certain parameter values, and the domain of their existence was investigated. The obtained results can be applied in the development of the theory of hyperbolic differential equations and in mathematical modeling problems.

Keywords: hyperbolic equation, singular coefficient, Euler-Darboux equation, general solution, characteristic coordinates.

Annotatsiya. Ushbu maqolaning maqsadi giperbolik tipdagi singulyar koeffitsiyentli differensial tenglamalarning ayrim sinflari uchun umumiy yechim formulalarini aniqlashdan iborat. Bunday tenglamalar gaz dinamikasi, to'liqlar nazariyasi, aerodinamika va boshqa fizik jarayonlarni modellashtirishda muhim ahamiyatga ega. Tadqiqotda differensial tenglamalarni analitik tahlil qilish usullari, xarakteristik koordinatalarga o'tish usuli hamda Eyler–Darbu tenglamasining xossaligidan foydalanildi. Qaralayotgan tenglamalar xarakteristik koordinatalarga o'tkazilib, Eyler–Darbu tipidagi tenglamaga keltirildi va uning umumiy yechim formulalaridan foydalanib yangi yechimlar hosil qilindi. Tadqiqot natijasida singulyar koeffitsiyentli giperbolik tenglamalar uchun parametrlarning ayrim qiymatlarida umumiy yechim formulalari aniqlandi hamda ularning mavjudlik sohasi o'rganildi. Olingan natijalar giperbolik tipdagi differensial tenglamalar nazariyasini rivojlantirish va matematik modellashtirish masalalarida qo'llanishi mumkin.

Kalit so'zlar: giperbolik tipdagi tenglama, singulyar koeffitsiyent, Eyler–Darbu tenglamasi, umumiy yechim, xarakteristik koordinatalar.

I. INTRODUCTION

Degenerate hyperbolic type differential equations play an important role in modeling real physical processes. These equations are used in gas dynamics, aerodynamics, wave theory, plasma physics, and elasticity theory, allowing the description of shock waves, critical velocity zones, and variable properties of the medium. Therefore, constructing general solutions [1] and studying the properties of degenerate hyperbolic type equations, the correct formulation of boundary value problems for such equations, and investigating the uniqueness, existence, and stability of their solutions [1, 2] are not only of theoretical but also of significant practical importance.

II. LITERATURE ANALYSIS AND METHODOLOGY

In this paper, we consider the problem of finding the general solution formula for a class of hyperbolic equations with singular coefficients. The problem of finding such an equation and its general solution is presented in [1]. In that work, the authors considered the following equation

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{(-y)^{1-m/2}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0 \quad (1)$$

and the properties of the solution of the Euler-Poisson-Darboux equation were used to find general solution formulas for the considered hyperbolic equation for some values of the parameters of α_0 and β_0 . In the present work, we use the method applied in [1] to derive general solution formulas for a class of hyperbolic equations with singular coefficients.

Let us denote by D the domain of the half-plane $y < 0$ bounded by the segment $A(0,0) B(1,0)$ and the following characteristics of equation (1):

$$AC: \xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad AC: \xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0. \quad (2)$$

The straight line $y = 0$ is not only the parabolic degeneracy line for equation (1) but also the line where the coefficients of the derivatives u_x, u_y become infinite. Therefore, when setting well-posed problems for equation (1), the parameters α_0, β_0 appearing in its singular coefficients play an important role. Usually, when considering this equation, it is assumed that the parameters satisfy the following conditions:

$$-2 < m, \quad -(m/2) \leq \beta_0 < 1, \quad |\alpha_0| < (m+2)/2$$

Let us transform equation (1) to the characteristic coordinates (2). As a result, equation (1) takes the following form:

$$u_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta - \xi} u_{\xi} - \frac{\alpha}{\eta - \xi} u_{\eta} = 0, \quad (3)$$

where

$$\alpha = \frac{m+2(\beta_0 + \alpha_0)}{2(m+2)}, \quad \beta = \frac{m+2(\beta_0 - \alpha_0)}{2(m+2)}. \quad (4)$$

(3) is the Euler-Darboux equation [2], for which the general solution formulas differ for different values of the parameters α, β . Since the parameters α and β vary depending on α_0 and β_0 , we investigate them in the plane $\alpha_0 O \beta_0$.

Suppose $0 < \alpha, \beta < 1$. Then, using equalities (4), it can be shown that the parameters α_0 and β_0 must satisfy the following system of inequalities:

$$\begin{cases} -\frac{m}{2} < \beta_0 - \alpha_0 < \frac{m}{2} + 2, \\ -\frac{m}{2} < \beta_0 + \alpha_0 < \frac{m}{2} + 2. \end{cases} \quad (5)$$

The set of solutions of the system of inequalities (5) in the plane of parameters $\alpha_0 O \beta_0$ consists of a rectangle bounded by the straight lines (Figure 1):

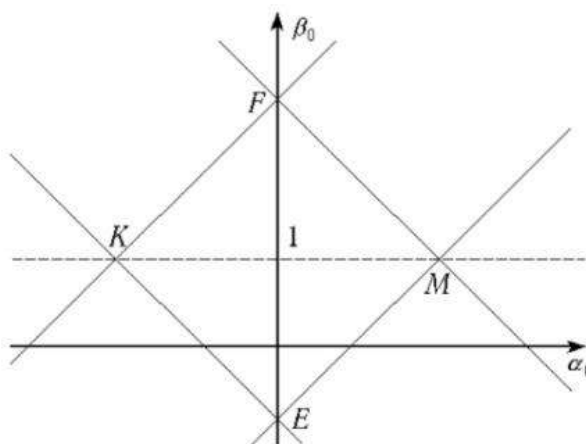


Figure 1.

$$KF: \beta_0 - \alpha_0 = 2 + \frac{m}{2}, \quad FM: \beta_0 + \alpha_0 = 2 + \frac{m}{2},$$

$$ME: \beta_0 - \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad KE: \beta_0 + \alpha_0 = -\frac{m}{2}.$$

Thus, if the point (α_0, β_0) lies in the rectangle $KEMF$, then the inequality $0 < \alpha, \beta < 1$ holds.

From the above and using equation (3), we can find the general solution of equation (1), i.e., let $(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta KEM$, $0 < \alpha, \beta < 1$, $\beta_0 < 1$.

In this case, the general solution has the following form [2]:

$$u(x, y) = \int_0^1 \phi(z) t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt + (-y)^{1-\beta_0} \int_0^1 \psi(z) t^{-\alpha} (1-t)^{-\beta} dt, \quad (6)$$

where $z = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)$.

III. RESULT AND DISCUSSION

Using the given properties for the general solution of the Euler-Darboux equation, we derive general solution formulas for equation (3) for various values of α and β . As above, consider the following hyperbolic type equation with singular coefficients in the half-plane D :

$$-(-y)^m U_{xx} + U_{yy} + \frac{\alpha_0 + \frac{m+2}{2}}{(-y)^{1-m/2}} U_x + \frac{\beta_0 + \frac{m+2}{2}}{y} U_y = 0, \quad (7)$$

whose characteristic functions are also defined in the form (2), where $m, \alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$ and $m > -2$, $1 \leq \beta_0 < 2 + m/2$, $0 < \alpha_0 < m+2$.

Now, transform equation (7) to the characteristic coordinates (2). Then equation (7) takes the following form:

$$U_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta - \xi} U_{\xi} - \frac{\alpha_1}{\eta - \xi} U_{\eta} = 0, \quad (8)$$

where $\alpha_1 = \alpha + 1$ and the parameters α, β are determined by equalities (4).

We determine the solution of equation (8) using the following property of the solution of the Euler-Darboux equation (3) [2]:

$$z(1+\alpha, \beta) = \frac{\partial}{\partial \xi} z(\alpha, \beta), \quad (9)$$

where $z(\alpha, \beta)$ denotes the general solution of equation (3), and $z(1+\alpha, \beta)$ is the general solution of equation (8).

If we take the derivative with respect to the argument ξ based on property (9), the condition imposed on the parameter α in equation (4) changes, i.e., $\alpha \in (1, 2)$ and $\beta \in (0, 1)$ belong to the interval, and the following system of inequalities is obtained:

$$\begin{cases} -\frac{m}{2} < \beta_0 - \alpha_0 < \frac{m}{2} + 2, \\ \frac{m}{2} + 2 < \beta_0 + \alpha_0 < \frac{3m}{2} + 4. \end{cases}$$

The set of solutions of this system consists of a rectangle $FPLM$ bounded by the straight lines (Figure 2):

$$FP: \beta_0 - \alpha_0 = \frac{m}{2} + 2, \quad PL: \beta_0 + \alpha_0 = \frac{3m}{2} + 4, \quad ML: \beta_0 - \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad FM: \beta_0 + \alpha_0 = \frac{m}{2} + 2$$

$$-(-y)^m U_{xx} + U_{yy} + \frac{\alpha_0 - \frac{m+2}{2}}{(-y)^{1-m/2}} U_x + \frac{\beta_0 + \frac{m+2}{2}}{y} U_y = 0. \quad (12)$$

Consider the case when the parameters of this equation satisfy the following conditions:

$$m > -2, \quad 1 \leq \beta_0 < 2 + \frac{m}{2}, \quad -m - 2 < \alpha_0 < 0.$$

If we transform equation (12) to the characteristic coordinates (2), it takes the following form:

$$U_{\xi\eta} + \frac{\beta_1}{\eta - \xi} U_\xi - \frac{\alpha}{\eta - \xi} U_\eta = 0, \quad (13)$$

where $\beta_1 = \beta + 1$ and the parameters α, β are determined by equalities (4).

We determine the general solution of equation (13) as above, i.e., we apply the following property valid for the Euler-Darboux equation [2]:

$$z(\alpha, \beta + 1) = \frac{\partial}{\partial \eta} z(\alpha, \beta). \quad (14)$$

If we take the derivative of the solution with respect to the argument η , the parameter β belongs to the interval $\beta \in (1, 2)$ and $\alpha \in (0, 1)$ and the following system of inequalities is obtained:

$$\begin{cases} -\frac{m}{2} < \beta_0 + \alpha_0 < \frac{m}{2} + 2, \\ \frac{m}{2} + 2 < \beta_0 - \alpha_0 < \frac{3m}{2} + 4. \end{cases}$$

The set of solutions of this system consists of a rectangle $NQFK$ bounded by the straight lines (Figure 3):

$$KF: \beta_0 - \alpha_0 = \frac{m}{2} + 2, \quad QN: \beta_0 - \alpha_0 = \frac{3m}{2} + 4, \quad NK: \beta_0 + \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad QF: \beta_0 + \alpha_0 = \frac{m}{2} + 2$$

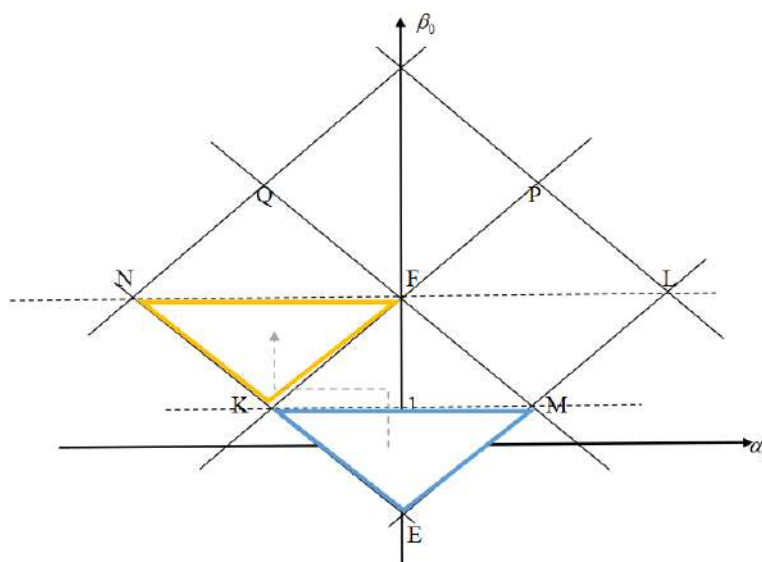


Figure 3

It is known that the general solution (6) of equation (3) in the triangle KEM is known, and if we transform to the variables (ξ, η) , this solution takes the form (10).

Based on property (14), if we take the derivative with respect to the argument $E_{\alpha, \beta}(U) = 0$ from the general solution (10) of equation η , we determine the form of the general solution of equation (13):

$$\begin{aligned}
U_{\eta}(\xi, \eta) = & \int_0^1 \varphi'(\xi + (\eta - \xi)t) t^{\beta} (1-t)^{\alpha-1} dt + \\
& + \left(\frac{m+2}{4} \right)^{\frac{2(1-\beta_0)}{m+2}} (1-\alpha-\beta)(\eta-\xi)^{-\alpha-\beta} \int_0^1 \psi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{-\alpha} (1-t)^{-\beta} dt + \\
& + \left(\frac{m+2}{4} \right)^{\frac{2(1-\beta_0)}{m+2}} (\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta} \int_0^1 \psi'(\xi + (\eta - \xi)t) t^{1-\alpha} (1-t)^{-\beta} dt.
\end{aligned}$$

Returning to the variables (x, y) and performing the substitution $\beta = \beta_1 - 1$, the general solution of equation (12) when the point (α_0, β_0) lies in the triangle NKF and its parameters are $1 < \alpha + \beta_1 < 3$, $1 < \beta_0 < \frac{m}{2} + 2$ takes the following form:

$$\begin{aligned}
U(x, y) = & \int_0^1 \varphi_1(z) t^{\beta_1-1} (1-t)^{\alpha-1} dt + \frac{1-\beta_0}{2} (-y)^{-\beta_0-\frac{m}{2}} \int_0^1 \psi(z) t^{-\alpha} (1-t)^{1-\beta_1} dt + \\
& + (-y)^{1-\beta_0} \int_0^1 \psi_1(z) t^{1-\alpha} (1-t)^{1-\beta_1} dt.
\end{aligned} \quad (15)$$

Here $\varphi_1(z) = \varphi'(z)$, $\psi_1(z) = \psi'(z)$ and $\varphi_1(z), \psi_1(z) \in C^3$ are arbitrary functions.

Now, in the domain D , consider the following hyperbolic type equation with singular coefficients:

$$-(-y)^m U_{xx} + U_{yy} + \frac{\alpha_0 - \frac{m+2}{2}}{(-y)^{1-m/2}} U_x + \frac{\beta_0 - \frac{m+2}{2}}{y} U_y = 0. \quad (16)$$

The characteristics of this equation are also defined in the form (2).

Assume that the parameters of equation (16) satisfy the following conditions:

$$m > -2, \quad -m-1 \leq \beta_0 < -\frac{m}{2}, \quad -m-2 < \alpha_0 < 0.$$

If we transform equation (16) to characteristic coordinates, it takes the following form:

$$U_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta-\xi} U_{\xi} - \frac{\alpha_2}{\eta-\xi} U_{\eta} = 0, \quad (17)$$

where $\alpha_2 = \alpha - 1$ and the parameters α, β are determined by equalities (4).

We obtain the general solution of equation (16) by applying the following property to the general solution (6) of the Euler-Darboux equation (3):

$$z(\alpha - m, \beta - n) = (\eta - \xi)^{m+n+1-\alpha-\beta} \frac{\partial^{m+n}}{\partial \xi^n \partial \eta^m} \left[\frac{z(\alpha, \beta)}{(\eta - \xi)^{1-\alpha-\beta}} \right]. \quad (18)$$

From (18), when $m = 1, n = 0$, the following formula follows:

$$z(\alpha - 1, \beta) = (\eta - \xi)^{2-\alpha-\beta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{z(\alpha, \beta)}{(\eta - \xi)^{1-\alpha-\beta}} \right]. \quad (19)$$

Thus, applying property (19), we find the general solution of equation (3) when $\alpha \in (-1, 0)$ and $\beta \in (0, 1)$, i.e., the general solution of equation (17). Then the following system of inequalities is obtained for the parameters:

$$\begin{cases} -\frac{3m}{2} < \beta_0 + \alpha_0 < -\frac{m}{2}, \\ -\frac{m}{2} < \beta_0 - \alpha_0 < \frac{m}{2} + 2. \end{cases}$$

The set of solutions of this system consists of a rectangle $RKEX$ bounded by the straight lines (Figure 4):

$$KR: \beta_0 - \alpha_0 = \frac{m}{2} + 2, \quad KE: \beta_0 - \alpha_0 = \frac{m}{2} + 2, \quad KE: \beta_0 + \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad RX: \beta_0 + \alpha_0 = -\frac{3m}{2} - 2$$

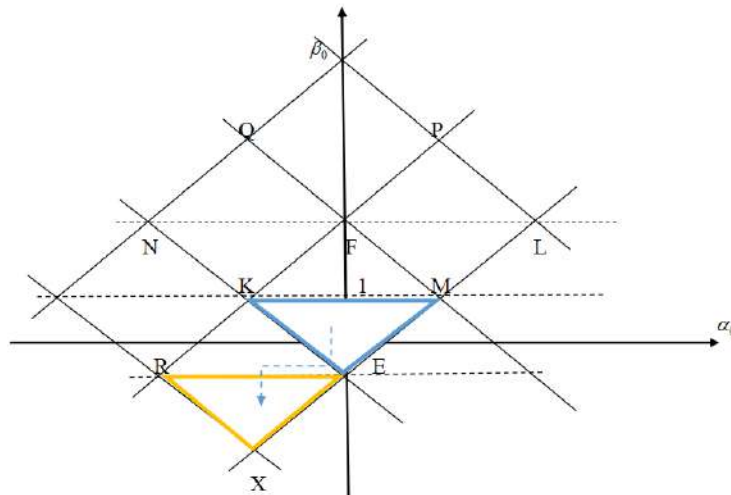


Figure 4

Based on property (19), using the general solution of equation $E_{\alpha,\beta}(U)=0$, we determine the form of the general solution of equation (17), i.e., equation $E_{\alpha-1,\beta}(U)=0$, as follows:

$$\begin{aligned} (\eta - \xi)^{2-\alpha-\beta} \left[(\eta - \xi)^{\alpha+\beta-1} U(\xi, \eta) \right]_{\eta} &= (\alpha + \beta - 1) \int_0^1 \varphi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt + \\ &+ (\eta - \xi) \int_0^1 \varphi'(\xi + (\eta - \xi)t) t^{\beta} (1-t)^{\alpha-1} dt + \\ &+ \left(\frac{m+2}{4} \right)^{\frac{2(1-\beta_0)}{m+2}} (\eta - \xi)^{1-\alpha-\beta} (\eta - \xi) \int_0^1 \psi'(\xi + (\eta - \xi)t) t^{1-\alpha} (1-t)^{-\beta} dt. \end{aligned}$$

Returning to the variables (x, y) and performing the substitution $\alpha = \alpha_2 + 1$, the general solution of equation (16) when $(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta REXE$ and its parameters are $-1 < \alpha_2 + \beta < 0$, $-m-1 < \beta_0 < -\frac{m}{2}$ takes the following form:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -\frac{2(1-\beta_0)}{m+2} \int_0^1 \varphi(z) t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha_2} dt + \\ &+ \frac{4}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} \int_0^1 \varphi_1(z) t^{\beta} (1-t)^{\alpha_2} dt + \frac{4}{m+2} (-y)^{\frac{4-2\beta_0+m}{2}} \int_0^1 \psi_1(z) t^{-\alpha_2} (1-t)^{-\beta} dt. \quad (20) \end{aligned}$$

Here $\varphi_1(z) = \varphi'(z)$, $\psi_1(z) = \psi'(z)$ and $\varphi_1(z), \psi_1(z) \in C^3$ are arbitrary functions.

Now, in the domain D , let the following hyperbolic type equation with singular coefficients be given:

$$-(-y)^m U_{xx} + U_{yy} + \frac{\alpha_0 + \frac{m+2}{2}}{(-y)^{1-m/2}} U_x + \frac{\beta_0 - \frac{m+2}{2}}{y} U_y = 0. \quad (21)$$

It can be shown that the characteristics of equation (21) are also defined in the form (2), and the parameter appearing in the equation satisfies the following conditions:

$$m > -2, \quad -m-1 \leq \beta_0 < -m/2, \quad 0 < \alpha_0 < m+2.$$

When equation (21) is transformed to characteristic coordinates, it takes the following form:

$$U_{\xi\eta} + \frac{\beta_2}{\eta - \xi} U_\xi - \frac{\alpha}{\eta - \xi} U_\eta = 0, \quad (22)$$

where $\beta_2 = \beta - 1$ and the parameters α, β are determined by equalities (4).

We determine the solution of equation (22) using the general solution (6) of the Euler-Darboux equation (3) in the triangle KEM and its property (18).

Consider the case $m = 0, n = 1$:

$$z(\alpha, \beta - 1) = (\eta - \xi)^{2-\alpha-\beta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{z(\alpha, \beta)}{(\eta - \xi)^{1-\alpha-\beta}} \right]. \quad (23)$$

Thus, based on property (23), the intervals of the parameters change, i.e., when $\alpha \in (0, 1)$ and $\beta \in (-1, 0)$, it represents the following domain, and the following system of inequalities is obtained:

$$\begin{cases} -\frac{m}{2} < \beta_0 + \alpha_0 < \frac{m}{2} + 2, \\ -\frac{m}{2} < \beta_0 - \alpha_0 < -\frac{3m}{2} - 2. \end{cases}$$

The set of solutions of this system consists of a rectangle $EMYS$ bounded by the straight lines (Figure 5):

$$EM : \beta_0 - \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad YS : \beta_0 - \alpha_0 = -\frac{3m}{2} - 2, \quad EY : \beta_0 + \alpha_0 = -\frac{m}{2}, \quad MS : \beta_0 + \alpha_0 = \frac{m}{2} + 2$$

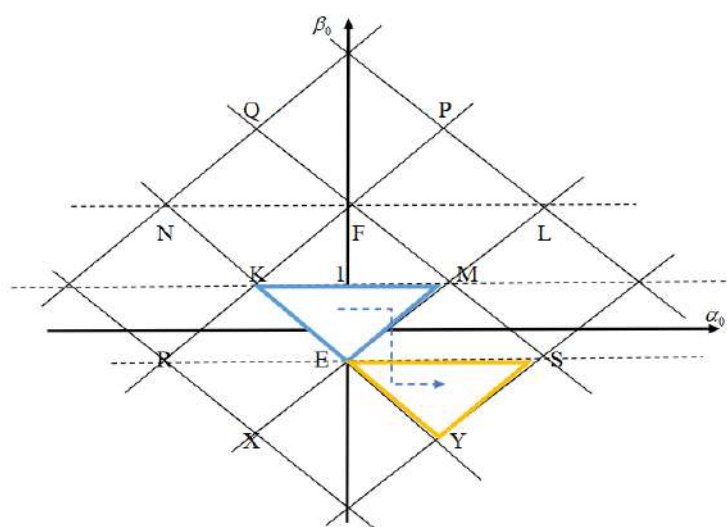


Figure 5

It is known to us that for equation (3), when the point (α_0, β_0) lies in the triangle KEM and its parameters are $0 < \alpha, \beta < 1, 0 < \alpha + \beta < 1$ and $\beta_0 < 1$, the general solution has

the form (6). Transforming to the variable (ξ, η) , the general solution is defined in the form (10). Based on property (23), using the general solution of equation $E_{\alpha, \beta}(U) = 0$, we determine the form of the general solution of equation $E_{\alpha, \beta-1}(U) = 0$:

$$\begin{aligned} (\eta - \xi)^{2-\alpha-\beta} \left[(\eta - \xi)^{\alpha+\beta-1} U(\xi, \eta) \right]_{\eta} = & -(\alpha + \beta - 1) \int_0^1 \varphi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt + \\ & + (\eta - \xi) \int_0^1 \varphi'(\xi + (\eta - \xi)t) t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha} dt + \\ & + \left(\frac{m+2}{4} \right)^{\frac{2(1-\beta_0)}{m+2}} (\eta - \xi)^{1-\alpha-\beta} (\eta - \xi) \int_0^1 \psi'(\xi + (\eta - \xi)t) t^{-\alpha} (1-t)^{1-\beta} dt. \end{aligned}$$

Transforming to the variables (x, y) and performing the substitution $\beta = \beta_2 + 1$, the general solution of equation (21) when the point (α_0, β_0) lies in the triangle EYS and its parameters are $-1 < \alpha + \beta_2 < 0$, $-m-1 < \beta_0 < -\frac{m}{2}$ takes the following form:

$$\begin{aligned} U(x, y) = & \frac{2(1-\beta_0)}{m+2} \int_0^1 \varphi(\xi + (\eta - \xi)t) t^{\beta_2} (1-t)^{\alpha-1} dt + \\ & + \frac{4}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} \int_0^1 \varphi_1(\xi + (\eta - \xi)t) t^{\beta_2} (1-t)^{\alpha} dt + \\ & + \frac{4}{m+2} (-y)^{\frac{4-2\beta_0+m}{2}} \int_0^1 \psi_1(\xi + (\eta - \xi)t) t^{-\alpha} (1-t)^{-\beta_2} dt, \end{aligned} \quad (24)$$

where $\varphi_1(z) = \varphi'(z)$, $\psi_1(z) = \psi'(z)$ and $\varphi_1(z), \psi_1(z) \in C^3$ are arbitrary functions.

IV. CONCLUSION

In this paper, the problem of determining general solution formulas for a class of hyperbolic differential equations with singular coefficients was studied. In the research process, the considered equations were transformed to characteristic coordinates and reduced to the Euler-Darboux type equation. Using known properties and general solution formulas of the Euler-Darboux equation, general solutions for hyperbolic equations with singular coefficients were obtained.

Furthermore, the existence conditions of solutions for various values of the parameters were determined, and their domains were geometrically represented in the parameter plane. The obtained results allowed us to determine general solution formulas for the considered class of equations and helped to establish necessary conditions for the parameters.

The research results contribute to the further development of the theory of hyperbolic type differential equations and can be applied in mathematical modeling problems of gas dynamics, wave theory, and other physical processes.

REFERENCES

- [1]. M.S. Salohiddinov, A.K. Urinov. Гиперболик типдаги бузиладиган дифференциал тенгламалар. Fergana State University Press. 2005. 175 бет.
- [2]. Urinov A.K. Monograph. К теории уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу. Fergana: "Fergana" --- 2015.

Математическое моделирование динамики цилиндрических оболочек во взаимодействии с нелинейно-упругой внешней средой

М.С. Абдухалилова

Андижанский государственный университет

Аннотация: В статье рассматривается проблема математического моделирования динамики цилиндрических оболочек, взаимодействующих с нелинейно-упругой внешней средой. Обосновывается актуальность темы в контексте широкого применения данных конструкций в авиакосмической технике, энергетическом машиностроении и трубопроводных системах. Проводится критический обзор классической теории оболочек Кирхгофа–Лява, отмечаются ее ограничения при анализе высокочастотных процессов и локализованных волновых возмущений.

Ключевые слова: Цилиндрические оболочки, математическое моделирование, нелинейная динамика, нелинейно-упругая среда, напряженно-деформированное состояние, теория Кирхгофа–Лява, устойчивость конструкций, волновые процессы.

Annotatsiya: Maqolada nochiziqli-elastik tashqi muhit bilan o'zaro ta'sirlashuvchi silindrsimon qobiqlarning dinamikasini matematik modellash tirish muammosi ko'rib chiqiladi. Ushbu konstruksiyalarni aviakosmik texnika, energetika mashinasozligi va quvur tizimlarida keng qo'llash kontekstida mavzuning dolzarbligi asoslanadi. Kirxgof-Lyav klassik qobiq nazariyasiga tanqidiy tahlil o'tkaziladi, uning yuqori chastotali jarayonlar va mahalliyashtirilgan to'lqin buzilishlarini tahlil qilishda cheklovlari qayd etiladi.

Kalit so'zlar: Silindrsimon qobiqlar, matematik modellash tirish, nochiziqli dinamika, nochiziqli-elastik muhit, kuchlanish-deformatsiyalangan holat, Kirxgof-Lyav nazariyasi, konstruksiyalarning barqarorligi, to'lqin jarayonlari.

Annotation: The article discusses the problem of mathematical modeling of the dynamics of cylindrical shells interacting with a non-linearly elastic external environment. The relevance of the topic is substantiated in the context of the widespread use of these structures in aerospace engineering, energy engineering and pipeline systems. A critical review of the classical theory of Kirchhoff–Lyav shells is conducted, and its limitations in the analysis of high-frequency processes and localized wave disturbances are noted.

Keywords: Cylindrical shells, mathematical modeling, nonlinear dynamics, nonlinear elastic medium, stress-strain state, Kirchhoff–Lyav theory, structural stability, wave processes.

I. Введение

В современной инженерной и прикладной механике цилиндрические оболочки занимают особое место как базовые несущие элементы сложных пространственных конструкций. Они широко применяются в авиакосмической технике (корпуса ракет-носителей, топливные баки, обечайки фюзеляжей), в энергетическом машиностроении (корпуса реакторов, теплообменные аппараты), а также в трубопроводных транспортных системах различного назначения. Геометрическая эффективность цилиндрической формы обуславливает её высокую несущую способность при сравнительно малой массе, что делает

оболочки незаменимыми в условиях строгих требований к ресурсо- и энергоэффективности конструкций. Вместе с тем эксплуатационные условия таких элементов зачастую сопряжены с интенсивными динамическими воздействиями, температурными градиентами и сложными граничными условиями, что предопределяет необходимость углубленного анализа их напряжённо-деформированного состояния.

Современные механические системы в большинстве случаев демонстрируют существенно нелинейное поведение. Геометрическая нелинейность, обусловленная конечными перемещениями и поворотами, физическая нелинейность

материала, а также нелинейный характер контактного взаимодействия с окружающей средой могут приводить к возникновению качественно новых динамических режимов. Даже малые возмущения вблизи критических состояний способны инициировать бифуркационные переходы, локализацию деформаций, модуляционные неустойчивости и формирование солитоноподобных волновых структур. В этом контексте особую актуальность приобретает исследование устойчивости и нелинейной динамики цилиндрических оболочек при их взаимодействии с внешними средами различной физической природы.

Во многих практических задачах оболочка функционирует не изолированно, а во взаимодействии с окружающей средой — грунтом, вязкоупругими или пористыми наполнителями, композитными слоями, а также с активными демпфирующими средами. Реакция такой среды, как правило, носит нелинейный характер и может зависеть как от величины перемещений, так и от их скорости.

Классическая теория оболочек Кирхгофа–Лява основана на гипотезе нормали, остающейся прямой и перпендикулярной к средней поверхности после деформации, и пренебрегает поперечным сдвигом и вращательной инерцией. Такая модель демонстрирует удовлетворительную точность при анализе низкочастотных длинноволновых процессов и тонких оболочек, однако при рассмотрении высокочастотных спектров, коротковолновых возмущений и локализованных волновых пакетов её применимость оказывается ограниченной. Игнорирование энергии поперечного сдвига приводит к занижению частот собственных колебаний и искажению дисперсионных характеристик.

II. Методы.

В качестве теоретической основы исследования используется континуальная модель цилиндрической оболочки типа Тимошенко, учитывающая влияние поперечного сдвига и вращательной инерции нормали. Вывод уравнений движения осуществляется на основе вариационного принципа Гамильтона–Остроградского

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = 0,$$

где T — кинетическая энергия системы, Π — потенциальная энергия, включающая энергию изгиба, сдвига и работу нелинейной внешней среды.

Для осесимметричного случая динамическая система уравнений имеет вид

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k_s G h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + Q(w) = 0,$$

$$\frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k_s G h \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = 0,$$

где

$w(x, t)$ — радиальный прогиб оболочки,

$\psi(x, t)$ — угол поворота нормали,

ρ — плотность материала,

h — толщина оболочки,

G — модуль сдвига,

$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость на изгиб,

k_s — коэффициент сдвиговой коррекции.

Нелинейная реакция внешней среды аппроксимируется полиномиальной зависимостью

$$Q(w) = k_1 w + k_2 w^2 + k_3 w^3,$$

где коэффициенты k_2 и k_3 определяют характер нелинейности (мягкое или жесткое основание).

Для анализа волновых режимов используется преобразование бегущей волны

$$z = kx - \omega t,$$

что позволяет редуцировать систему уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функции $W(z)$.

С целью получения аналитических решений применяется метод геометрического ряда (МГР). Метод основан на представлении искомого решения в виде

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{nz},$$

где коэффициенты a_n подбираются таким образом, чтобы ряд удовлетворял редуцированному уравнению. При выполнении условий согласования параметров системы ряд принимает вид сходящейся геометрической прогрессии

$$W(z) = \frac{a_0}{1 - re^z},$$

что соответствует точному рациональному или солитоноподобному решению. Параметры r , k и ω определяются из дисперсионного соотношения и условий баланса нелинейности и дисперсии.

Таким образом, предложенная методика позволяет исследовать нелинейные волновые режимы цилиндрической оболочки во взаимодействии с внешней средой и установить зависимость характеристик локализованных волн от параметров системы.

III. Результаты.

Применение метода геометрического ряда (МГР) к редуцированной системе уравнений позволило получить аналитические выражения для локализованных волновых решений, описывающих динамику системы «оболочка–нелинейная среда». В результате установлено существование устойчивых стационарных и бегущих волн, параметры которых определяются балансом дисперсионных и нелинейных эффектов.

Анализ показал, что коэффициенты нелинейности основания k_2 и

k_3 существенно влияют на структуру решений. При $k_3 > 0$ реализуется режим жесткого (упрочняющего) основания, что приводит к уменьшению ширины солитона и увеличению его амплитуды. В случае $k_3 < 0$ наблюдается эффект смягчения, сопровождающийся расширением волнового пакета и снижением максимального прогиба. Таким образом, знак и величина кубического члена определяют характер модуляционной устойчивости системы.

В зависимости от соотношения параметров дисперсии и нелинейности получены решения в виде:

- светлых солитонов (локализованное увеличение прогиба),
- темных солитонов (локализованное понижение на фоне ненулевого уровня),
- кинковых структур, описывающих переход между двумя устойчивыми состояниями равновесия.

Типовое солитонное решение может быть представлено в форме

$$W(z) = A \operatorname{sech}^2(\beta z),$$

где амплитуда A и параметр локализации β выражаются через коэффициенты жесткости, плотность и параметры нелинейной среды. Установлено, что увеличение коэффициента сдвиговой жесткости $k_s G h$ приводит к росту фазовой скорости волны, тогда как влияние нелинейных членов определяет амплитудную зависимость скорости распространения.

Сравнительный анализ с классической моделью Кирхгофа–Лява показал принципиальное отличие дисперсионных характеристик. В уточненной модели Тимошенко фазовая скорость

$$c_p = \frac{\omega}{k}$$

и групповая скорость

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}$$

остаются ограниченными при больших волновых числах, что соответствует физически корректному описанию распространения возмущений. В классической теории при $k \rightarrow \infty$ наблюдается неограниченный рост скорости, что противоречит реальным механическим свойствам среды.

Дополнительным преимуществом применения МГР является отсутствие секулярных членов, характерных для стандартных асимптотических методов возмущений. Это обеспечивает устойчивость аналитического решения при увеличении амплитуды колебаний и расширяет область применимости полученных результатов за пределы слабонелинейного приближения.

Таким образом, полученные решения подтверждают эффективность уточненной модели Тимошенко и демонстрируют существенную роль нелинейных параметров основания в формировании волновых режимов цилиндрической оболочки.

IV. Обсуждение.

Проведённый сравнительный анализ подтвердил, что классическая теория Кирхгофа–Лява демонстрирует заметные отклонения при исследовании коротковолновых процессов, когда длина волны соизмерима с толщиной оболочки ($\lambda \sim h$). В рамках данной теории пренебрежение поперечными сдвигами деформациями приводит к искажению дисперсионного соотношения и завышению фазовых скоростей при больших волновых числах. Это ограничивает её применимость при анализе высокочастотных динамических воздействий и локализованных волновых структур.

Модель Тимошенко, напротив, учитывает как энергию поперечного сдвига,

так и вращательную инерцию нормали, что приводит к более сложной, но физически корректной структуре дисперсионного уравнения. В частности, появляются дополнительные ветви спектра, связанные со сдвиговыми и вращательными модами колебаний. Это позволяет описывать переходные режимы, а также учитывать перераспределение энергии между изгибными и сдвиговыми формами движения при увеличении частоты возбуждения.

Существенную роль в формировании нелинейной динамики играет кубический член в законе реакции внешней среды ($k_3 \neq 0$). При положительном значении коэффициента реализуется эффект упрочнения основания, сопровождающийся ростом эффективной жесткости системы и увеличением амплитудно-зависимой скорости распространения волн. Отрицательное значение k_3 приводит к эффекту «смягчения», что может способствовать развитию модуляционной неустойчивости и локализации деформаций. Учет данного фактора является принципиально важным при оценке динамической прочности и устойчивости оболочечных конструкций в условиях ударных или импульсных нагрузок.

Полученные аналитические решения, построенные методом геометрического ряда, обладают важным методическим преимуществом. Они не содержат секулярных членов и сохраняют корректность при конечных значениях амплитуды, что расширяет область применимости модели по сравнению с традиционными асимптотическими методами. Кроме того, явная аналитическая форма решений позволяет использовать их в качестве эталонных при проведении численных экспериментов, тестировании алгоритмов интегрирования и верификации

вычислительных схем, применяемых в задачах нелинейной динамики оболочек.

Таким образом, результаты исследования подтверждают необходимость применения уточнённых теорий типа Тимошенко и учета нелинейных свойств внешней среды при моделировании высокочастотных и интенсивных динамических процессов в цилиндрических оболочках.

V. Заключение.

В работе разработана и исследована математическая модель динамики цилиндрической оболочки на основе уточнённой теории Тимошенко с учётом поперечного сдвига и вращательной инерции нормали, а также нелинейно-упругой реакции внешней среды. Применение вариационного подхода обеспечило строгий вывод уравнений движения, а использование метода геометрического ряда позволило получить аналитические решения, описывающие локализованные волновые структуры различного типа.

Показано, что учет сдвиговых деформаций и кубической нелинейности основания принципиально влияет на дисперсионные характеристики системы, устойчивость и амплитудно-частотные свойства распространяющихся волн. Уточнённая модель обеспечивает физически корректное поведение фазовых и групповых скоростей при высоких волновых числах и расширяет область применимости по сравнению с классической теорией Кирхгофа–Лява.

Полученные аналитические решения могут быть использованы при проектировании оболочечных волноводов,

анализе вибрационной устойчивости трубопроводных систем, а также при оценке долговечности и динамической прочности инженерных сооружений, функционирующих в условиях интенсивных вибрационных и импульсных нагрузок. Кроме того, результаты исследования создают теоретическую основу для дальнейших численных и экспериментальных работ в области нелинейной динамики оболочечных конструкций.

Список литературы

- [1]. Вольмир, А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. — М.: Наука, 1972. — 432 с. (*Классический труд по нелинейному поведению оболочек*).
- [2]. Ерофеев, В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой / В. И. Ерофеев. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 328 с. (*Основы моделирования сложных сред*).
- [3]. Порубов, А. В. Аналитическое исследование нелинейных волновых процессов в твердых телах / А. В. Порубов. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. — 205 с. (*Методы поиска точных решений*).
- [4]. Ильичев, А. Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики и упругости / А. Т. Ильичев. — М.: Физматлит, 2003. — 256 с. (*Теория солитонов в упругих системах*).
- [5]. Бобровницкий, Ю. И. Акустический метаматериал с необычными волновыми свойствами // Акустический журнал. — 2014. — Т. 60, № 4. — С. 347-355.
- [6]. Landa, P. S. Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems / P. S. Landa. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. — 405 p.
- [7]. Erofeev, V. I. Nonlinearized Wave Processes in Solid Media with Structure / V. I. Erofeev. — Springer Science & Business Media, 2003.
- [8]. Taj, M., Zhang, J. Analysis of wave propagation in orthotropic microtubules embedded within elastic medium by Pasternak model // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. — 2014. — Vol. 30. — P. 300-305.

Правила оформления статьи

1. В начале статьи указывается номер по Универсальной десятичной классификации (УДК). Далее приводятся (каждый раз с новой строки):

1) название статьи (строчными буквами, например: Диффузионные параметры атомов 3d переходных элементов в кремнии);

2) фамилия, имя и отчество автора (-ов);

3) краткая аннотация на узбекском и русском языках (450–500 знаков с пробелами), аннотация выделяется курсивом и отделяется от текста статьи пропуском строки;

4) ключевые слова (5–10).

2. Текст статьи набирается шрифтами Times New Roman, размер шрифта – 14 кеглей, межстрочный интервал – одинарный, поля – сверху и снизу 2 см, слева 3 см, справа 1,5 см; абзацный отступ – 1,25 см. с электронной версией (на флешке или компакт-диске). В названии файла указываются фамилия и специальность автора, например: *Физика_Бакиров*.

При использовании дополнительных шрифтов при наборе статьи такие шрифты должны быть представлены в редакцию в авторской электронной папке.

3. Объем статьи (включая рисунки, таблицы и диаграммы) составляет не менее 8 полных страниц (аннотации, ключевые слова и список литературы не входят в этот объем). Оптимальным для журнала является объем в 8–10 страниц.

4. Если в статью включены таблицы, схемы, диаграммы, различные графические обозначения, они должны быть нарисованы черным по белому, четко и ярко описаны, должно быть написано полное объяснение сокращений.

Все рисунки публикуются только в черно-белой гамме, полноцветные иллюстрации будут доступны только в электронной версии статьи.

Формулы необходимо вводить в текст в специальных компьютерных программах.

5. Ссылки на использованные источники приводятся после цитаты в квадратных скобках с указанием порядкового номера источника цитирования и страницы, например [1. С. 25]. Список литературы располагается после текста статьи, нумеруется (начиная с первого номера), предваряется словом «Литература» и оформляется в порядке упоминания или цитирования в тексте статьи (не в алфавитном порядке!). Под одним номером допустимо указывать только один источник. Примечания оформляются в виде постраничных сносок.

Для книг, сборников, монографий указываются имена авторов, полное название источника, индекс издания (город, издатель и год издания), общее количество страниц. Для журнальных статей и других периодических изданий указываются имя автора, название статьи, название журнала, год и номер, номер страницы.

К статье прилагается информация об авторах:

- фамилия, имя, отчество (полностью);
- ученая степень (при наличии);
- место работы, отдел, должность (без сокращений);
- электронный адрес;
- номер телефона.

Английский блок, прилагаемый к статье, включает:

1) перевод на английский язык названия статьи,

2) английский вариант фамилии, имени и отчества автора, перевод названия его организации на английский язык, например: Anvar H. Bakirov, Andijan State University, Andijan, 170100, str. University, 129 (Uzbekistan). E-mail: agsu_info@edu.uz

3) перевод на английский язык ключевых слов;

4) автореферат (расширенную аннотацию) статьи на английском языке (2500 – 3000 знаков с пробелами) и исходный текст автореферата на языке статьи (узбекском / русском).

Важно, чтобы автореферат (расширенная аннотация) был структурирован в соответствии с жанром: какую проблему решает автор (цель статьи), на каком материале, какими методами, ход исследования, выводы, к которым автор пришел (или которые доказал). Все эти моменты должны быть последовательно и логично изложены. Автореферат статьи не должен содержать излишнего теоретизирования, а, наоборот, отражать существенные моменты проведенного исследования.

5) английский вариант списка литературы (References). В списке сначала дается транслитерация ФИО автора, названия источника и его выходных данных. Далее в квадратных скобках перевод названия источника на английский язык. References должен быть оформлен в соответствии со стандартом АПА-2010.

